

Le cours de physique de

FEYNMAN

mécanique 2

LES COURS DE RÉFÉRENCE

DUNOD

Le cours de physique de **FEYNMAN**

mécanique 2

Feynman/Leighton/Sands

Préface de **Goéry Delacôte**

Version française de **G. Delacôte**

Faculté des Sciences de Paris

Coordination de **M. Bloch**

École Polytechnique de Paris

DUNOD

L'Édition originale de cet ouvrage a été publiée aux États-Unis
par Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading,
Massachusetts, sous le titre

The Feynman Lectures on Physics

© 1963 California Institute of Technology.

Note de l'éditeur

*Afin de réaliser cette édition en format de poche, nous avons
utilisé des documents originaux ayant servi pour la précédente
édition bilingue. Ceci explique pourquoi certaines pages ne
finissent pas en fin de ligne.*

Ce pictogramme mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du **photocopillage**.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établis-

sements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.



Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20 rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© InterEditions, Paris, 1979

© Dunod, Paris, 1998

pour la version française

ISBN 2 10 004135 5

Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite selon le Code de la propriété intellectuelle (Art L. 122-4) et constitue une contrefaçon réprimée par le Code pénal. • Seules sont autorisées (Art L. 122-5) les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, ainsi que les analyses et courtes citations justifiées par le caractère critique, pédagogique ou d'information de l'œuvre à laquelle elles sont incorporées, sous réserve, toutefois, du respect des dispositions des articles L. 122-10 à L. 122-12 du même Code, relative à la reproduction par reprographie.

Préface à l'édition française

Dans la préface qu'il a rédigée pour ses cours de physique, Richard P. Feynman se plaint de ne pas avoir obtenu de réaction de la part de ses étudiants lorsqu'il donnait son cours.

A l'époque, il lui était peut-être difficile de connaître les réactions de l'ensemble de ses étudiants. Mais aujourd'hui, seize ans après, on peut dire que ces cours ont eu un très large succès, tant aux Etats-Unis, que dans de nombreux pays étrangers. Cela se traduit en particulier par la très grande diffusion des ouvrages, qui tantôt en langue anglaise, tantôt en édition bilingue, rassemblaient l'ensemble de ses cours.

Pourquoi un succès d'une telle ampleur?

Il y a d'abord le fait que Richard Feynman s'intéresse à toute la physique, ne se limitant pas à quelques domaines bien classiques et traditionnellement enseignés. Il n'hésite pas, au contraire, à aborder des secteurs de physique plus modernes, plus nouveaux, ou davantage liés à des applications récentes. La météorologie, la physique de la foudre, l'astrophysique, la physique des particules élémentaires, la physique des semi-conducteurs et du magnétisme des solides, etc... font toutes l'objet de chapitres ou de paragraphes dans les cours de Richard Feynman. C'est ainsi qu'il parvient à nous donner une idée simple, précise et enthousiasmante de ce qu'est la physique d'aujourd'hui, sans négliger ses fondements les plus traditionnels.

La deuxième raison de cet énorme succès est le style d'approche de la physique que Feynman présente dans ses cours. A aucun moment, l'outillage mathématique ne vient entraver la compréhension des phénomènes physiques. Bien au contraire, cet outillage est conçu pour répondre aux problèmes que se pose le physicien. Il en résulte que le lecteur de ce livre découvre à la fois les grands problèmes de physique et les outils mathématiques indispensables pour les résoudre le plus simplement possible.

Une troisième raison du succès me paraît être l'aspect très personnalisé de cet enseignement où l'on peut voir, tout au long des lignes, la pensée personnelle de Richard Feynman s'exprimer en un perpétuel jaillissement. C'est ce contact pour ainsi dire direct avec un physicien en train d'élaborer sa propre pensée qui nous paraît être un des apports les plus féconds de ses

cours. Comme celle d'Einstein, la pensée de Feynman, lui aussi un des grands physiciens de notre temps, est souvent de nature qualitative, s'appuyant sur des images et des analogies. Il nous semble que ces textes restituent, pour une large part, cette manière de penser, si riche et si féconde qu'elle mérite d'être donnée en exemple à toute personne qui veut découvrir ce qu'est la physique.

Nous sommes donc particulièrement heureux, au moment où, en France, l'enseignement de la physique se voit transformé en profondeur au niveau des lycées et collèges, après l'avoir été dans les universités et grandes écoles, de pouvoir à nouveau disposer d'une édition en langue française des cours de physique de Richard Feynman. Cette réforme, en particulier celle qui concerne l'enseignement de la physique aux jeunes élèves, à un niveau d'introduction, met en effet l'accent sur l'approche à la fois qualitative et expérimentale de la physique. Elle tend à dégager du piège des mathématiques un enseignement de physique ayant ainsi retrouvé sa véritable dimension.

C'est donc le moment de lire ou de relire Feynman. Cette relecture n'est non seulement jamais lassante, mais source chaque fois d'idées nouvelles. Elle sera sûrement utile à tous ceux qui, dans notre pays, auront la tâche d'assurer ce nouvel enseignement de physique à un public jeune et très motivé.

G. DELACÔTE
Professeur de Physique
Université Paris VII
avril 1979



Préface de Feynman

Voici les cours de physique que j'ai donnés l'année dernière et l'année précédente aux élèves de première et de deuxième année de l'université de Caltech. Ces cours ne rapportent pas mots pour mots ce qui fut dit — ils ont été édités quelquefois dans leur intégralité et quelquefois un peu moins. Ces leçons ne forment qu'une partie du cours complet. Tout le groupe des 180 étudiants se rassemblait dans une grande salle de cours, deux fois par semaine, pour écouter ces cours et puis se divisait en petits groupes de 15 à 20 étudiants dans des sections de travaux dirigés sous la direction d'un assistant. Il y avait de plus une séance de laboratoire une fois par semaine.

Le problème particulier que nous avons essayé de résoudre avec ces leçons était de maintenir l'intérêt des étudiants, très enthousiastes et assez brillants, qui venaient de sortir des écoles secondaires et rentraient à Caltech. Ils avaient entendu beaucoup de choses sur les aspects intéressants et excitants de la physique — la théorie de la relativité, la mécanique quantique et d'autres idées modernes. Après avoir suivi deux années de nos cours précédents, beaucoup se seraient sentis découragés parce qu'on ne leur aurait présenté que très peu d'idées modernes grandes et nouvelles. Ils auraient étudié les plans inclinés, l'électrostatique, etc., et au bout de deux ans cela est passablement ridicule. Le

problème était de savoir si, oui ou non, nous pouvions faire un cours qui pourrait ménager les étudiants les plus en avance et les plus enthousiastes en maintenant leur enthousiasme.

Les cours qui suivent ici ne sont pas du tout considérés comme un survol, mais sont très sérieux. J'ai pensé les adresser à ceux qui étaient les plus intelligents de la classe et je fis en sorte, dans la mesure du possible, que même l'étudiant le plus intelligent ne fut pas capable de saisir complètement tout ce qui se trouvait dans les cours — en suggérant un développement des idées et des concepts dans diverses directions s'écartant de la principale ligne d'attaque. Pour cette raison, j'ai essayé avec beaucoup d'attention de rendre les énoncés aussi précis que possible, d'indiquer dans chaque cas l'endroit où les équations et les idées trouvaient leur place dans l'ensemble de la physique et comment — lorsqu'ils en apprendraient davantage — les choses se modifieraient. J'ai pensé également que pour de tels étudiants, il est important d'indiquer ce qu'ils doivent — s'ils sont suffisamment intelligents — être capables de comprendre par déduction de ce qui a été dit précédemment et ce qui est introduit comme quelque chose de nouveau. Lorsque de nouvelles idées apparaissaient, j'ai essayé soit de les déduire, quand on pouvait le faire, ou d'expliquer que *c'était* une nouvelle idée qui ne s'exprimait pas en fonction des choses qu'ils avaient apprises jusqu'alors, qu'on ne pouvait pas la démontrer — mais qu'elle était simplement ajoutée.

Pour le début de ces cours, j'ai supposé que l'étudiant connaissait certaines choses en science lorsqu'il sortait de l'école secondaire — des choses telles que l'optique géométrique, les idées de chimie élémentaire, etc. Je n'ai pas vu qu'il y ait de raison particulière pour faire les cours dans un ordre défini au sens où je ne me serais pas permis de mentionner une chose jusqu'au moment où je serais prêt à la discuter en détail. Il y a de nombreuses références à des choses à venir, sans discussions complètes. Ces discussions plus complètes venaient plus tard, lorsque la préparation était plus avancée. Des exemples en sont les discussions de l'induction et des niveaux d'énergie qui sont introduits une première fois d'une manière très qualitative et sont plus tard développés plus complètement.

En même temps que je m'efforçais d'intéresser les étudiants les plus actifs, je voulais également prendre soin de ceux pour lesquels les applications marginales et ces feux d'artifices supplémentaires sont simplement inquiétants et dont on ne peut attendre qu'ils apprennent la totalité du matériel dans chaque leçon. Pour de tels étudiants, je souhaitais qu'il y ait au moins un noyau central, une ossature, qu'ils *puissent* acquérir. Même s'ils ne comprenaient pas tout dans une leçon, j'espérais qu'ils ne se décourageraient pas. Je ne m'attendais pas à ce qu'ils comprennent tout, mais seulement les caractéristiques centrales et les traits les plus directs. Il fallait bien sûr une certaine intelligence de leur part pour voir quels sont les théorèmes centraux, les idées centrales et quelles sont les issues latérales plus avancées et les applications qu'ils pouvaient ne comprendre que dans les années à venir.

J'ai rencontré une difficulté sérieuse en donnant ces cours: selon la manière dont le cours était donné, il n'y avait aucune expression en retour venant des étudiants vers celui qui donnait le cours, pour indiquer comment les leçons étaient assimilées. Ceci est en effet une difficulté très sérieuse et je ne sais pas effectivement quelle est la qualité de ces cours. L'ensemble était essentiellement une expérience. Et si je devais le refaire je ne le ferais pas de la même manière — j'espère que je *n'aurai pas* à le refaire! Je pense, cependant, que les choses se sont bien passées, pour autant que la physique soit concernée, durant la première année.

Pendant la deuxième année je ne fus pas aussi satisfait. Dans la première partie du

cours traitant de l'électricité et du magnétisme, je n'ai pu considérer aucune manière réellement unique ou différente de les traiter — n'importe quelle autre manière qui serait particulièrement plus excitante que la manière habituelle de présentation. Aussi je pense que je n'ai pas apporté beaucoup dans ces cours sur l'électricité et le magnétisme. Je pensais initialement continuer à la fin de la deuxième année après l'électricité et le magnétisme, en donnant quelques cours supplémentaires sur les propriétés des matériaux, mais essentiellement en insistant sur des choses telles que les modes fondamentaux, les solutions de l'équation de diffusion, les systèmes vibratoires, les fonctions orthogonales, etc., développant les premières étapes de ce qu'on appelle habituellement « les méthodes mathématiques de la physique ». A y repenser, je considère que si je devais le refaire, je reviendrais à cette idée initiale. Mais comme il n'était pas prévu que je donnerais à nouveau ces leçons, on suggéra que cela serait une bonne idée que d'essayer — de présenter une introduction de la mécanique quantique — ce que vous trouverez au volume 3.

Il est parfaitement clair que les étudiants qui s'orienteront vers la physique peuvent attendre jusqu'à leur troisième année pour étudier la mécanique quantique. D'un autre côté l'argument fut avancé que nombreux étaient les étudiants dans notre cours qui étudiaient la physique comme un bagage qui pourrait servir de complément à leurs préoccupations fondamentales dans d'autres domaines. Et la manière habituelle de traiter la mécanique quantique rend ce sujet presque inaccessible pour la plus grande partie des étudiants, parce qu'il leur faut trop longtemps pour l'apprendre. De plus, dans ses applications réelles, spécialement dans ses applications les plus complexes telles que dans les techniques électriques et la chimie — le mécanisme complet de l'approche par l'équation différentielle n'est pas effectivement utilisé. Aussi j'ai essayé de décrire les principes de mécanique quantique d'une manière qui ne nécessite pas que l'on connaisse d'abord les mathématiques des équations différentielles partielles. Je pense que, même pour un physicien, c'est une chose intéressante à essayer — que de présenter la mécanique quantique de cette manière renversée — pour plusieurs raisons qui peuvent être apparentes dans les cours eux-mêmes. Cependant je pense que l'expérience, dans la partie de mécanique quantique, ne fut pas complètement un succès — pour une large part parce que je n'ai pas eu, à la fin, suffisamment de temps (j'aurais dû, par exemple, faire trois ou quatre cours en plus, de manière à traiter plus complètement des sujets tels que les bandes d'énergie et la dépendance spatiale des amplitudes). De plus je n'avais jamais auparavant présenté ce sujet de cette manière, ce qui fait que l'absence de réaction en retour fut particulièrement sérieuse. Je pense maintenant que la mécanique quantique devrait être enseignée plus tardivement. Il se peut que j'aie un jour la chance de le refaire. Alors je le ferai correctement.

La raison pour laquelle il n'y a pas de cours sur la manière dont on résout les problèmes est qu'il y avait des sections de travaux dirigés. Bien que j'ai mis dans trois cours, en première année, ce qu'il faut savoir pour résoudre les problèmes, ceci n'est pas inclus ici. Il y avait également un cours sur le guidage par inertie qui se situe certainement après les cours sur les systèmes en rotation mais qui fut malheureusement omis. Les cinquième et sixième cours sont en réalité dus à Matthew Sands, car j'étais absent à cette époque.

La question est bien sûr de savoir comment cette expérience a réussi. Mon propre point de vue — qui cependant ne semble pas être partagé par la plus grande partie des personnes qui ont travaillé avec les étudiants — est pessimiste. Je ne pense pas que j'ai réellement bien travaillé avec les étudiants. Lorsque je considère la manière dont la majorité des étudiants traitaient les problèmes aux examens, je pense que le système est un échec. Bien entendu, mes amis m'ont fait remarquer qu'il y avait une ou deux douzaines d'étudiants qui — d'une manière très surprenante — comprenaient presque tous les cours et qui étaient très actifs, travaillant avec le contenu de ces leçons et se préoccupant des

divers points d'une manière intéressée et passionnée. Ceux-ci ont maintenant, je le pense, un bagage fondamental de première qualité en physique — et ils sont après tout ceux auxquels je désirais m'adresser. Mais alors, « la puissance de l'instruction est rarement de grande efficacité à l'exception de ces dispositions heureuses où elle est pratiquement superflue » (Gibbons).

Toutefois je ne désirais laisser aucun étudiant complètement en arrière, comme peut-être je l'ai fait. Je pense qu'une manière par laquelle nous pourrions aider davantage les étudiants, serait de faire plus d'efforts pour développer un ensemble de problèmes qui permettraient d'élucider certaines des idées dans les cours. Les problèmes donnent une bonne occasion d'utiliser les matériaux des leçons et de rendre plus réalistes, plus complètes et plus ancrées dans les esprits, les idées qui ont été exposées.

Je pense cependant qu'il n'y a aucune solution à ce problème d'éducation autre que de réaliser que le meilleur enseignement ne peut être obtenu que lorsqu'il y a une relation directe et individuelle entre un étudiant et un bon professeur — une situation dans laquelle l'étudiant discute les idées, pense sur les choses et parle des choses. Il est impossible d'en apprendre beaucoup simplement en assistant à un cours ou même simplement en faisant les problèmes qui sont demandés. Mais à notre époque moderne nous avons tellement d'étudiants à enseigner qu'il nous faut essayer de trouver quelques substituts à l'idéal. Peut-être mes cours pourront-ils apporter une certaine contribution. Peut-être, ça et là où se trouvent en nombre restreint des enseignants et des étudiants, pourront-ils tirer un peu d'inspiration ou quelques idées de ces cours. Peut-être auront-ils du plaisir à les lire et à y réfléchir ou à essayer de pousser plus loin le développement de certaines de ces idées.

RICHARD P. FEYNMAN

Introduction

Ce livre est réalisé d'après un cours d'introduction à la physique, donné par le Professeur R. P. Feynman à l'Institut de Technologie de Californie pendant l'année universitaire 1961-62; il recouvre la première année d'un cours d'introduction de deux ans, suivi par tous les élèves de première et de deuxième année de Caltech et fut suivi en 1962-63 par un cours analogue couvrant la deuxième année. Les leçons constituent la partie essentielle d'une révision fondamentale, réalisée sur une période de quatre ans, du cours d'introduction.

La nécessité d'une révision fondamentale provenait à la fois du développement rapide de la physique dans les dernières années et du fait que les nouveaux étudiants montraient une capacité mathématique en augmentation constante comme résultat de l'amélioration du contenu des cours mathématiques de l'enseignement secondaire. Nous espérions tirer avantage de cette connaissance mathématique améliorée et également introduire suffisamment de matériel moderne pour rendre ce cours attirant, intéressant et plus représentatif de la physique actuelle.

Afin de faire naître une grande variété d'idées sur le type de matériel à inclure et sur la manière de le présenter, un nombre élevé de Professeurs appartenant à la Faculté furent encouragés à donner leurs idées sous forme de lignes directrices pour un cours révisé. Plusieurs de celles-ci furent présentées, furent discutées complètement et d'une manière critique. On se mit d'accord pratiquement immédiatement sur le fait qu'une révision fondamentale du cours ne pouvait être réalisée soit en adoptant simplement un autre manuel soit même en écrivant un *ab initio*, mais que le nouveau cours devait être centré sur un ensemble de leçons devant être présentées au rythme de deux ou trois par semaine; le texte approprié serait alors produit dans un deuxième temps au fur et à mesure que le cours se développerait et des expériences de laboratoire convenables seraient également mises au point pour s'adapter au contenu des cours. En conséquence, un schéma approximatif du cours fut établi, mais il fut reconnu que ceci était incomplet, que c'était une tentative, et sujet à des modifications considérables par qui que ce soit qui prendrait la responsabilité de préparer effectivement les leçons.

Pour ce qui est du mécanisme par lequel le cours devait finalement prendre forme, plusieurs plans furent considérés. Ces plans étaient pour la plupart assez semblables, prévoyant un effort coopératif de N Professeurs qui se partageraient l'entière besogne d'une manière symétrique et égale: chaque professeur prendrait la responsabilité de $1/N$ du matériel, ferait les cours et écrirait le texte pour sa partie. Cependant l'impossi-

bilité d'obtenir une équipe en nombre suffisant, les difficultés de maintenir un point de vue uniforme à cause des différences de personnalités et de philosophies entre les participants, donnèrent l'impression que ces plans étaient irréalisables.

L'idée que nous possédions effectivement les moyens de créer non seulement un cours de physique nouveau et différent mais peut-être un cours unique, fut une heureuse inspiration du Professeur Sands. Il suggéra que le Professeur R. P. Feynman prépare et donne les leçons, et qu'elles soient enregistrées sur magnétophone. Transcrites et éditées, ces leçons deviendraient alors le manuel de ce nouveau cours. C'est essentiellement ce plan qui fut adopté.

Nous espérons que le travail nécessaire d'édition serait mineur, consistant simplement à tracer les figures et à vérifier la ponctuation et la grammaire. Il devait être réalisé par un ou deux assistants sur la base d'un travail à temps partiel. Malheureusement cet espoir fut de courte durée. Ce fut en réalité une opération considérable d'édition que de transformer la transcription mots pour mots, en une forme lisible, même sans la réorganisation ou la révision du matériel qui s'est avérée quelquefois nécessaire. De plus ce n'était pas un travail pour un éditeur scientifique ou pour un étudiant en cours de thèse, mais un travail qui nécessitait l'attention serrée d'un physicien professionnel à concurrence de dix à vingt heures par cours!

Les difficultés du travail d'édition jointes à la nécessité de placer un texte entre les mains d'étudiants aussi rapidement que possible imposa une limite stricte au degré réalisable de « polissage » du matériel et nous fûmes ainsi forcés de réaliser un produit préliminaire, mais correct du point de vue technique, qui pourrait être utilisé immédiatement, plutôt que de réaliser un produit qui pourrait être considéré comme achevé. A cause de la nécessité urgente d'un nombre croissant de copies pour nos étudiants et d'un intérêt croissant de la part d'instructeurs et d'étudiants de différentes autres institutions, nous décidâmes de publier le matériel dans sa forme préliminaire plutôt que d'attendre une révision fondamentale qui pourrait très bien ne jamais arriver. Nous n'avons aucune illusion sur le degré d'achèvement, de polissage ou d'organisation logique du matériel; en fait, nous prévoyons plusieurs modifications mineures du cours dans le futur immédiat et nous espérons qu'il ne restera pas statique en forme comme en contenu.

En plus de ces leçons qui constituent une partie centrale importante du cours, il était nécessaire de donner des exercices adaptés pour développer l'expérience et le savoir faire des étudiants et des expériences convenables pour donner un premier contact en laboratoire avec le contenu de la leçon. Aucun de ces deux aspects n'est dans un état aussi élaboré que le matériel du cours, mais des progrès considérables ont été réalisés. Certains exercices ont été réalisés au fur et à mesure que les leçons progressaient, et ils furent développés et amplifiés pour être utilisés au cours des années suivantes. Cependant, parce que nous ne sommes pas encore maintenant convaincus du fait que les exercices puissent apporter suffisamment de variété et de richesse dans les applications sur le matériel des leçons pour rendre l'étudiant parfaitement conscient de la puissance extraordinaire placée à sa disposition, les exercices sont publiés séparément sous une forme moins permanente, afin d'encourager une révision fréquente.

Un certain nombre de nouvelles expériences, pour ces nouveaux cours, ont été mises au point par le Professeur H. V. Neher. Parmi elles, il y en a plusieurs qui utilisent le frottement extrêmement faible manifesté par un support gazeux: un nouveau conduit linéaire à coussin d'air avec lequel furent réalisées des mesures quantitatives de mouvement à une dimension, de collisions et de mouvement harmonique et une toupie de Maxwell supportée et conduite par l'air, avec laquelle les mouvements de rotation accé-

lérés, la précession gyroscopique et la nutation purent être étudiés. Le développement de nouvelles expériences de laboratoire doit se continuer pendant une très longue période de temps.

Le programme de révision fut placé sous la direction des Professeurs R. B. Leighton, H. V. Neher et M. Sands. Les participants officiels au programme étaient les Professeurs R. P. Feynman, G. Neugebauer, R. M. Sutton, H. P. Stabler, F. Strong et R. Vogt, de la division de Physique, de Mathématique et d'Astronomie et les Professeurs T. Caughey, M. Plesset et C. H. Wilts, des divisions des Sciences de l'Ingénieur. L'aide utile de tous ceux qui ont contribué au programme de révision appelle de vifs remerciements. Nous sommes particulièrement redevables à la fondation Ford sans l'aide financière de laquelle ce programme n'aurait pu être réalisé.

ROBERT B. LEIGHTON

Table des matières

Chapitre 26	Optique: le principe du moindre temps	
26-1	La lumière	1
26-2	Réflexion et réfraction	3
26-3	Principe de Fermat du moindre temps	4
26-4	Application du principe de Fermat	7
26-5	Un énoncé plus précis du principe de Fermat	11
26-6	Comment cela fonctionne-t-il?	13
Chapitre 27	Optique géométrique ✓	
27-1	Introduction	15
27-2	Distance focale d'une surface sphérique	16
27-3	Distance focale d'une lentille	20
27-4	Grandissement	22
27-5	Lentilles composées	23
27-6	Aberrations	24
27-7	Pouvoir de résolution	25
Chapitre 28	Rayonnement électromagnétique	
28-1	Électromagnétisme	27
28-2	Rayonnement	30
28-3	Le dipôle rayonnant	32
28-4	Interférence	34
Chapitre 29	Interférence ✗	
29-1	Ondes électromagnétiques	36
29-2	Énergie de rayonnement	38
29-3	Ondes sinusoïdales	39
29-4	Deux dipôles rayonnants	40
29-5	Les mathématiques de l'interférence	43

Chapitre 30	Diffraction	
30-1	L'amplitude résultante due à n oscillateurs égaux	48
30-2	Le réseau de diffraction	52
30-3	Pouvoir de résolution d'un réseau	55
30-4	L'antenne parabolique	57
30-5	Films colorés; cristaux	58
30-6	Diffraction par des écrans opaques	59
30-7	Le champ d'un plan de charges qui oscillent	61
Chapitre 31	L'origine de l'indice de réfraction	
31-1	L'indice de réfraction	66
31-2	Le champ dû au matériau	70
31-3	Dispersion	73
31-4	Absorption	76
31-5	L'énergie transportée par une onde électrique	77
31-6	Diffraction de la lumière par un écran	79
Chapitre 32	Amortissement du rayonnement. Diffusion de la lumière	
32-1	Résistance de rayonnement	82
32-2	Le taux de rayonnement de l'énergie	83
32-3	Amortissement par rayonnement	85
32-4	Sources indépendantes	87
32-5	Diffusion de la lumière	89
Chapitre 33	Polarisation	
33-1	Le vecteur électrique de la lumière	94
33-2	Polarisation de la lumière diffusée	96
33-3	Biréfringence	97
33-4	Polariseurs	100
33-5	Activité optique	101
33-6	L'intensité de la lumière réfléchie	102
33-7	Réfraction anormale	105
Chapitre 34	Effets relativistes dans le rayonnement	
34-1	Sources en mouvement	109
34-2	Trouver le mouvement « apparent »	111
34-3	Rayonnement de synchrotron	113
34-4	Rayonnement de synchrotron cosmique	116
34-5	Rayonnement de freinage (Bremsstrahlung)	117
34-6	L'effet Doppler	118
34-7	Le quadri-vecteur $\omega, \mathbf{k}$	121
34-8	Aberration	122
34-9	La quantité de mouvement de la lumière	123

Chapitre 35	La vision en couleur	
35-1	L'œil humain	126
35-2	La couleur dépend de l'intensité	128
35-3	Mesurer la sensation de couleur	129
35-4	Le diagramme de chromaticité	134
35-5	Le mécanisme de la vision en couleur	135
35-6	La physiochimie de la vision en couleur	138
Chapitre 36	Mécanismes de la vision	
36-1	La sensation de couleur	141
36-2	La physiologie de l'œil	144
36-3	Les cellules à bâtonnet	148
36-4	L'œil composé (insecte)	150
36-5	D'autres yeux	153
36-6	Neurologie de la vision	154
Chapitre 37	Comportement quantique	
37-1	Mécanique atomique	160
37-2	Une expérience avec des balles	161
37-3	Une expérience avec des ondes	163
37-4	Une expérience avec des électrons	165
37-5	L'interférence des ondes d'électrons	166
37-6	En regardant les électrons	168
37-7	Premiers principes de mécanique quantique	172
37-8	Le principe d'incertitude	174
Chapitre 38	La relation entre les points de vue ondulatoire et corpusculaire	
38-1	Amplitudes d'onde de probabilité	176
38-2	Mesure de la position et de la quantité de mouvement	177
38-3	Diffraction cristalline	181
38-4	La dimension d'un atome	183
38-5	Niveaux d'énergie	185
38-6	Implications philosophiques	187
Chapitre 39	La théorie cinétique des gaz	
39-1	Propriétés de la matière	190
39-2	La pression d'un gaz	192
39-3	Compressibilité du rayonnement	197
39-4	Température et énergie cinétique	198
39-5	La loi du gaz parfait	203
Chapitre 40	Les principes de mécanique statistique	
40-1	L'atmosphère exponentielle	206
40-2	La loi de Boltzmann	208

40-3	Évaporation d'un liquide	210
40-4	La distribution des vitesses moléculaires	211
40-5	Les chaleurs spécifiques des gaz	216
40-6	L'échec de la physique classique	218
Chapitre 41 Le mouvement Brownien		
41-1	Équipartition de l'énergie	221
41-2	Équilibre thermique du rayonnement	224
41-3	Équipartition et l'oscillateur quantique	229
41-4	La marche aléatoire	232
Chapitre 42 Applications de la théorie cinétique		
42-1	Évaporation	236
42-2	Émission thermoionique	240
42-3	Ionisation thermique	241
42-4	Cinétique chimique	244
42-5	Les lois d'Einstein du rayonnement	246
Chapitre 43 Diffusion		
43-1	Collisions entre molécules	250
43-2	Le libre parcours moyen	253
43-3	La vitesse d'entraînement	255
43-4	Conductivité ionique	257
43-5	Diffusion moléculaire	258
43-6	Conductivité thermique	262
Chapitre 44 Les lois de la thermodynamique		
44-1	Machines thermiques; la première loi	264
44-2	La deuxième loi	267
44-3	Machines réversibles	269
44-4	Le rendement d'une machine parfaite	273
44-5	La température thermodynamique	276
44-6	L'entropie	278
Chapitre 45 Illustration de la thermodynamique		
45-1	Énergie interne	283
45-2	Applications	287
45-3	L'équation de Clausius-Clapeyron	290
Chapitre 46 L'encliquetage à rochet		
46-1	Comment fonctionne une roue à rochet	295
46-2	La roue à rochet en tant que machine	297

46-3	Réversibilité en mécanique	300
46-4	Irréversibilité	302
46-5	Ordre et entropie	304
Chapitre 47 Le son. L'équation d'onde ✂		
47-1	Les ondes	307
47-2	La propagation du son	310
47-3	L'équation d'onde	311
47-4	Solutions de l'équation d'onde	314
47-5	La vitesse du son	316
Chapitre 48 Battements ✂		
48-1	Additionner deux ondes	318
48-2	Notes de battements et modulation	321
48-3	Bands latéraux	322
48-4	Les trains d'ondes localisés	325
48-5	Amplitudes de probabilité pour des particules	327
48-6	Ondes à trois dimensions	329
48-7	Modes normaux	331
Chapitre 49 Modes ✂		
49-1	La réflexion des ondes	333
49-2	Ondes limitées avec des fréquences naturelles	335
49-3	Modes à deux dimensions	337
49-4	Pendules couplés	341
49-5	Systèmes linéaires	342
Chapitre 50 Harmoniques		
50-1	Tons musicaux	344
50-2	La série de Fourier	346
50-3	Timbre et accord	347
50-4	Les coefficients de Fourier	350
50-5	Le théorème de l'énergie	353
50-6	Les réponses non linéaires	354
Chapitre 51 Ondes		
51-1	Lame d'étrave	358
51-2	Ondes de choc	360
51-3	Ondes dans les solides	363
51-4	Ondes de surface	367

Chapitre 52	Symétrie dans les lois physiques	
52-1	Opérations de symétrie	372
52-2	Symétrie dans l'espace et le temps	373
52-3	Symétrie et lois de conservation	376
52-4	Réflexions dans un miroir	377
52-5	Vecteurs polaires et axiaux	380
52-6	Laquelle des deux mains est la droite?	382
52-7	La parité n'est pas conservée!	383
52-8	L'antimatière	385
52-9	Violation des symétries	387
	Index alphabétique	389

Optique: Le principe du moindre temps

26-1 La lumière

26-2 Réflexion et réfraction

26-3 Principe de Fermat du moindre temps

26-4 Application du principe de Fermat

26-5 Un énoncé plus précis du principe de Fermat

26-6 Comment cela fonctionne-t-il?

26-1 La lumière

Ceci est le premier chapitre d'une série portant sur le sujet du *rayonnement électromagnétique*. La lumière que nous voyons n'est qu'une petite fraction d'un vaste spectre, les différentes parties de ce spectre se distinguant par différentes valeurs d'une certaine quantité qui varie. Cette quantité variable est appelée la « longueur d'onde ». Lorsque celle-ci varie dans la partie visible, la lumière modifie apparemment sa couleur du rouge au violet. Si nous explorons le spectre systématiquement depuis les grandes longueurs d'ondes jusqu'aux plus courtes, nous débutons par ce qui est appelé habituellement les *ondes de radio*. On peut obtenir techniquement ces ondes de radio sur une large plage de longueurs d'onde, certaines étant même plus longues que celles utilisées habituellement dans les émissions de radio; les émissions de radio habituelles ont des longueurs d'ondes correspondant à environ 500 mètres. On trouve ensuite ce qu'on appelle les « ondes courtes », c'est-à-dire les ondes de radar, les ondes millimétriques, etc. Il n'y a pas de frontière réelle entre un domaine de longueur d'onde et un autre, parce que la nature ne nous présente pas de bords francs. Les nombres associés avec une certaine dénomination d'onde ne sont qu'approchés, et il en est de même bien sûr pour les noms que nous donnons aux différents domaines.

Ainsi, après avoir parcouru longtemps le domaine des ondes millimétriques, nous atteignons ce que nous appelons l'*infra-rouge*, et ensuite le spectre visible. Passant ensuite de l'autre côté, nous pénétrons dans une région qui est appelée l'*ultra-violet*. Là où l'*ultra-violet* s'arrête, les rayons x commencent, mais nous ne pouvons pas précisément définir l'endroit de la transition; c'est aux environs de 10^{-8} m ou 10^{-2} μ . Ce sont alors des rayons x « mous »; puis il y a les rayons x ordinaires et les rayons x très durs; puis les rayons gamma, etc., pour des valeurs de plus en plus petites de cette grandeur que l'on appelle la longueur d'onde.

A l'intérieur de ce vaste domaine de longueurs d'ondes, il y a au moins trois régions d'approximation qui sont spécialement intéressantes. Dans l'une d'entre elles, les longueurs d'ondes sont très petites par rapport aux dimensions de l'appareillage dont on dispose pour les étudier; et de plus l'énergie des photons, selon la théorie quantique, est petite en comparaison avec la définition en énergie de l'équipement. Dans ces conditions, nous pouvons faire une première approximation grossière à l'aide d'une méthode appelée l'*optique géométrique*. Si d'un autre côté les longueurs d'ondes sont comparables aux dimensions de l'équipement, ce qui est difficile à réaliser avec la lumière visible, mais plus facile avec des ondes de radio, et si les énergies des photons sont toujours négligeables, une approximation très utile peut être réalisée en étudiant le comportement de ces ondes, sans tenir compte encore de la mécanique quantique. Cette méthode est fondée sur la *théorie classique du rayonnement électromagnétique* qui sera étudiée plus loin. Si nous parvenons ensuite aux très petites longueurs d'ondes pour lesquelles nous pouvons oublier le caractère ondulatoire, mais où les photons ont une très grande énergie en comparaison de la sensibilité de notre équipement, les choses deviennent à nouveau simples. C'est la simple description *photonique* que nous n'analyserons que très rapidement. La description complète qui unifie l'ensemble dans un seul modèle ne sera pas à notre disposition avant longtemps.

Dans ce chapitre notre discussion se limitera au domaine de l'optique géométrique, dans lequel nous oublions les caractères ondulatoires et photoniques de la lumière qui seront tous deux expliqués le moment venu. Nous ne nous préoccupons même pas de dire ce qu'*est* la lumière, nous examinons simplement *son comportement* sur une échelle grande en comparaison avec les dimensions qui nous intéressent. Tout cela doit être dit afin d'insister sur le fait que ce dont nous parlerons ne sera qu'une approximation très grossière; c'est un des chapitres qu'il nous faudra désapprendre plus tard. Mais nous allons le désapprendre très vite, car nous passerons presque aussitôt à une méthode bien plus précise.

Bien que l'optique géométrique ne soit qu'une approximation, elle est de très grande importance technique et de très grand intérêt historique. Nous présenterons ce sujet, plus que certains autres, d'un point de vue historique, afin de vous donner une idée du développement d'une théorie physique ou d'une idée physique.

La lumière, pour commencer, nous est familière et cela depuis des temps très reculés. Nous pouvons nous demander: par quel processus *voyons-nous* la lumière? Il y a eu de nombreuses théories, mais elles se sont toutes finalement réduites à l'une d'entre elles, celle qui dit que quelque chose pénètre dans notre œil – quelque chose qui rebondit sur les objets pour entrer dans notre œil. Nous avons entendu cette idée depuis si longtemps que nous l'acceptons, et il nous est pratiquement impossible de penser que des gens très intelligents aient proposé des théories contraires – par exemple que quelque chose puisse quitter notre œil à la recherche de l'objet. Une autre observation importante est que lorsque la lumière va d'un endroit à un autre, elle se déplace en *ligne droite* s'il n'y a rien en chemin, et que les rayons ne semblent pas interférer entre eux. La lumière se propage dans toutes les directions dans la pièce, mais la lumière qui passe devant notre ligne de vision n'affecte pas la lumière qui vient d'un certain objet jusqu'à nous. Ceci fut à un certain moment un argument extrêmement puissant contre la théorie corpusculaire; il a été utilisé par Huygens. Si la lumière était semblable à un ensemble de flèches projetées au fur et à mesure, comment d'autres flèches pourraient-elles les traverser si facilement? De tels raisonnements philosophiques ne sont pas de grand poids. On pourrait toujours dire que la lumière est formée de flèches qui sont capables de se traverser!

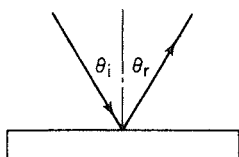


Fig. 26-1. L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

26-2 Réflexion et réfraction

La discussion ci-dessus donne un aperçu suffisant des *idées* fondamentales de l'optique géométrique – il nous faut maintenant développer un peu plus l'aspect quantitatif. Jusqu'à présent nous considérons seulement le cas de la lumière se propageant en ligne droite entre deux points; étudions maintenant le comportement de la lumière lorsqu'elle frappe divers matériaux. L'objet le plus simple est un miroir, et la loi pour un miroir est que lorsque la lumière frappe le miroir, elle ne continue pas en ligne droite, mais rebondit sur lui selon une nouvelle ligne droite qui se déplace lorsque nous changeons l'inclinaison du miroir. La question pour les Anciens était: quelle est la relation entre les deux angles en cause? C'est une relation très simple, découverte il y a longtemps. La lumière frappant un miroir se propage de sorte que les deux angles, entre chaque rayon et le miroir, soient égaux. Pour certaines raisons, il est habituel de mesurer ces angles à partir de la normale à la surface du miroir. Ainsi, ce qu'on appelle la loi de la réflexion s'exprime

$$\theta_i = \theta_r. \quad (26.1)$$

C'est une proposition très simple, mais le problème se complique lorsque la lumière passe d'un milieu à un autre, par exemple de l'air dans l'eau; nous voyons également ici qu'elle ne se propage pas en ligne droite. Dans l'eau le rayon est dévié par rapport à sa trajectoire dans l'air; si nous varions l'angle θ_i de sorte que le rayon soit presque vertical, l'angle de «rupture» n'est plus aussi grand. Mais si nous inclinons le rayon de lumière d'un angle important, alors l'angle de déviation devient très grand.

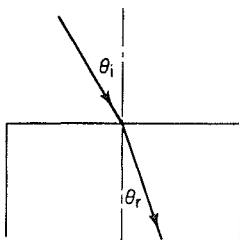


Fig. 26-2. Un rayon de lumière est réfracté lorsqu'il passe d'un milieu à un autre.

Quelle est la relation d'un angle à l'autre? Ceci a également intrigué les Anciens pendant très longtemps, et ils n'ont jamais trouvé la réponse! C'est cependant un des rares endroits dans toute la physique des Grecs où on peut trouver certains résultats expérimentaux consignés. Claudius Ptolémée dressa une liste des angles dans l'eau pour un grand nombre d'angles différents dans l'air. Le Tableau 26-1 montre les angles dans l'air, en degrés, et les angles correspondants mesurés dans l'eau. (On dit habituellement que les scientifiques grecs n'ont jamais fait d'expériences. Mais il aurait été impossible d'obtenir

Tableau 26-1

Angle dans l'air	Angle dans l'eau
10°	8°
20°	15-1/2°
30°	22-1/2°
40°	28°
50°	35°
60°	40-1/2°
70°	45°
80°	50°

Tableau 26-2

Angle dans l'air	Angle dans l'eau
10°	7-1/2°
20°	15°
30°	22°
40°	29°
50°	35°
60°	40°
70°	48°
80°	49-1/2°

ces tableaux de valeurs sans connaître la vraie loi, sinon par l'expérience. On doit cependant remarquer que ceci ne représente pas des mesures indépendantes et soigneuses pour chaque angle, mais seulement certains nombres interpolés de quelques mesures, car ils trouvent tous parfaitement leur place sur une parabole.)

Ceci est donc une des étapes importantes dans le développement d'une loi physique: d'abord nous observons un effet, ensuite nous le mesurons et nous le transcrivons dans un tableau; ensuite nous essayons de trouver une *règle* par laquelle une chose peut être reliée à une autre. Le tableau numérique ci-dessus fut réalisé en l'année 140, mais ce n'est qu'en 1621 que quelqu'un trouva finalement la loi reliant les deux angles! La règle, trouvée par Willebrord Snell, un mathématicien danois, est ce qui suit: si θ_i est l'angle dans l'air et θ_r l'angle dans l'eau, alors il apparaît que le sinus de θ_i est égal à une constante que multiplie le sinus de θ_r :

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_r. \quad (26.2)$$

Pour l'eau le nombre n est approximativement égal à 1,33. L'équation (26.2) est appelée la *loi de Snell*; elle nous permet de *prédire* comment la lumière est déviée lorsqu'elle passe de l'air dans l'eau. Le Tableau 26-2 montre les angles dans l'air et dans l'eau, d'après la loi de Snell. Remarquez le remarquable accord avec la liste de Ptolémée.

26-3 Principe de Fermat du moindre temps

Dans le développement progressif de la science, nous souhaitons obtenir davantage qu'une simple formule. Nous partons d'abord d'une observation, nous obtenons des nombres que nous mesurons, puis nous obtenons une loi qui résume tous les nombres. Mais le vrai *triomphe* de la science c'est de *pouvoir trouver une manière de penser* telle que cette loi soit *évidente*.

La première manière de penser qui rendit évidente la loi sur le comportement de la lumière fut découverte par Fermat aux environs de 1650, et elle est appelée le *principe du moindre temps* ou le *principe de Fermat*. Son idée fut la suivante: parmi toutes les trajectoires possibles que la lumière peut emprunter pour aller d'un point à un autre, la lumière choisit la trajectoire qui nécessite le temps le *plus court*.

Montrons d'abord que c'est vrai dans le cas du miroir, que ce simple principe contient à la fois la loi de propagation en ligne droite et la loi du miroir. Ainsi nous progressons dans notre compréhension! Essayons de trouver la solution

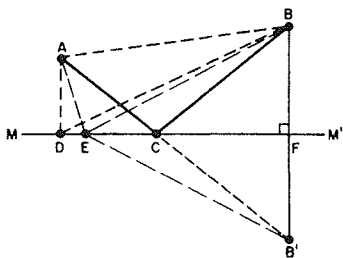


Fig. 26-3. Illustration du principe du moindre temps.

du problème suivant. Sur la Fig. 26-3 sont indiqués deux points A et B , et un miroir plan MM' . Quelle est la manière de se rendre de A en B dans le temps le plus court? La réponse est d'aller en ligne droite de A vers B ! Mais si nous ajoutons la règle supplémentaire que la lumière doit *frapper le miroir* et revienne toujours dans le temps le plus court, la réponse n'est pas aussi simple. Une manière serait d'aller aussi vite que possible au miroir et de se rendre ensuite en B , sur la trajectoire ADB . Bien sûr, nous avons alors un long parcours DB . Si nous nous déplaçons un petit peu vers la droite en E , nous augmentons légèrement la première distance, mais nous *diminuons* grandement le second, et ainsi la longueur totale de la trajectoire diminue, et du même coup le temps de parcours. Comment pouvons-nous trouver le point C pour lequel le temps soit le plus court? Nous pouvons le trouver très facilement par une astuce géométrique.

Nous construisons de l'autre côté de MM' un point artificiel B' , qui est à la même distance en dessous du plan MM' que le point B au-dessus du plan. Nous traçons ensuite la droite EB' . Puisque BFM est un angle droit et $BF = FB'$, EB est égal à EB' . Ainsi la somme des deux distances, $AE + EB$, qui est proportionnelle au temps de parcours, si la lumière se déplace avec une vitesse constante, est également la somme des deux longueurs $AE + EB'$. Le problème devient donc: quand la somme de ces deux longueurs est-elle minimum? La réponse est facile: lorsque la ligne passe par le point C sous forme d'une *ligne droite* de A à B' ! En d'autres termes, nous devons trouver le point d'où nous nous rendons vers le point artificiel, et ce point sera le point correct. Si ACB' est une ligne droite, alors l'angle BCF est égal à l'angle $B'CF$ et ainsi à l'angle ACM . Ainsi l'énoncé que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion est équivalent à l'affirmation que la lumière se rend vers le miroir d'une manière telle qu'elle retourne vers le point B' dans le *temps le plus court possible*. Originellement, Héron d'Alexandrie énonça que la lumière se déplace d'une manière telle qu'elle va vers le miroir puis vers l'autre point en empruntant la *distance* la plus courte possible, ce n'est donc pas une théorie moderne. Ce fut cela qui suggéra à Fermat que peut-être la réfraction devait opérer sur une base semblable. Mais, pour la réfraction, la lumière ne suit évidemment pas la trajectoire de plus courte *distance*, aussi Fermat eut l'idée de considérer qu'elle met le *temps* le plus court.

Avant d'analyser la réfraction, nous ferons une remarque supplémentaire concernant le miroir. Si nous avons une source de lumière au point B et qu'elle envoie de la lumière vers le miroir, alors nous voyons que la lumière qui vient en A à partir du point B vient en A exactement de la même manière que s'il y avait un objet en B' et *pas* de miroir. Bien sûr l'œil ne détecte que la lumière qui le pénètre effectivement, ainsi si nous avons un objet en B et un miroir qui fait que la lumière pénètre

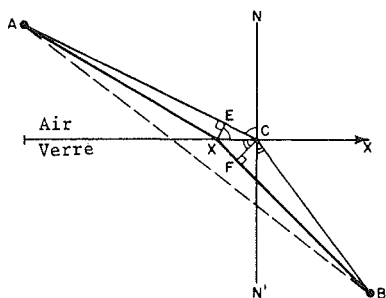


Fig. 26-4. Illustration du principe de Fermat pour la réfraction.

dans l'œil exactement de la même manière que si l'objet avait été en B' , alors le système œil-cerveau interprète ceci, en supposant qu'il n'en sache pas trop, comme *étant* un objet en B' . Ainsi l'illusion d'un objet derrière le miroir est simplement due au fait que la lumière qui pénètre l'œil entre physiquement exactement de la même manière qu'elle pénétrerait s'il y avait *eu* un objet derrière (à l'exception de la poussière sur le miroir et de notre connaissance de l'existence du miroir, etc., tout cela étant corrigé dans le cerveau).

Démontrons maintenant que le principe de moindre temps nous donne la loi de Snell de la réfraction. Nous devons cependant faire une hypothèse à propos de la vitesse de la lumière dans l'eau. Nous supposerons que la vitesse de la lumière dans l'eau est plus faible que la vitesse de la lumière dans l'air d'un certain facteur, n .

A la Fig. 26-4 notre problème est à nouveau de se rendre de A en B dans *le temps le plus court*. Pour montrer que la meilleure chose à faire est de ne pas simplement aller en ligne droite, imaginons qu'une jolie fille soit tombée d'un bateau, et qu'elle appelle au secours dans l'eau au point B . La ligne indiquée par X est la berge. Nous sommes au point A sur la terre et nous voyons l'accident, or nous savons courir et également nager. Mais nous courons plus vite que nous nageons. Que faisons-nous? Allons-nous en ligne droite? (Oui, sans aucun doute!) Cependant, en faisant preuve d'un petit peu plus d'intelligence, nous réalisons qu'il serait avantageux de parcourir une distance un petit peu plus grande sur terre afin de diminuer la distance dans l'eau, parce que nous allons tellement plus lentement dans l'eau. (Suivant cette ligne de raisonnement, nous dirions que la chose à faire serait de *calculer* très précisément ce que nous devons faire!) En tous les cas, essayons de montrer que la solution finale du problème est la trajectoire ACB , et que cette trajectoire prend le temps le plus court de tous les temps possibles. Si c'est la trajectoire la plus courte, cela signifie que si nous en prenons une autre, celle-ci sera plus longue. Si donc nous traçons le temps qu'il faut en fonction de la position du point X , nous obtiendrons une courbe comme celle de la Fig. 26-5, où le point C correspond au

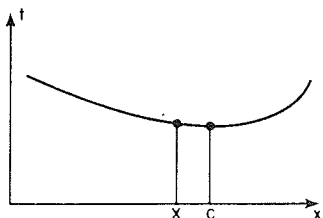


Fig. 26-5. Le temps minimum correspond au point C , mais les points voisins correspondent pratiquement au même temps.

plus court de tous les temps possibles. Ceci signifie que si nous déplaçons le point X en des points *près de* C , il n'y a en première approximation *aucun changement* du temps, parce que la pente est nulle au bas de la courbe. Ainsi notre manière de trouver la loi sera de considérer que nous déplaçons la position d'une petite quantité et de demander qu'il n'y ait essentiellement aucun changement notable du temps. (Bien sûr, il y a un changement infinitésimal du temps du *deuxième* ordre; nous devons avoir augmentation du temps pour des déplacements dans chaque direction à partir de C .) Ainsi nous considérons un point voisin X et nous calculons combien de temps il faudrait pour aller de A en B par les deux trajectoires, et comparons la nouvelle trajectoire avec l'ancienne. C'est très facile à faire. Nous voulons que la différence soit pratiquement nulle si la distance XC est petite. Considérons d'abord la trajectoire sur terre. Si nous traçons une perpendiculaire XE , nous voyons que cette trajectoire est raccourcie de la quantité EC . Disons que nous y gagnons par le fait de ne pas avoir à parcourir cette distance supplémentaire. D'un autre côté, dans l'eau, en traçant une perpendiculaire correspondante, CF , nous trouvons qu'il nous faut parcourir la distance supplémentaire XF , et c'est ce que nous perdons. Ou, en *temps*, nous gagnons le temps qu'il faudrait pour parcourir la distance EC , mais nous perdons le temps qu'il faudrait pour parcourir la distance XF . Ces temps doivent être égaux, puisqu'en première approximation il n'y a pas de variation du temps. Mais supposez que dans l'eau la vitesse soit $1/n$ fois celle dans l'air, nous devons alors avoir

$$EC = n \cdot XF. \quad (26.3)$$

Ainsi nous voyons que pour le point correct, $XC \sin EXC = n \cdot XC \sin XCF$ ou, simplifiant par la longueur de l'hypoténuse commune XC et remarquant que

$$EXC = ECN = \theta_i \quad \text{et} \quad XCF = BCN' = \theta_r,$$

nous avons

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_r. \quad (26.4)$$

Ainsi nous voyons qu'afin d'aller d'un point à un autre dans le temps minimum lorsque le rapport des vitesses est n , la lumière doit pénétrer avec un angle tel que le rapport des sinus des angles θ_i et θ_r soit le rapport des deux vitesses dans les deux milieux.

26-4 Applications du principe de Fermat

Considérons maintenant certaines conséquences intéressantes du principe du temps minimum. D'abord le principe de réciprocité. Si pour aller de A en B nous avons trouvé la trajectoire de moindre temps, alors pour aller dans la direction opposée (en supposant que la lumière se propage à la même vitesse dans toutes les directions), le temps le plus court correspondra à la même trajectoire, et de ce fait, si la lumière peut être envoyée dans un sens, elle peut également l'être dans l'autre.

Un exemple intéressant est un bloc de verre avec des faces parallèles planes, faisant un certain angle avec le faisceau lumineux. La lumière, passant au travers du bloc d'un point A à un point B (Fig. 26-6) ne la traverse pas en ligne droite, mais au lieu de cela elle diminue le temps de passage

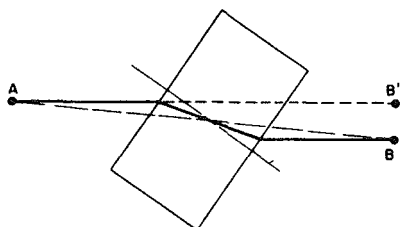


Fig. 26-6. Un faisceau de lumière est dévié lorsqu'il traverse un bloc transparent.

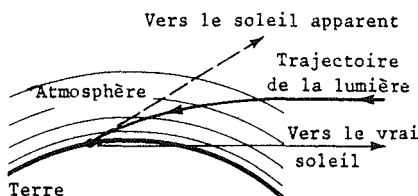


Fig. 26-7. Près de l'horizon le soleil apparent est plus élevé que le vrai soleil d'environ $1/2$ degré.

dans le verre en diminuant son inclinaison dans le bloc, bien qu'elle perde ainsi un peu de temps dans l'air. Le faisceau est simplement déplacé parallèlement à lui-même parce que les angles d'entrée et de sortie sont les mêmes.

Un troisième phénomène intéressant est le fait que lorsque nous voyons le soleil se coucher, il est déjà en dessous de l'horizon! Il ne *paraît* pas être en dessous de l'horizon, mais il l'est en réalité (Fig. 26-7). L'atmosphère de la terre est légère au sommet et dense au sol. La lumière se déplace plus lentement dans l'air qu'elle ne le fait dans le vide, et ainsi la lumière du soleil peut plus rapidement atteindre le point *S* en dessous de l'horizon si au lieu de simplement se propager en ligne droite, elle évite les régions denses où elle avance lentement, les traversant sous un angle plus important. Lorsque le soleil semble s'enfoncer derrière l'horizon, il en est en réalité déjà très en dessous. Un autre exemple de ce phénomène est le mirage que l'on voit souvent lorsqu'on conduit sur des routes très chaudes. On voit de « l'eau » sur la route, mais lorsqu'on arrive à cet endroit, c'est aussi sec qu'un désert! Le phénomène est le suivant. Ce que nous voyons en fait c'est la lumière du soleil « réfléchi » sur la route: la lumière venant du ciel, se dirigeant vers la route, peut en définitive atteindre l'œil, comme il est indiqué à la Fig. 26-8. Pourquoi? L'air est très chaud à proximité de la route mais il est plus froid un peu plus haut. L'air plus chaud est plus dilaté que l'air froid, il est donc plus léger et ceci tend à moins réduire la vitesse de la lumière. C'est-à-dire que la lumière va plus vite dans la région plus chaude que dans la région plus froide. C'est ainsi qu'au lieu que la lumière décide de venir en ligne droite, elle suit également une trajectoire de moindre temps grâce à laquelle elle pénètre dans une région où elle se propage plus vite pendant un certain temps, afin d'épargner du temps. Ainsi elle peut se propager suivant une courbe.

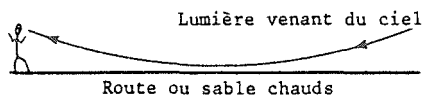


Fig. 26-8. Un mirage.

Comme autre exemple important du principe de moindre temps, supposez que nous voulions arranger les choses pour que toute la lumière qui provient d'un point *P* soit rassemblée en un autre point *P'* (Fig. 26-9). Ceci signifie bien sûr que la lumière peut se propager en ligne droite de *P* en *P'*. C'est tout à fait correct. Mais comment pouvons-nous faire en sorte qu'elle ne se propage pas simplement en ligne droite, mais que la lumière partant de *P* vers *Q* termine également en *P'*? Nous voulons ramener toute la lumière au point que nous appelons un *foyer*. Comment? Si la lumière suit toujours la trajectoire de moindre temps,

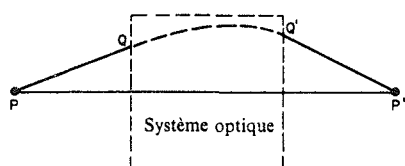


Fig. 26-9. Une « boîte noire » optique.

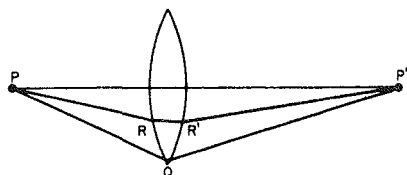


Fig. 26-10. Un système optique qui focalise.

alors certainement elle ne voudra pas emprunter toutes les trajectoires. La seule manière de satisfaire la lumière pour qu'elle emprunte ces différentes trajectoires est de rendre ces temps *exactement égaux*! Autrement, elle choisira celle de temps minimum. Ainsi le problème de fabriquer un système focalisant est simplement celui de mettre au point un appareil qui rend égal le temps que met la lumière se déplaçant sur *toutes* les trajectoires différentes!

C'est facile à faire. Supposons que nous ayons un morceau de verre dans lequel la lumière se déplace plus lentement que dans l'air (Fig. 26-10). Considérons maintenant un rayon qui suit dans l'air la trajectoire PQP' . C'est une trajectoire plus longue que le trajet direct de P en P' et elle prend évidemment un temps plus long. Mais si nous insérons un morceau de verre d'épaisseur convenable (nous verrons plus tard quelle est exactement cette épaisseur) il peut exactement compenser le temps supplémentaire que met la lumière lorsqu'elle emprunte une direction oblique! Dans ce cas, nous pouvons nous arranger pour que le temps que la lumière met pour aller en ligne droite soit le même que le temps qu'il lui faut pour suivre la trajectoire PQP' . De même si nous considérons un rayon $PRR'P'$ qui est partiellement incliné, il n'est pas aussi long que PQP' et il n'est pas nécessaire de compenser autant que pour le rayon rectiligne, mais il faut tout de même un peu compenser. Nous obtenons à la fin un morceau de verre qui ressemble à la Fig. 26-10. Avec cette forme, toute la lumière qui vient de P passe en P' . Nous connaissons bien cet appareil et nous l'appelons une *lentille* convergente. Au chapitre suivant, nous calculerons effectivement quelle forme doit avoir la lentille pour focaliser parfaitement.

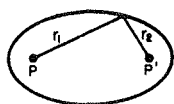


Fig. 26-11. Un miroir elliptique.

Prenez un autre exemple: supposons que nous voulions disposer certains miroirs de telle sorte que la lumière venant de P aille toujours en P' (Fig. 26-11). Pour chaque trajectoire, elle frappe un miroir et revient, et tous les temps doivent être égaux. Ici la lumière se déplace toujours dans l'air, ainsi le temps et la distance sont proportionnels. L'énoncé que tous les temps sont les mêmes est la même chose que l'énoncé que la distance totale est la même. Ainsi la somme des deux distances r_1 et r_2 doit être une constante. Une *ellipse* est la courbe qui a la propriété que la somme des distances à deux points est une constante pour chaque point sur l'ellipse; ainsi nous pouvons être sûrs que la lumière venant d'un foyer atteint l'autre.

Le même principe est encore en jeu pour essayer de rassembler la lumière venant d'une étoile. Le grand télescope de *Palomar* de 5 mètres est construit sur le principe suivant. Imaginons une étoile à des milliards de

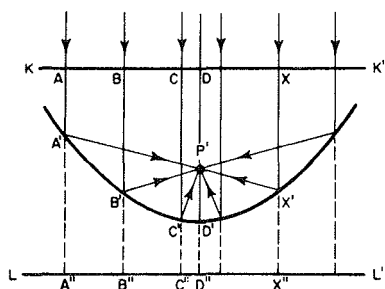


Fig. 26-12. Un miroir parabolique.

kilomètres de distance; nous voudrions faire en sorte que toute la lumière qui pénètre vienne au foyer. Bien sûr nous ne pouvons tracer les rayons sur tout leur chemin depuis l'étoile, mais nous voulons toujours vérifier si les temps sont égaux. Nous savons bien sûr que lorsque les différents rayons arrivent sur un certain plan KK' perpendiculaire aux rayons, tous les temps dans ce plan sont égaux (Fig. 26-12). Les rayons doivent donc tomber jusqu'au miroir et continuer jusqu'en P' dans des temps égaux. Nous devons donc trouver une courbe qui a la propriété que la somme des distances $XX' + X'P'$ est une constante, quel que soit l'endroit où X est choisi. Une manière facile de la trouver est de prolonger la droite XX' plus bas jusqu'au plan LL' . Si nous aménageons notre courbe de telle sorte que $A'A'' = A'P'$, $B'B'' = B'P'$, $C'C'' = C'P'$, etc., nous trouverons la bonne courbe parce que bien sûr $AA' + A'P' = AA' + A'A''$ reste constant. Ainsi notre courbe est le lieu de tous les points équidistants d'une droite et d'un point. Une telle courbe est appelée une *parabole*; le miroir est fabriqué avec la forme d'une parabole.

Les exemples précédents illustrent le principe selon lequel de tels appareils optiques peuvent être conçus. Les courbes exactes peuvent être calculées en utilisant le principe disant que pour focaliser parfaitement, le temps de parcours doit être exactement égal pour tous les rayons de lumière, et en même temps inférieur au temps pour toutes les trajectoires voisines.

Nous discuterons plus avant au chapitre suivant ces appareils d'optiques qui focalisent; continuons notre discussion sur le développement de la théorie. Lorsqu'un nouveau principe théorique est développé, tel que le principe du moindre temps, nous serions d'abord tentés de dire, « Bien, c'est très joli; c'est tout à fait remarquable; mais la question se pose: cela nous aide-t-il à comprendre la physique? » Quelqu'un peut dire, « Oui, regardez le nombre de choses que nous pouvons comprendre! » Un autre peut dire, « Très bien, mais je peux comprendre également les miroirs. Il me faut une courbe telle que chaque tangente fasse des angles égaux avec les deux rayons. Je peux dessiner également une lentille, car chaque rayon qui l'atteint doit être dévié d'un angle donné par la loi de Snell. » Évidemment l'énoncé du principe de moindre temps et l'énoncé que les angles sont égaux à la réflexion et que les sinus des angles sont proportionnels à la réfraction, sont les mêmes. Est-ce donc simplement une question de philosophie ou d'élégance? Il peut y avoir des arguments en faveur des deux aspects.

Cependant l'importance d'un principe puissant réside dans le fait qu'il *prédit de nouvelles choses*.

Il est possible de montrer que de nombreuses choses nouvelles sont prédites par le principe de Fermat. Premièrement, supposons qu'il y ait *trois* milieux, du verre, de l'eau et de l'air, que nous

réalisions une expérience de réfraction et que nous mesurons l'indice n d'un milieu par rapport à un autre. Appelons n_{12} l'indice de l'air (1) par rapport à l'eau (2); n_{13} l'indice de l'air (1) par rapport au verre (3). Si nous mesurons l'eau par rapport au verre, nous allons trouver un autre indice que nous appelons n_{23} . Mais il n'y a aucune raison *a priori* pour qu'il y ait une relation entre n_{12} , n_{13} et n_{23} . D'un autre côté, d'après l'idée du principe de moindre temps, il y a une relation bien définie. L'indice n_{12} est le rapport de deux choses, la vitesse dans l'air à la vitesse dans l'eau; n_{13} est le rapport de la vitesse dans l'air à la vitesse dans le verre; n_{23} est le rapport de la vitesse dans l'eau à la vitesse dans le verre. Ainsi nous simplifions l'air et nous obtenons

$$n_{23} = \frac{v_2}{v_3} = \frac{v_1/v_3}{v_1/v_2} = \frac{n_{13}}{n_{12}}. \quad (26.5)$$

En d'autres termes, nous *prédisons* que l'indice relatif de deux milieux nouveaux peut être obtenu à partir de l'indice de chaque milieu individuel pris chacun par rapport à l'air ou par rapport au vide. Si donc nous mesurons la vitesse de la lumière dans tous les milieux, et si nous obtenons ainsi un seul nombre pour chacun à savoir son indice relatif au vide appelé n_i (n_i est la vitesse dans l'air relative à la vitesse dans le vide, etc.), alors notre formule est simple. L'indice relatif de deux milieux i et j est

$$n_{ij} = \frac{v_i}{v_j} = \frac{n_j}{n_i}. \quad (26.6)$$

En se limitant à la loi de Snell, il n'y a aucun moyen de prédire ce genre de chose.* Et bien sûr cette prédiction est correcte. La relation (26.5) est connue depuis très longtemps, et ce fut un argument extrêmement fort en faveur du principe de moindre temps.

Un autre argument en faveur du principe de moindre temps, une autre prédiction, est que si nous *mesurons* la vitesse de la lumière dans l'eau, elle sera plus faible que dans l'air. C'est une prédiction d'un type complètement différent. C'est une prédiction brillante, parce que tout ce que nous avons mesuré jusqu'à présent se limite à des *angles*; ici nous avons une prédiction théorique qui est tout à fait différente des observations à partir desquelles Fermat déduisit l'idée du temps minimum. Il apparaît en fait que la vitesse dans l'eau *est* plus faible que la vitesse dans l'air, exactement dans le rapport nécessaire pour obtenir l'indice correct!

26-5 Un énoncé plus précis du principe de Fermat

Nous devons en réalité rendre un petit peu plus précis l'énoncé du principe de moindre temps. Il n'a pas été énoncé correctement jusqu'à présent. Il est *incorrectement* appelé le principe de moindre temps et nous avons progressé avec cette description incorrecte pour des raisons de commodité, mais nous devons maintenant voir quel est l'énoncé correct. Supposez que nous ayons un miroir comme il est indiqué sur la Fig. (26-3). Qu'est-ce qui dit à la lumière qu'elle doit se rendre au miroir? La trajectoire de *plus court* temps est manifestement AB . Ainsi certaines personnes peuvent dire, « Quelquefois c'est un

* Bien qu'on puisse déduire si on fait l'hypothèse supplémentaire qu'ajouter une couche d'une substance à la surface d'une autre ne change pas l'angle final de réfraction dans la substance recouverte.

temps maximum.» Ce n'est *pas* un temps maximum, parce qu'une trajectoire courbe prendrait certainement un temps encore plus long! L'énoncé correct est le suivant: un rayon suivant une trajectoire particulière a la propriété que si nous effectuons de n'importe quelle manière un petit changement (disons un déplacement de un pour cent) du rayon, par exemple à l'endroit auquel il atteint le miroir, ou de la forme de la courbe, ou tout autre chose, il n'y aura *pas* de variation du temps au premier ordre; la modification du temps sera seulement du *second* ordre. En d'autres termes, le principe dit que la lumière suit une trajectoire telle qu'il y a beaucoup d'autres trajectoires voisines qui prennent presque exactement le *même* temps.

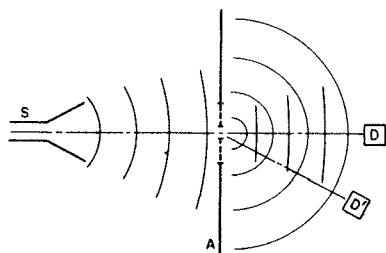


Fig. 26-13. Le passage d'une onde radio au travers d'une fente étroite.

Voici une autre difficulté du principe de moindre temps, difficulté que les gens qui n'aiment pas ce genre de théorie ne peuvent pas avaler. Avec la théorie de Snell nous pouvons «comprendre» la lumière. La lumière se déplace, elle voit une surface, elle dévie parce qu'elle fait quelque chose à la surface. L'idée de causalité — elle va d'un point à un autre et un autre, etc. — est facile à comprendre. Mais le principe de moindre temps est un principe philosophique complètement différent concernant la manière dont la nature fonctionne. Au lieu de dire que c'est une situation causale, que lorsque nous faisons une chose, quelque chose d'autre se passe, etc., il dit ceci: nous établissons une situation et la lumière décide quel est le temps le plus court ou le temps extrême et choisit cette trajectoire. Mais *que* fait-elle, *comment* trouve-t-elle cela? Est-ce qu'elle essaye de *sentir* les trajectoires voisines et de les comparer les unes par rapport aux autres? La réponse est oui, en un sens elle le fait. C'est la caractéristique qui bien sûr est inconnue en optique géométrique, et qui est incorporée dans la notion de *longueur d'onde*; la longueur d'onde nous dit approximativement à quelle distance la lumière doit «sentir» la trajectoire afin de l'examiner. Il est difficile de démontrer ce fait à grande échelle avec la lumière, parce que les longueurs d'ondes sont terriblement petites. Mais avec des ondes de radio, par exemple, des ondes de 3 cm, les distances sur lesquelles les ondes de radio examinent leur chemin sont plus grandes. Si nous avons une source d'ondes de radio, un détecteur et une fente comme c'est le cas à la Fig. 26-13, les rayons vont bien sûr de S en D parce que c'est une ligne droite, et si nous diminuons la fente, c'est correct, ils y vont toujours. Si maintenant nous déplaçons le détecteur de côté en D' les ondes ne se rendront pas au travers de la fente large de S en D', parce qu'elles examinent différentes trajectoires aux environs et disent, «Non, mon ami, toutes celles-là correspondent à des temps différents.» D'un autre côté, si nous *empêchons* l'onde d'examiner les trajectoires en diminuant la fente jusqu'à une toute petite ouverture, il n'y a plus alors qu'une seule trajectoire possible et le rayonnement l'emprunte! Avec une fente étroite, le rayonnement qui atteint D' est plus grand qu'avec une fente large!

On peut faire la même chose avec la lumière, mais c'est difficile à démontrer sur une grande échelle. L'effet peut être observé avec les conditions simples suivantes. Prenez une petite ampoule brillante, par exemple une ampoule non dépolie d'un lampadaire de rue très éloigné ou la réflexion du soleil sur un pare-chocs d'automobile incurvé. Puis placez deux doigts devant votre œil de telle sorte que vous puissiez regarder au travers de la fente et « serrez » très doucement la lumière jusqu'à zéro. Vous verrez que l'image de la lumière qui était un petit point auparavant devient allongée, et s'étend même sur une longue distance. La raison est que les doigts sont très proches l'un de l'autre, et que la lumière qui est supposée venir en ligne droite, est dispersée dans un grand angle, de telle sorte que lorsqu'elle atteint l'œil, elle y pénètre venant de différentes directions. Vous remarquerez également, si vous êtes attentifs, des maxima latéraux et un ensemble de franges sur les bords. De plus, l'ensemble est coloré. Tout ceci sera expliqué en temps voulu, mais pour le présent c'est une démonstration que la lumière ne se propage pas toujours en ligne droite, et cette démonstration peut être très facilement réalisée.

26-6 Comment cela fonctionne-t-il?

Pour terminer, nous donnons une vue très approchée de ce qui se passe réellement, de la manière dont tout cela fonctionne réellement, à partir de ce que nous pensons être maintenant un point de vue de mécanique quantique correct et précis, mais que nous ne décrirons que qualitativement. En suivant la lumière de A en B à la Fig. 26-3, nous trouvons que la lumière ne semble pas du tout avoir la forme d'une onde. Au contraire, les rayons semblent être formés de photons et ils produisent effectivement des clics dans un compteur de photons, si nous en utilisons un. La brillance de la lumière est proportionnelle au nombre moyen de photons qui pénètrent par seconde, et ce que nous calculons est la *probabilité* qu'un photon aille de A en B , par exemple en frappant le miroir. La *loi* de cette *probabilité* est très étrange. Prenez n'importe quelle trajectoire et trouvez le temps correspondant à cette trajectoire; ensuite fabriquez un nombre complexe ou tracez un petit vecteur complexe, $pe^{i\theta}$, dont l'angle θ est proportionnel au temps. Le nombre de tours par seconde est la fréquence de la lumière. Prenez une autre trajectoire; elle a, par exemple, un temps différent, ainsi son vecteur est tourné d'un angle différent – l'angle étant toujours proportionnel au temps. Prenez *toutes* les trajectoires disponibles et ajoutez un petit vecteur pour chacune d'entre elles; alors la réponse est que la probabilité d'arrivée du photon est proportionnelle au carré de la longueur du vecteur final allant du début jusqu'à la fin!

Montrons que ceci implique le principe du moindre temps pour un miroir. Nous considérons tous les rayons, toutes les trajectoires possibles ADB , AEB , ACB , etc., de la Fig. 26-3. La trajectoire ADB apporte une petite contribution, mais la trajectoire suivante, AEB , prend un temps assez différent, de telle sorte que son angle θ est assez différent. Disons que le point C correspond au temps minimum pour lequel, si nous changeons la trajectoire, le temps ne change pas. Ainsi les temps varient pendant un moment, puis ils varient de moins en moins lorsque nous nous rapprochons du point C (Fig. 26-14). Ainsi les flèches que nous ajoutons ont pratiquement toutes

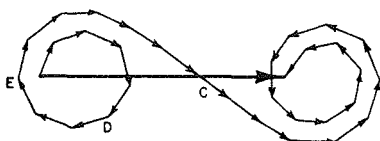


Fig. 26-14. L'addition des amplitudes de probabilité pour de nombreuses trajectoires voisines.

la même direction aux environs de C , et ensuite graduellement le temps se remet à augmenter et les phases tournent dans l'autre sens, etc. Finalement nous avons un nœud très serré. La probabilité totale est le carré de la distance entre les deux extrémités. *L'essentiel de cette probabilité est concentrée dans la région où toutes les flèches ont la même direction* (ou ont la même phase). Toutes les contributions des trajectoires qui ont des temps très *différents* lorsque nous changeons la trajectoire, s'annulent d'elles-mêmes en pointant dans des directions différentes. C'est pourquoi, si nous cachons les parties extrêmes du miroir, il réfléchit presque exactement de la même manière, parce que tout ce que nous avons fait revient à éliminer un morceau de diagramme à l'intérieur des extrémités en spirales, et ceci ne produit qu'un très petit changement de lumière. Voilà donc la relation entre la description finale des photons avec une probabilité d'arrivée fonction d'une accumulation de flèches et le principe du moindre temps.

Optique géométrique

27-1 Introduction	27-4 Grandissement
27-2 Distance focale d'une surface sphérique	27-5 Lentilles composées
27-3 Distance focale d'une lentille	27-6 Aberrations
	27-7 Pouvoir de résolution

27-1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons traiter quelques applications élémentaires des idées du chapitre précédent pour un certain nombre de systèmes pratiques, en utilisant l'approximation appelée *optique géométrique*. C'est une approximation extrêmement utile dans la conception pratique de nombreux instruments et systèmes optiques. L'optique géométrique est soit très simple ou sinon très compliquée. Par là, nous voulons dire que nous pouvons l'étudier superficiellement, de telle sorte que nous puissions approximativement concevoir des instruments à l'aide de règles qui sont si simples qu'il n'est guère nécessaire de les introduire ici, puisqu'elles sont pratiquement du niveau de l'enseignement secondaire, sinon, si nous voulons vraiment connaître les petits défauts des lentilles et les détails du même genre, le sujet devient si compliqué qu'il est trop difficile pour qu'on puisse en parler ici ! Si quelqu'un se pose un problème réel, détaillé, concernant la conception d'une lentille en tenant compte du calcul des aberrations, alors nous lui conseillons de se reporter à des livres sur la question ou sinon de simplement tracer les rayons traversant les différentes surfaces (ce que le livre lui dira de faire), en utilisant la loi de réfraction à chaque traversée, pour voir où ils sortent et s'ils forment une image satisfaisante. Des gens ont dit que c'était trop fastidieux, mais aujourd'hui, avec les machines à calculer, c'est la bonne manière de procéder. On peut poser le problème très facilement et faire le calcul pour un rayon après l'autre. Ainsi le sujet est en définitive réellement très simple et ne contient pas de principes nouveaux. De plus il se trouve que les règles de l'optique à un niveau élémentaire ou avancé sont rarement caractéristiques d'autres domaines, de telle sorte qu'il n'y a pas de raison particulière de s'intéresser davantage au sujet, à une exception importante près.

La théorie la plus élaborée et abstraite de l'optique géométrique fut mise au point par Hamilton, et il se trouve qu'elle a des applications extrêmement importantes en mécanique. C'est en réalité encore plus important en mécanique qu'en optique, et de ce fait nous laissons la théorie de Hamilton comme sujet pour la mécanique analytique avancée, qui est étudiée en fin de maîtrise ou en troisième cycle. Ayant ainsi reconnu que l'optique géométrique contribue à très peu d'autres choses que son propre développement, nous allons maintenant

décrire les propriétés élémentaires des systèmes optiques simples sur la base des principes énoncés au chapitre précédent.

Afin de progresser, il nous faut une formule géométrique qui est la suivante : soit un triangle de petite hauteur h et de grande base d , la diagonale s (il nous la faudra pour trouver la différence de temps entre deux chemins différents) est plus longue que la base (Fig. 27-1). De combien ? La différence $\Delta = s - d$ peut être évaluée de différentes manières. En voici une. Nous voyons que $s^2 - d^2 = h^2$, ou $(s - d)(s + d) = h^2$. Mais $s - d = \Delta$, et $s + d \sim 2s$. Ainsi

$$\Delta \sim h^2/2s. \quad (27.1)$$

C'est tout ce qu'il nous faut en géométrie pour parler de la formation des images par des surfaces courbes !

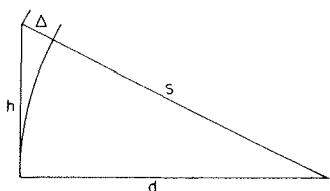


Fig. 27-1.

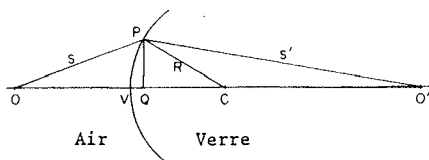


Fig. 27-2. Focaliser avec une simple surface réfringente.

27-2 Distance focale d'une surface sphérique

La configuration la plus simple et celle que nous allons traiter d'abord consiste en une surface réfringente unique, séparant deux milieux avec des indices de réfractions différents (Fig. 27-2). Nous laissons à l'étudiant le cas des indices de réfraction quelconques parce que les *idées* sont toujours les choses les plus importantes et non les cas particuliers, et que le problème est facile à résoudre dans tous les cas. Nous supposons donc que sur la gauche la vitesse est 1 et que sur la droite elle est $1/n$, où n est l'indice de réfraction. La lumière se déplace plus lentement dans le verre d'un facteur n .

Supposons que nous ayons un point en O à une distance s de la surface avant du verre et un autre point O' à une distance s' à l'intérieur du verre, et que nous voulions dessiner la surface d'une manière telle que chaque rayon issu de O qui rencontre la surface en n'importe quel point P soit dévié pour passer en O' . Pour ce faire, nous devons donner à la surface une forme telle que le temps qu'il faut à la lumière pour aller de O en P , c'est-à-dire la distance OP divisée par la vitesse de la lumière (la vitesse est ici l'unité), plus $n \cdot O'P$, qui est le temps qu'il faut pour aller de P à O' soit égal à une constante, indépendante du point P . Cette condition nous fournit une équation pour déterminer la surface. Cette surface est une surface courbe extrêmement compliquée du quatrième degré, et l'étudiant peut s'exercer à la calculer par la géométrie analytique. On peut essayer plus simplement un cas particulier qui correspond à $s \rightarrow \infty$, parce que la courbe est alors une courbe du second degré et elle est plus facilement reconnaissable. Il est intéressant de comparer cette courbe avec la courbe parabolique que nous avons trouvée pour un miroir focal lorsque la lumière vient de l'infini.

Ainsi la surface correcte pour focaliser la lumière d'un point à un autre n'est pas facile à réaliser, il faut une surface assez compliquée. Il apparaît en pratique que nous n'essayons pas de fabriquer des surfaces aussi compliquées, mais que nous réalisons au lieu de cela un compromis. Au lieu d'essayer d'obtenir que *tous* les rayons atteignent le foyer, nous nous arrangerons pour que seulement les rayons très proches de l'axe OO' parviennent au foyer. Les plus éloignés peuvent malheureusement s'écarter s'ils le désirent, car la surface idéale est compliquée et nous utilisons à sa place une surface sphérique ayant la bonne courbure sur l'axe. Il est tellement plus facile de fabriquer une sphère que ça vaut la peine de trouver ce que devient un rayon frappant une surface sphérique, en supposant que seuls les rayons près de l'axe seront parfaitement focalisés. Ces rayons qui sont près de l'axe sont quelquefois appelés des *rayons paraxiaux* et nous calculons les conditions de focalisation des rayons paraxiaux. Nous discuterons plus tard les erreurs qui sont introduites du fait que tous les rayons ne sont pas toujours proches de l'axe.

Ainsi, supposant que P soit proche de l'axe, nous abaissons une perpendiculaire PQ telle que la hauteur PQ soit h . Nous imaginons juste un instant que la surface est un plan passant par P . Dans ce cas, le temps nécessaire pour aller de O en P sera plus grand que le temps pour aller de O en Q et, de même, le temps pour aller de P en O' sera plus grand que le temps pour aller de Q en O' . Mais c'est la raison pour laquelle le verre doit être courbe, car l'excédent total de temps doit être compensé par le retard obtenu en passant de V en Q ! Le temps *en excès* le long du chemin OP est $h^2/2s$, et le temps supplémentaire sur l'autre chemin est $nh^2/2s'$. Ces excédents de temps doivent être compensés par le retard obtenu en se déplaçant le long de VQ , retard différent de ce qu'il aurait été dans le vide, à cause du milieu présent. En d'autres termes, le temps pour aller de V en Q n'est pas celui d'un trajet en ligne droite dans l'air, mais il est plus grand d'un facteur n de telle sorte que le retard sur cette distance est alors $(n - 1)VQ$. Quelle est la valeur de VQ ? Si le point C est le centre de la sphère et si son rayon est R , nous voyons par la même formule que la distance VQ est égale à $h^2/2R$. Nous découvrons donc que la loi qui relie les distances s et s' et qui nous donne le rayon de courbure R de la surface dont nous avons besoin, est

$$(h^2/2s) + (nh^2/2s') = (n - 1)h^2/2R \quad (27.2)$$

ou

$$(1/s) + (n/s') = (n - 1)/R. \quad (27.3)$$

Si nous avons deux positions O et O' , et que nous voulions focaliser la lumière venant de O en O' , nous pouvons alors calculer, grâce à cette formule, quel doit être le rayon de courbure R de la surface.

Il est intéressant de remarquer que la même lentille avec la même courbure R , va focaliser pour d'autres distances, à savoir pour tout couple de distances telles que la somme de leurs inverses dont l'un est multiplié par n , soit une constante. Ainsi une lentille donnée va (aussi longtemps que nous nous limitons aux rayons paraxiaux) focaliser non seulement de O en O' , mais pour un nombre infini d'autres couples de points aussi longtemps que ces couples de points satisfont la relation telle que $1/s + n/s'$ soit une constante, caractéristique de la lentille.

En particulier un cas intéressant est celui pour lequel $s \rightarrow \infty$. Nous pouvons voir à partir de la formule que lorsqu'un des s augmente, l'autre diminue. En d'autres termes si le point O

s'éloigne le point O' se rapproche, et vice versa. Lorsque le point O se déplace vers l'infini, le point O' continue de se rapprocher jusqu'à ce qu'il atteigne une certaine distance appelée la *distance focale* f' , à l'intérieur du verre. Si les rayons incidents sont parallèles ils vont rencontrer l'axe à une distance f' . Nous pouvons également imaginer cela en sens inverse. (Rappelez-vous la règle de réciprocité: si la lumière va de O en O' , elle va également de O' en O .) Si donc nous avons une source de lumière à l'intérieur du verre, nous pourrions souhaiter savoir où se trouve le foyer. En particulier, si la lumière dans le verre était à l'infini (même problème) où se focaliserait-elle à l'extérieur? Cette distance est appelée f . Nous pouvons le dire également d'une autre manière. Si nous avons une source de lumière en f , et que la lumière pénètre dans le verre au travers de la surface, elle continuerait de se déplacer comme un faisceau parallèle. Nous pouvons facilement trouver ce que sont f et f' .

$$n/f' = (n - 1)/R \quad \text{ou} \quad f' = Rn/(n - 1), \quad (27.4)$$

$$1/f = (n - 1)/R \quad \text{ou} \quad f = R/(n - 1). \quad (27.5)$$

Nous remarquons une chose intéressante: en divisant chaque distance focale par l'indice correspondant nous obtenons le même résultat! Ce théorème est en fait général. Il est vrai pour n'importe quel système de lentilles, quelle que soit sa complication, il vaut donc la peine d'être retenu. Nous n'avons pas prouvé ici qu'il était général – nous l'avons simplement remarqué dans le cas d'une seule surface, mais il se trouve qu'en général les deux distances focales d'un système sont ainsi reliées. Quelquefois l'équation (27.3) est écrite sous la forme

$$1/s + n/s' = 1/f. \quad (27.6)$$

Elle est plus utile que (27.3) car nous pouvons mesurer f plus facilement que nous ne pouvons mesurer la courbure et l'indice de réfraction de la lentille: si nous ne sommes pas intéressés par la conception d'une lentille ou de savoir comment on l'a fabriquée, mais simplement que nous la sortions d'une boîte, la quantité intéressante est f et non le n , le 1 ou le R !

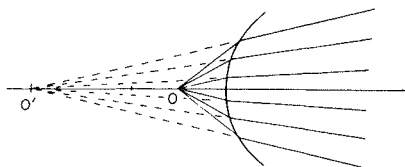


Fig. 27-3. Une image virtuelle.

Quelque chose d'intéressant apparaît quand s devient inférieur à f . Que se passe-t-il alors? Si $s < f$, alors $(1/s) > (1/f)$ et de ce fait s' est négatif; notre équation dit que la lumière ne se focalisera que pour une valeur négative de s' , si ça veut dire quelque chose! Cela signifie quelque chose de très intéressant et de tout à fait défini. La formule est toujours valable, en d'autres termes, même lorsque les nombres sont négatifs. Ce que cela signifie est indiqué sur la Fig. 27-3. Si nous traçons les rayons qui divergent à partir de O , ils vont être, il est vrai, déviés à la surface et ils ne passeront pas par un foyer, car O est si proche que ces rayons sortants sont « au-delà du parallélisme ». Cependant ils divergent comme s'ils provenaient d'un point O' à l'extérieur du verre. Ceci est une image apparente, quelquefois appelée *image virtuelle*. L'image O' à la Fig. 27-2 est appelée une *image réelle*. Si la lumière passe réellement par

un point, c'est une image réelle. Si la lumière *semble* venir d'un point, un point fictif différent du point initial, c'est une image virtuelle. Ainsi lorsque s' est négatif, cela signifie que O' est de l'autre côté de la surface et tout est donc clair.

Considérons le cas intéressant où R est égal à l'infini; nous avons alors $(1/s) + (n/s') = 0$. En d'autres termes, $s' = -ns$, ce qui signifie que si nous regardons depuis un milieu dense vers un milieu raréfié et voyons un point dans le milieu raréfié, il nous apparaît plus profond d'un facteur n . Nous pouvons de la même manière utiliser la même équation en sens inverse, de telle sorte que si nous regardons au travers d'une surface plane un objet qui se trouve à une certaine distance à l'intérieur d'un milieu dense, il nous apparaît comme si la lumière provenait d'un point qui ne soit pas aussi loin (Fig. 27-4). Lorsque nous considérons le fond d'une piscine vue du dessus, il apparaît moins profond qu'en réalité d'un facteur $3/4$, qui est l'inverse de l'indice de réfraction de l'eau.

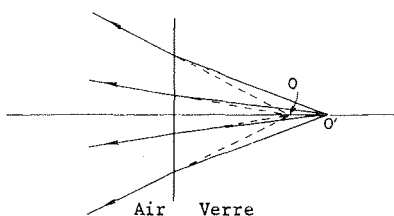


Fig. 27-4. Une surface plane fait provenir la lumière de O' , au lieu de O .

Nous pourrions continuer, bien sûr, en traitant le cas du miroir sphérique. Mais si quelqu'un saisit quelles sont les notions en cause, il doit être capable de résoudre cela pour lui-même. Nous laissons donc à l'étudiant le soin de trouver les formules pour les miroirs sphériques, mais nous mentionnons qu'il est bon d'adopter certaines conventions concernant les distances :

- (1) La distance s à l'objet est positive si le point O est à gauche de la surface.
- (2) La distance s' à l'image est positive si le point O' est à droite de la surface.
- (3) Le rayon de courbure de la surface est positif si le centre est à droite de la surface.

Sur la Fig. 27-2, par exemple, s , s' et R sont tous positifs; sur la Fig. 27.3 s et R sont positifs, mais s' est négatif. Si nous avons utilisé une surface concave, notre formule (27.3) donnerait encore un résultat correct en rendant simplement R négatif.

En déterminant la formule correspondante pour un miroir, en utilisant les conventions ci-dessus, vous trouvez que si vous faites $n = -1$ dans la formule (27.3) (comme si la substance derrière le miroir avait un indice -1), vous faites alors apparaître la formule correcte pour un miroir!

Bien que la démonstration de la formule (27.3) soit simple et élégante, car elle utilise le moindre temps, on peut, bien sûr, trouver la même formule en utilisant la loi de Snell, si l'on se souvient que les angles sont si petits que les sinus des angles correspondants peuvent être remplacés par les angles eux-mêmes.

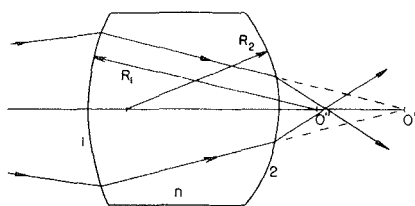


Fig. 27-5. Formation d'une image par une lentille à deux faces.

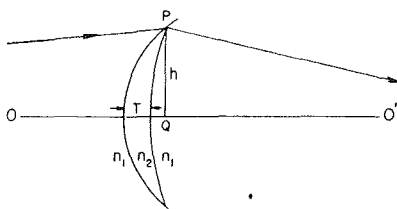


Fig. 27-6. Une lentille mince avec deux rayons positifs.

27-3 Distance focale d'une lentille

Nous allons maintenant considérer une autre configuration très concrète. La plupart des lentilles que nous utilisons ont deux surfaces, et non une seule. Comment ceci modifie-t-il le problème? Supposons que nous ayons deux surfaces de différentes courbures, avec du verre remplissant l'espace entre elles (Fig. 27-5). Nous voulons étudier le problème de focaliser d'un point O en un autre point O' . Comment pouvons-nous y parvenir? La réponse est ceci: Premièrement, utilisons la formule (27.3) pour la première surface, oubliant la seconde surface. Ceci va nous dire que la lumière qui divergeait de O va sembler converger ou diverger, selon le signe, vers un autre point, par exemple O'' . Puis nous considérons un nouveau problème. Nous avons une surface différente entre le verre et l'air, pour lequel les rayons convergent vers un certain point O' . Où vont-ils converger en réalité? Nous utilisons la même formule que précédemment! Nous trouvons qu'ils convergent en O' . Si nécessaire, nous pourrions ainsi traverser 75 surfaces en utilisant simplement la même formule au fur et à mesure!

Il y a certaines formules excellentes qui nous épargneraient une énergie considérable dans les quelques rares fois de nos vies où nous pourrions avoir à suivre la lumière au travers de cinq surfaces, mais il est plus facile de la suivre au fur et mesure à travers les cinq surfaces, lorsque le problème se pose effectivement, que de se souvenir d'une quantité de formules, car il serait bien possible que nous n'ayons même jamais à suivre la lumière au travers d'une seule surface!

Dans tous les cas, le principe est que lorsque nous traversons une surface, nous trouvons une nouvelle position, un nouveau point focal et nous prenons alors ce point comme un point de départ pour la surface suivante, etc. Pour le faire effectivement, et puisqu'à la deuxième surface nous allons de n à 1, plutôt que de 1 vers n , et que dans de nombreux systèmes il y a plusieurs types de verre avec les indices n_1, n_2 , etc., il nous faut une généralisation de la formule (27.3) au cas de deux indices différents n_1 et n_2 , au lieu de n seulement. Alors il n'est pas difficile de prouver que la forme générale de (27.3) est

$$(n_1/s) + (n_2/s') = (n_2 - n_1)/R. \quad (27.7)$$

Un cas spécial particulièrement simple est celui pour lequel les deux surfaces sont très proches l'une de l'autre – si proches que nous pouvons ignorer les petites erreurs dues à l'épaisseur. Si nous traçons la lentille comme indiqué sur la Fig. 27-6, nous pouvons poser cette question: Comment la lentille doit-elle être construite de telle sorte qu'elle puisse focaliser la lumière venant de O en O' ? Supposons que la lumière arrive exactement à

l'extrémité de la lentille, au point P . Alors le temps en excès pour aller de O en O' est $(n_1 h^2/2s) + (n_1 h^2/2s')$, ignorant pour un moment la présence de l'épaisseur T du verre d'indice n_2 . Pour rendre le temps de la trajectoire directe égal à celui de la trajectoire OPO' , il nous faut utiliser un morceau de verre dont l'épaisseur T au centre est telle que le retard introduit en traversant cette épaisseur soit suffisant pour compenser le surcroît précédent. De ce fait, l'épaisseur de la lentille au centre doit être donnée par la relation

$$(n_1 h^2/2s) + (n_1 h^2/2s') = (n_2 - n_1)T. \quad (27.8)$$

Nous pouvons également exprimer T en fonction des rayons R_1 et R_2 des deux surfaces. En prenant garde à nos conventions (3), nous trouvons donc, pour $R_1 < R_2$ (une lentille convexe)

$$T = (h^2/2R_1) - (h^2/2R_2). \quad (27.9)$$

Finalement nous obtenons

$$(n_1/s) + (n_1/s') = (n_2 - n_1)(1/R_1 - 1/R_2). \quad (27.10)$$

Nous remarquons à nouveau que si l'un des points est à l'infini, l'autre sera en un point que nous appelons la distance focale f . La distance focale f est donnée par

$$1/f = (n - 1)(1/R_1 - 1/R_2), \quad (27.11)$$

où $n = n_2/n_1$.

Si nous considérons maintenant le cas opposé où s tend vers l'infini, nous voyons que s' se trouve à la distance focale f' . Cette fois-ci les distances focales sont égales. (C'est un autre cas particulier de la règle générale selon laquelle le rapport de deux distances focales est égal au rapport des indices de réfraction dans les deux milieux dans lesquels les rayons sont focalisés. Dans ce système optique particulier, les indices initial et final sont les mêmes, et il en est donc de même des deux distances focales.)

Oubliant pour un moment la formule réelle de la distance focale, si nous achetons une lentille que quelqu'un a fabriqué avec certains rayons de courbure et un certain indice, nous pouvons mesurer la distance focale en voyant par exemple où se focalise un point à l'infini. Une fois que nous avons obtenu la distance focale, il est préférable d'écrire notre équation de la distance focale directement, et la formule est alors

$$(1/s) + (1/s') = 1/f. \quad (27.12)$$

Voyons maintenant comment la formule fonctionne et ce qu'elle implique dans différentes circonstances. Premièrement elle implique que si s ou s' est infini, l'autre terme est égal à f . Cela signifie que la lumière parallèle est focalisée à une distance f et ceci, en effet, *définit* f . Ce qu'elle dit d'autre est que les deux points se déplacent dans la même direction. Si l'un se déplace vers la droite, l'autre le fait également. Elle dit encore que s et s' sont égaux s'ils sont tous les deux égaux à $2f$. En d'autres termes si nous voulons une situation symétrique, nous trouvons qu'ils focaliseront tous les deux à la distance $2f$.

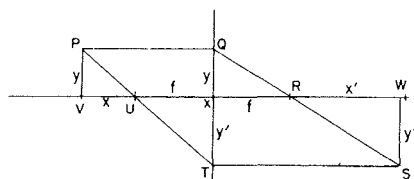


Fig. 27-7. La géométrie de la formation d'une image par une lentille mince.

27-4 Grandissement

Jusqu'à présent nous n'avons traité le problème de la focalisation que pour des points sur l'axe. Examinons maintenant la formation des images d'objets qui ne soient pas exactement sur l'axe, mais un petit peu à l'écart, de telle sorte que nous puissions comprendre les propriétés d'*agrandissement*. Lorsque nous plaçons une lentille de telle sorte qu'elle focalise la lumière d'un petit filament sur un « point » de l'écran, nous remarquons que sur l'écran nous obtenons une « image » du même filament, avec ceci de différent que sa taille est plus grande ou plus petite que celle du véritable filament. Ceci implique que la lumière focalise pour *chaque point* du filament. Afin de comprendre ceci un peu mieux, essayons d'analyser le système constitué d'une lentille mince montré schématiquement sur la Fig. 27-7. Nous connaissons les faits suivants :

- (1) Tout rayon qui arrive d'un côté, parallèle, continue de l'autre côté vers un point particulier appelé le foyer, à une distance f de la lentille.
- (2) Tout rayon qui arrive à la lentille venant du foyer sort parallèle à l'axe de l'autre côté.

C'est tout ce dont nous avons besoin pour établir la formule (27.12) par la géométrie : Supposez que nous ayons un objet à une certaine distance x du foyer ; soit y la hauteur de cet objet. Alors nous savons que l'un des rayons, à savoir PQ , sera dévié de manière à passer par le foyer R de l'autre côté. Si jamais la lentille donne une image du point P , nous pouvons trouver où, en cherchant simplement comment deux rayons se propagent, parce que l'image se trouvera à l'endroit de leur intersection. Il suffit de trouver de façon astucieuse la direction exacte d'un *seul* rayon. Mais nous nous souvenons qu'un rayon parallèle sort vers le foyer et *vice versa* : un rayon qui passe par le foyer sortira parallèle ! Aussi nous traçons le rayon PT passant par U . (Il est vrai que les rayons réels qui réalisent la focalisation peuvent être beaucoup plus limités que ces deux rayons que nous avons tracés, mais ils sont plus difficiles à représenter, et nous faisons comme si nous pouvions tracer ces rayons.) Puisqu'il sort parallèle, nous traçons TS parallèle à XW . L'intersection S est le point dont nous avons besoin. Ceci détermine l'endroit et la hauteur corrects. Appelons y' la hauteur et x' la distance au foyer. Nous pouvons alors trouver une formule pour la lentille. Utilisant les triangles semblables PVU et $T XU$, nous trouvons

$$\frac{y'}{f} = \frac{y}{x}. \quad (27.13)$$

D'une manière semblable, avec les triangles SWR et QXR , nous obtenons

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{f}. \quad (27.14)$$

Résolvant ces équations pour y'/y , nous trouvons que

$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{f} = \frac{f}{x}. \quad (27.15)$$

L'équation (27.15) est la fameuse formule des lentilles; dans cette formule il y a tout ce que nous devons savoir sur les lentilles: cela nous donne le grandissement y'/y , en fonction des distances et des distances focales. Elle relie également les deux distances x et x' à f :

$$xx' = f^2, \quad (27.16)$$

qui est une formule bien plus simple à utiliser que l'équation (27.12). Nous laissons à l'étudiant le soin de démontrer que si nous appelons $s = x + f$ et $s' = x' + f$, l'équation (27.12) est la même que l'équation (27.16).

27-5 Lentilles composées

Sans donner les démonstrations, nous allons décrire brièvement les résultats généraux que l'on obtient dans le cas de plusieurs lentilles. Si nous avons un système de plusieurs lentilles, comment pouvons-nous l'étudier? C'est facile. Nous partons avec un certain objet et calculons où se trouve son image dans la première lentille, utilisant les formules (27.16) ou (27.12) ou toute autre formule équivalente, ou encore en traçant des diagrammes. Nous trouvons ainsi une image. Nous traitons ensuite cette image comme étant une source pour la lentille suivante, et utilisons la seconde lentille avec la donnée de sa longueur focale pour à nouveau trouver une image. Nous continuons l'opération au travers de la succession des lentilles. C'est tout. Cela ne contient rien de nouveau en principe, aussi nous n'irons pas plus loin. Il y a, cependant, un résultat global extrêmement intéressant résumant les effets de n'importe quelle série de lentilles sur un rayon lumineux qui commence et finit dans le même milieu, par exemple l'air. Tout instrument d'optique – un télescope ou un microscope avec n'importe quel nombre de lentilles et de miroirs – a la propriété suivante: Il existe deux plans appelés les *plans principaux* du système (ces plans sont souvent très proches de la première surface de la première lentille et de la dernière surface de la dernière lentille), qui ont les propriétés suivantes: (1) Si la lumière pénètre d'un côté dans le système, parallèlement, elle sort du système en passant par un foyer, à une distance du second plan principal égale à la distance focale, exactement comme si le système était une lentille mince située dans ce plan. (2) Si la lumière parallèle se propage dans l'autre sens, elle passe par un foyer à la même distance f du *premier* plan principal, comme à nouveau s'il y avait eu une lentille mince située à cet endroit. (Voir Fig. 27-8.)

Bien sûr si nous mesurons les distances x et x' , y et y' comme précédemment, la formule (27.16) que nous avons écrite pour la lentille mince est absolument générale,

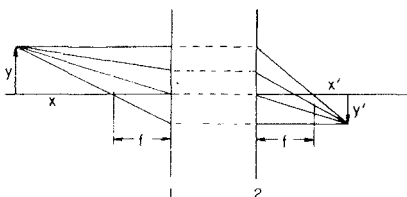


Fig. 27-8. Illustration des plans principaux d'un système optique.

pourvu que nous mesurions la distance focale à partir des plans principaux et non du centre de la lentille. Il se trouve que pour une lentille mince les plans principaux coïncident. C'est tout à fait comme si nous pouvions prendre une lentille mince, la couper en son milieu, séparer les parties et ne pas remarquer cette séparation. Chaque rayon qui pénètre sort immédiatement de l'autre côté du second plan, au point équivalent à celui où il a rencontré le premier plan ! Les plans principaux et la longueur focale peuvent être trouvés soit par l'expérience soit par le calcul, et cela permet ainsi de décrire l'ensemble complet des propriétés du système optique. Il est très intéressant de remarquer que le résultat final n'est pas compliqué au terme de notre étude d'un système optique aussi important et complexe.

27-6 Aberrations

Avant de trop nous enthousiasmer sur les merveilles des lentilles, nous devons nous hâter d'ajouter qu'il y a également de sérieuses limitations à cause du fait que nous nous sommes limités, strictement parlant, aux rayons paraxiaux, les rayons près de l'axe. Une lentille réelle ayant une dimension finie manifesterait en général des *aberrations*. Par exemple, un rayon qui est sur l'axe passe, bien sûr, par le foyer ; un rayon qui est très proche de l'axe va continuer de très bien passer par le foyer. Mais lorsque nous nous éloignons, les rayons commencent de s'écarter du foyer, peut-être en tombant trop vite et un rayon frappant près du sommet descendra et manquera le foyer d'une distance appréciable. Ainsi au lieu d'obtenir une image ponctuelle, nous obtenons une tache. Cet effet est appelé *aberration sphérique*, parce que c'est une propriété des surfaces sphériques que nous utilisons à la place de la forme exacte. On peut y remédier pour toute distance particulière d'un objet en remodelant la surface de la lentille, ou peut-être en utilisant plusieurs lentilles aménagées de sorte que les aberrations des lentilles individuelles tendent à se détruire les unes les autres.

Les lentilles ont un autre défaut : les lumières de différentes couleurs ont des vitesses différentes ou des indices de réfraction différents dans le verre, et de ce fait la distance focale d'une lentille donnée est différente pour différentes couleurs. Si donc nous formons l'image d'une tache blanche, l'image aura des couleurs parce que lorsque nous focalisons pour le rouge, le bleu n'est pas focalisé et vice versa. Cette propriété est appelée une *aberration chromatique*.

Il y a encore d'autres défauts. Si l'objet est écarté suffisamment de l'axe, alors le foyer n'est plus parfait. La manière la plus simple de le vérifier est de faire une image avec une lentille et ensuite de tourner la lentille de telle sorte que les rayons viennent la frapper avec un grand angle par rapport à l'axe. Alors l'image formée sera habituellement très grossière et elle ne sera en aucun endroit correctement focalisée. Il y a donc différents types de défauts dans les lentilles que les fabricants d'optiques essaient de pallier, en utilisant de nombreuses lentilles pour compenser les erreurs de chacune prise séparément.

Avec quel soin devons-nous procéder afin d'éliminer les aberrations ? Est-il possible de réaliser un système optique absolument parfait ? Imaginez que nous ayons construit un système optique qui soit supposé amener la lumière exactement en un point. Pourrions-nous en raisonnant du point de vue du moindre temps trouver une condition sur le degré de perfection que le système doit atteindre ? Le système sera muni d'un certain type d'ouverture d'entrée pour la lumière. Si nous prenons le rayon le plus éloigné de l'axe qui peut atteindre le foyer (si le système est parfait, bien sûr) les temps pour tous ces rayons sont exactement égaux. Mais rien n'est parfait, aussi la question est, quelle marge d'erreur peut-on accepter pour le temps mis par ce rayon afin que cela ne soit pas la peine de le

corriger davantage? Cela dépend du degré de perfection que nous voulons donner à l'image. Mais supposons que nous voulions rendre l'image aussi parfaite que possible. Alors, bien sûr, notre impression est qu'il nous faut faire en sorte que chaque rayon ait à peu près le même temps à sa disposition. Mais il apparaît que ceci n'est pas vrai, qu'au-delà d'un certain point nous essayons de faire quelque chose qui est trop précis parce que la théorie de l'optique géométrique ne s'applique plus!

Rappelons-nous que le principe du moindre temps n'est pas une formulation précise, à l'inverse du principe de la conservation de l'énergie ou du principe de la conservation de la quantité de mouvement. Le principe du moindre temps n'est qu'une *approximation*, et il est intéressant de savoir quelle erreur peut être permise, qui ne provoque pas de différence apparente. La réponse est que si nous avons fait en sorte qu'entre le rayon maximum – le plus mauvais rayon, le rayon qui est le plus éloigné – et le rayon central, la différence en temps soit inférieure à environ la période qui correspond à une oscillation de la lumière, alors il n'est pas nécessaire d'améliorer davantage l'appareil. La lumière est une chose qui oscille avec une fréquence définie reliée à la longueur d'onde, et si nous avons établi la différence de temps pour les rayons différents de sorte qu'elle soit inférieure à environ une période, il n'est pas nécessaire d'aller plus loin.

27-7 Pouvoir de résolution

Une autre question intéressante – une question très importante du point de vue technique pour tous les instruments d'optique – est la suivante: quel est leur *pouvoir de résolution*? Si nous construisons un microscope, nous voulons voir les objets que nous examinons. Cela signifie, par exemple, que si nous regardons une bactérie avec une tache à chaque extrémité, nous voulons *voir* deux points lorsque nous l'agrandissons. On peut penser que tout ce que nous avons à faire est d'augmenter suffisamment le grandissement – nous pouvons toujours ajouter d'autres lentilles, nous pouvons toujours agrandir de plus et avec l'ingéniosité des constructeurs toutes les aberrations sphériques et chromatiques peuvent être éliminées, il n'y a donc pas de raison pour que nous ne puissions continuer d'agrandir l'image. Ainsi les limitations d'un microscope ne viennent pas du fait qu'il est impossible de construire une lentille qui agrandit plus de 2.000 diamètres. Nous pouvons construire un système de lentilles qui agrandit 10.000 diamètres, mais nous ne pouvons toujours pas voir deux points qui sont trop proches l'un de l'autre à cause des limitations de l'optique géométrique, à cause du fait que le moindre temps n'est pas précis.

La loi qui détermine à quelle distance les deux points doivent se trouver de telle sorte que sur l'image ils apparaissent comme des points séparés peut être énoncée d'une manière extrêmement élégante à l'aide des temps mis par les rayons différents. Supposons que nous négligions maintenant les aberrations, et imaginez que pour un point particulier P (Fig. 27-9) tous les rayons allant de l'objet à l'image T mettent exactement le même temps. (Ceci n'est pas absolument vrai parce que ce n'est pas un système parfait, mais c'est un autre problème.) Maintenant prenez un point



Fig. 27-9. Pouvoir de résolution d'un système optique.

voisin P' et demandez si son image est distincte de T . En d'autres termes, pouvons-nous faire la différence entre eux. Selon l'optique géométrique, il doit y avoir deux images ponctuelles, mais ce que nous voyons en réalité peut être étalé et nous pouvons ne pas être capables de distinguer la présence de deux points. La condition pour que le second point soit focalisé en un endroit différent distinct du premier, est que les deux temps mis par les rayons extrêmes $P'ST$ et $P'RT$ passant de chaque côté de la grande ouverture des lentilles, doivent *ne pas* être égaux quand on part de l'un ou l'autre des deux objets ponctuels pour arriver à un point image donné. Pourquoi? Parce que si les temps sont égaux, les deux objets vont, bien sûr, *focaliser* au même point image. Ainsi les temps doivent être différents. Mais de combien doivent-ils différer pour que nous puissions dire que les deux objets ne se focalisent *pas* au même endroit, pour que nous puissions distinguer les deux points images? La règle générale de la résolution de tout instrument d'optique est celle-ci : deux sources ponctuelles différentes ne peuvent être séparées que si une source est focalisée en un point tel que les temps mis par les rayons extérieurs de l'autre source pour atteindre ce point, comparés avec ce qui se passe pour son propre point image, diffèrent de plus d'une période. Il est nécessaire que la différence en temps entre le rayon du haut et le rayon du bas s'acheminant vers la *fausse* image dépasse une certaine quantité, à savoir approximativement la période d'oscillation de la lumière :

$$t_2 - t_1 > 1/\nu, \quad (27.17)$$

où ν est la fréquence de la lumière (le nombre d'oscillations par seconde; ou encore la vitesse divisée par la longueur d'onde). Si la distance de séparation des deux points est appelée D , et si l'angle de l'ouverture de la lentille est appelé θ , on peut alors démontrer que (27.17) est exactement équivalent à l'énoncé que D doit être plus grand que $\lambda/n \sin \theta$, où n est l'indice de réfraction en P et λ la longueur d'onde. Les plus petites choses que nous puissions distinguer sont de ce fait approximativement les longueurs d'onde de la lumière. Une formule correspondante existe pour les télescopes, qui nous dit la plus petite différence en angle entre deux étoiles, qui peuvent tout juste être séparées*.

* L'angle est environ λ/D , où D est le diamètre de la lentille. Pouvez-vous voir pourquoi?

Rayonnement électromagnétique

28-1 Électromagnétisme

28-2 Rayonnement

28-3 Le dipôle rayonnant

28-4 Interférences

28-1 Électromagnétisme

Les moments les plus dramatiques dans le développement de la physique sont ceux où se réalisent les grandes synthèses, où on découvre soudainement que les phénomènes qui semblaient précédemment différents ne sont en réalité que des aspects différents d'une même chose. L'histoire de la physique est l'histoire de telles synthèses, et le succès des sciences physiques est essentiellement dû au fait que nous soyons *capables* de faire une synthèse.

Il est probable que le moment le plus dramatique dans le développement de la physique au cours du dix-neuvième siècle, fut vécu un jour par J. C. Maxwell vers les 1860, lorsqu'il réunit les lois de l'électricité et du magnétisme avec les lois du comportement de la lumière. Le résultat fut que les propriétés de la lumière furent partiellement comprises – les propriétés de cette substance ancienne et subtile qui est si importante et mystérieuse qu'il apparut nécessaire de concevoir une création spéciale pour elle en écrivant la Genèse. Maxwell aurait pu dire, lorsqu'il eut terminé sa découverte, « Que l'électricité et le magnétisme soient et la lumière fût ! »

Il y eut une longue préparation à ce moment culminant dans la découverte graduelle et l'exposition des lois de l'électricité et du magnétisme. Nous laisserons cette histoire de côté pour l'étudier en détail au cours de l'année prochaine. Disons brièvement que l'histoire s'est déroulée comme suit. Les propriétés, découvertes progressivement, de l'électricité et du magnétisme, des forces électriques d'attraction et de répulsion, et des forces magnétiques, montraient que malgré la complexité de ces forces, elles diminuaient toutes inversement avec le carré de la distance. Nous savons, par exemple, que la simple loi de Coulomb pour les charges stationnaires dit que le champ de force électrique varie inversement avec le carré de la distance. Comme conséquence pour des distances suffisamment grandes, l'influence d'un système sur un autre est extrêmement faible. Maxwell remarqua que les équations et les lois qui avaient été découvertes avant lui étaient mutuellement incohérentes lorsqu'il essaya de les rassembler, et afin de rendre le système complètement cohérent, il fut obligé d'ajouter un autre terme à ces équations. Avec ce nouveau terme s'introduisit une prédiction étonnante qui était qu'une partie des champs électriques et magnétiques diminuerait beaucoup plus lentement avec la distance que l'inverse du carré, à savoir, inversement à la première

puissance de la distance! Et il réalisa ainsi que les courants électriques en un endroit peuvent influencer d'autres charges très éloignées, et il prédit les effets de base, auxquels nous nous sommes habitués aujourd'hui – les liaisons radio, le radar, etc.

C'est apparemment un miracle que quelqu'un parlant en Europe puisse avec de simples influences électriques être écouté à des milliers de kilomètres de là, à Los Angeles. Comment cela est-il possible? C'est dû au fait que les champs ne varient pas suivant l'inverse du carré de la distance, mais simplement inversement à la première puissance de la distance. Finalement, on reconnut que la lumière elle-même était formée d'influences électriques et magnétiques s'étendant sur de vastes distances, et qu'elle était créée par une oscillation presque incroyablement rapide des électrons dans les atomes. Nous résumons tous ces phénomènes par le mot *rayonnement*, ou plus précisément *rayonnement électromagnétique*, puisqu'il existe par ailleurs une ou deux autres catégories de rayonnement. Presque toujours, rayonnement signifie rayonnement électromagnétique.

Et c'est ainsi que l'univers forme un tout. Les mouvements atomiques d'une étoile distante ont encore une influence suffisante à cette grande distance pour mettre en mouvement les électrons dans notre œil, et ainsi, nous connaissons les étoiles. Si cette loi n'existait pas, nous serions tous littéralement dans le noir quant au monde extérieur! Et les perturbations électriques dans une galaxie à cinq milliards d'années lumière de distance – ce qui est l'objet le plus éloigné que nous ayons observé à l'heure actuelle – peuvent encore influencer d'une manière significative et détectable les courants dans la grande « antenne réceptrice » d'un radio-télescope. C'est ainsi que nous voyons les étoiles et les galaxies.

C'est ce phénomène remarquable que nous allons étudier dans ce chapitre. Au début de ce cours en physique, nous avons brossé un large tableau du monde, mais nous sommes maintenant mieux préparés à comprendre certains de ces aspects et de ce fait nous reviendrons plus en détail sur certaines parties. Nous commençons par décrire la situation de la physique à la fin du dix-neuvième siècle. Tout ce qui était alors connu des lois fondamentales peut être résumé comme suit.

Il y avait d'abord les lois de forces: une des forces était donnée par la loi de gravitation que nous avons déjà écrite plusieurs fois; la force sur un objet de masse m , due à un autre de masse M , est donnée par

$$F = GmMe_r/r^2, \quad (28.1)$$

où e_r est un vecteur unité dirigé de m vers M et r est la distance entre les masses.

Ensuite les lois de l'électricité et du magnétisme sous la forme qu'elles avaient à la fin du dix-neuvième siècle se présentaient ainsi: les forces électriques agissant sur une charge q peuvent être décrites par deux champs appelés $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, et la vitesse $\mathbf{v}$ de la charge q , dans l'équation

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (28.2)$$

Pour compléter cette loi nous devons dire ce que sont les formules de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, dans une circonstance donnée: en présence d'un certain nombre de charges, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont chacun la somme des contributions venant de chacune des charges prises individuellement. Si donc nous pouvons trouver le $\mathbf{E}$ et le $\mathbf{B}$ produits par une seule charge, il nous suffit d'ajouter tous les effets provenant de toutes les charges dans l'univers, pour obtenir les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ totaux! C'est le principe de superposition.

Quelle est la formule du champ électrique et du champ magnétique produits par une charge individuelle? Il se trouve qu'elle est très compliquée, et qu'il faut une longue

étude assez compliquée pour la trouver. Mais ce n'est pas notre but. Nous écrirons maintenant cette loi simplement pour impressionner le lecteur par la beauté de la nature, c'est-à-dire par le fait qu'il soit *possible* de résumer tout le savoir fondamental en une page en employant des notations qu'il connaît déjà. Cette loi donnant les champs d'une charge individuelle est complète et précise, pour autant que nous le sachions (à l'exception de la mécanique quantique) mais elle paraît assez compliquée. Nous n'en étudierons pas toutes les parties maintenant; nous ne l'écrivons simplement que pour en donner une impression, pour montrer qu'elle peut être écrite et de telle sorte que nous sachions, avant l'heure, approximativement à quoi elle ressemble. En fait la manière la plus *utile* d'écrire les lois correctes de l'électricité et du magnétisme n'est pas la manière que nous allons utiliser; elles s'écrivent à partir de ce qu'on appelle les *équations de champ*, sur lesquelles nous en apprendrons davantage l'année prochaine. Mais les notations mathématiques utilisées sont différentes et nouvelles, et nous écrirons donc la loi sous une forme peu commode pour les calculs, mais avec des notations que nous connaissons déjà.

Le champ électrique $\mathbf{E}$ est donné par

$$\mathbf{E} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{e}_{r'} \right]. \quad (28.3)$$

Qu'est-ce que nous disent les différents termes? Prenez le premier terme, $\mathbf{E} = -q \mathbf{e}_{r'} / 4\pi\epsilon_0 r'^2$. Celui-ci bien sûr représente la loi de Coulomb que nous connaissons déjà: q est la charge qui produit le champ; $\mathbf{e}_{r'}$ est le vecteur unité s'écartant du point P où $\mathbf{E}$ est mesuré, r est la distance de P à q . Mais la loi de Coulomb est fausse. Les découvertes du dix-neuvième siècle ont montré que les influences ne peuvent pas se déplacer plus vite qu'une certaine vitesse fondamentale c que nous appelons maintenant la vitesse de la lumière. Il n'est pas correct de considérer que le premier terme est la loi de Coulomb, non seulement parce qu'il n'est pas possible de savoir où se trouve la charge *maintenant* et à quelle distance elle est *maintenant*, mais également parce que la seule chose qui puisse affecter le champ en un endroit et en un temps donnés, est le comportement des charges dans le *passé*. Jusqu'où faut-il remonter dans le passé? Le retard en temps ou *temps retardé*, est le temps qu'il faut pour aller à la vitesse c de la charge au point P où l'on étudie le champ. Le retard est r'/c .

Ainsi pour tenir compte de ce retard en temps, nous plaçons un petit indice prime sur r pour dire à quelle distance se trouvait l'information qui arrive maintenant en P lorsqu'elle quittait q . Supposons, pour un instant, que la charge transporte une lumière et que la lumière ne puisse se rendre en P qu'à la vitesse c . Lorsque nous regardons q , nous ne le verrons pas à l'endroit où elle se trouve maintenant, mais où elle se *trouvait* à un certain instant antérieur. Ce qui apparaît dans notre formule est la direction *apparente* $\theta_{r'}$ – la direction dans laquelle elle se trouvait – ce qu'on appelle la direction *retardée* – et à la distance *retardée* r' . C'est assez facile à comprendre, mais c'est également inexact. La réalité est beaucoup plus compliquée.

Il y a plusieurs autres termes. Le terme suivant, pour s'exprimer d'une manière un peu brutale, est là comme si la nature voulait rendre compte du fait que l'effet est retardé. Il suggère que nous devrions calculer le champ coulombien retardé et lui ajouter une correction qui est son taux de changement que multiplie le temps dont il est retardé. La nature semble vouloir évaluer ce qu'est le champ au moment présent en multipliant le taux de changement par le temps de retard. Mais nous n'en sommes pas encore quittes. Il y a un troisième terme – la dérivée seconde par rapport à t du

vecteur unité dans la direction de la charge. La formule *est* maintenant terminée, et c'est tout ce que contient le champ électrique créé par une charge en mouvement arbitraire.

Le champ magnétique est donné par

$$\mathbf{B} = -\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}/c. \quad (28.4)$$

Nous avons écrit cette formule simplement dans le but de montrer la beauté de la nature ou, en un sens, la puissance des mathématiques. Nous ne prétendons pas comprendre *pourquoi* il est possible d'en écrire autant dans un si petit espace, mais (28.3) et (28.4) contiennent le mécanisme selon lequel les générateurs d'électricité fonctionnent, la manière dont la lumière agit, et tous les phénomènes de l'électricité et du magnétisme. Bien entendu, pour compléter le tableau nous avons également besoin de savoir quelque chose sur le comportement des matériaux en cause – les propriétés de la matière – qui ne sont pas convenablement décrites par (28.3).

Pour en terminer avec la description du monde du dix-neuvième siècle, nous devons mentionner une autre grande synthèse réalisée au cours de ce siècle, une synthèse à laquelle Maxwell a également beaucoup contribué, ce fut la synthèse des phénomènes de la chaleur et de la mécanique. Nous étudierons ce sujet bientôt.

Ce qu'il a fallu ajouter au vingtième siècle est le fait que les lois de la dynamique de Newton se sont révélées fausses, et que la mécanique quantique a dû être introduite pour les corriger. Les lois de Newton sont approximativement valables lorsque l'échelle des objets est suffisamment grande. Ces lois de mécanique quantique combinées avec les lois de l'électricité ont été récemment réunies pour former une ensemble de lois appelées *l'électrodynamique quantique*. De plus, un certain nombre de nouveaux phénomènes ont été découverts, dont le premier fut la radioactivité découverte par Becquerel en 1898 – il réussit tout juste à la glisser à la fin du dix-neuvième siècle. Ce phénomène de radioactivité fut étudié et nous fit découvrir les noyaux, de nouveaux types de forces qui ne sont ni gravitationnelles, ni électriques et de nouvelles particules avec des interactions différentes, un domaine qui reste encore plein de mystères.

Pour les puristes qui en savent plus (les professeurs à qui il peut arriver de lire ce livre), nous devons ajouter que lorsque nous disons que (28.3) est une expression complète de notre connaissance de l'électrodynamique, nous ne sommes pas complètement rigoureux. Il y a un problème qui n'a pas été complètement résolu à la fin du dix-neuvième siècle. Lorsque nous essayons de calculer le champ dû à toutes les charges *y compris la charge elle-même, sur laquelle nous voulons que le champ agisse*, nous rencontrons des difficultés, par exemple en essayant de trouver la distance d'une charge à elle-même, et en divisant quelque chose par cette distance qui est nulle. Le problème de manipuler cette partie du champ qui est créée par la seule charge sur laquelle nous voulons que le champ agisse n'est pas encore résolu aujourd'hui. Aussi nous le laissons de côté; nous n'avons pas de solution complète à ce problème, et nous l'éviterons donc aussi longtemps que nous pourrons.

28-2 Rayonnement

C'est donc là un résumé de la description du monde. Utilisons-le maintenant pour examiner les phénomènes appelés rayonnement. Pour décrire ces phénomènes, nous devons sélectionner à partir de l'équation (28.3) la seule partie qui varie inversement avec la distance et non avec le carré de la distance. Il se trouve que lorsque finalement nous trouvons cette partie, elle

est si simple dans sa forme qu'il est légitime d'étudier l'optique et l'électrodynamique d'une manière élémentaire en la considérant comme étant « la loi » du champ électrique produit à grande distance par une charge en mouvement. Nous la considérerons temporairement comme une loi donnée que nous reprendrons plus en détail l'année prochaine.

Parmi les termes apparaissant dans (28.3), le premier varie évidemment inversement avec le carré de la distance, et le deuxième n'est qu'une correction pour le retard, ainsi il est facile de montrer que ces deux termes varient inversement avec le carré de la distance. Tous les effets qui nous intéressent proviennent du troisième terme, qui n'est pas si compliqué, après tout. Ce que dit ce terme est ceci: considérez la charge et remarquez la direction du vecteur unité (nous pouvons projeter son extrémité sur la surface d'une sphère unité). Lorsque la charge se déplace dans tous les sens, le vecteur unité oscille, et *l'accélération de ce vecteur unité est ce que nous cherchons*. C'est tout. Ainsi

$$\mathbf{E} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d^2 \mathbf{e}_r}{dt^2} \quad (28.5)$$

est un énoncé des lois du rayonnement parce que c'est le seul terme important lorsque nous nous éloignons suffisamment pour que les seuls champs qui restent varient inversement avec la distance. (Les termes qui varient avec le carré ont tellement diminué qu'elles ne nous intéressent plus.)

Nous pouvons aller un peu plus loin en étudiant (28.5) pour voir ce que cette équation signifie. Supposez qu'une charge se déplace de n'importe quelle manière et que nous l'observons d'une certaine distance. Nous imaginons pour un temps qu'elle est « allumée » (bien que ce soit la lumière que nous allons essayer d'expliquer); nous imaginons que c'est un petit point blanc. Nous voyons ce point blanc se déplacer dans tous les sens. Mais nous ne voyons pas *exactement* comment il se déplace *maintenant*, à cause du retard dont nous avons parlé. Ce qui compte, c'est la manière dont il se déplaçait antérieurement. Le vecteur unité $\mathbf{e}_r$ est pointé vers la position apparente de la charge. Bien entendu, l'extrémité de $\mathbf{e}_r$ se déplace sur une courbe, de sorte que son accélération a deux composantes. L'une est la partie transversale, parce que son extrémité monte et descend, et l'autre est sa partie radiale parce qu'elle reste sur une sphère. Il est facile de démontrer que cette dernière est beaucoup plus faible et varie comme l'inverse du carré de r lorsque r est très grand. C'est facile à voir, car lorsque nous imaginons que nous déplaçons une source de plus en plus loin, les oscillations de $\mathbf{e}_r$ paraissent alors de plus en plus petites, variant inversement avec la distance, mais la composante radiale de l'accélération varie beaucoup plus rapidement que l'inverse de la distance. Ainsi tout ce que nous devons faire pratiquement est de projeter le mouvement sur un plan à une distance unité. Nous trouvons donc la règle suivante: Imaginez que nous regardions la charge en mouvement et que tout ce que nous voyons soit retardé – comme un peintre essayant de peindre une scène sur un tableau à une distance unité. Un peintre réel, bien sûr, ne prend pas en compte le fait que la lumière se déplace à une certaine vitesse, mais peint le monde tel qu'il le voit. Nous voulons voir l'aspect de sa peinture. Nous voyons un point, représentant la charge, se déplaçant sur le tableau. L'accélération de ce point est proportionnelle au champ électrique. C'est tout – tout ce qu'il nous faut.

Ainsi l'équation (28.5) est la formule complète et correcte du rayonnement; même les effets de relativité y sont contenus. Cependant nous l'appliquerons souvent à

un cas encore plus simple dans lequel les charges ne se déplacent que sur une petite distance et à une vitesse relativement lente. Puisqu'elles se déplacent lentement, elles ne s'écartent pas d'une distance appréciable de l'endroit où elles sont parties, de telle sorte que le retard en temps est pratiquement constant. Alors la loi est encore plus simple, parce que la valeur du retard est fixée. Nous imaginons donc que la charge exécute un très petit mouvement à une distance effectivement constante. Le retard à la distance r est r/c . Notre règle devient alors la suivante: Si l'objet chargé se déplace selon un très petit mouvement et est déplacé latéralement de la distance $x(t)$, alors l'angle suivant lequel le vecteur unité $\mathbf{e}_r$ est déplacé est x/r , et puisque r est pratiquement constant, la composante x de $d^2 \mathbf{e}_r / dt^2$ est simplement l'accélération de x lui-même à une époque antérieure et nous obtenons finalement la loi que nous voulons, qui est

$$E_x(t) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} a_x \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (28.6)$$

Seule la composante de a_x perpendiculaire au rayon vecteur est importante. Voyons pourquoi il en est ainsi. Si la charge se déplace en avant et en arrière directement dans notre direction, le vecteur unité dans cette direction n'oscille pas du tout et il n'y a pas d'accélération. C'est donc uniquement le mouvement latéral qui est important, uniquement l'accélération que nous voyons projetée sur l'écran.

28-3 Le dipôle rayonnant

Comme «loi» fondamentale du rayonnement électromagnétique, nous allons supposer que (28.6) est exact, c'est-à-dire que le champ électrique produit par une charge en accélération qui se déplace d'une manière non relativiste à une très grande distance r est proche de cette forme. Le champ électrique varie inversement avec r et est proportionnel à l'accélération de la charge projetée sur le «plan d'observation», et cette accélération n'est pas l'accélération de maintenant, mais l'accélération que la charge avait auparavant, la quantité de retard étant le temps r/c . Dans le reste du chapitre nous discuterons cette loi de telle sorte que nous puissions mieux la comprendre d'un point de vue physique, parce que nous allons l'utiliser pour comprendre tous les phénomènes de la lumière et de propagation des ondes radio, telles que la réflexion, la réfraction, les interférences, la diffraction et la diffusion. C'est la loi de base et c'est tout ce dont nous avons besoin. Tout le reste de l'équation (28.3) ne fut écrit que pour montrer le décor, pour que vous puissiez apprécier où (28.6) trouve sa place et d'où elle vient.

Nous parlerons de (28.3) davantage l'année prochaine. Entre-temps, nous accepterons son exactitude, mais sans nous limiter au point de vue théorique. Nous pouvons imaginer un certain nombre d'expériences qui illustreront le caractère de cette loi. Pour cela, il nous faut une charge en accélération. Cela devrait être une seule charge mais si nous pouvons faire se déplacer ensemble un grand nombre de charges, toutes de la même manière, nous savons que le champ sera la somme des effets de chacune des charges individuelles; il nous suffira de les additionner. Comme exemple, considérons deux morceaux de fil reliés à un générateur comme indiqué sur la Fig. 28-1. L'idée est que le générateur produit une différence de potentiel, ou un champ, qui extrait les électrons de la partie A et les pousse dans B , puis un instant plus tard, l'intervalle de temps étant bref, il renverse l'effet, tire les électrons hors de B et les pousse à nouveau en A ! Dans ces deux fils, les charges, par exemple, accélèrent pendant un temps vers le haut dans le fil A et vers le haut dans le fil B et à un instant plus tard elles

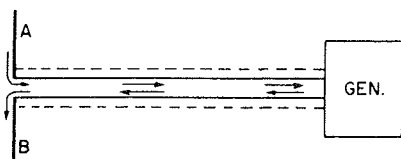


Fig. 28-1. Un générateur de signaux de haute fréquence pilote les électrons alternativement de haut en bas dans les deux fils.

accélèrent vers le bas dans le fil *A* et vers le haut dans le fil *B*. Le fait d'utiliser deux fils et un générateur représente simplement une manière pratique de réaliser l'opération. Le résultat global est simplement que nous avons une charge accélérant vers le haut et vers le bas comme si *A* et *B* n'étaient qu'un seul fil. Un fil très court en comparaison avec la distance que la lumière parcourt en une oscillation est appelé un *oscillateur dipolaire électrique*. Nous avons ainsi ce qu'il nous faut pour vérifier notre loi, qui nous dit que cette charge produit un champ électrique et il nous faut donc un instrument pour détecter un champ électrique; l'instrument que nous utilisons est identique – une paire de fils tels que *A* et *B*! Si un champ électrique est appliqué à un tel appareil, il produit une force qui va tirer les électrons vers le haut ou vers le bas dans les deux fils. Ce signal est détecté par l'intermédiaire d'un redresseur placé entre *A* et *B*, et un petit fil fin transporte l'information vers l'amplificateur, où elle est amplifiée, ce qui fait que nous pouvons entendre les fréquences audibles qui modulent la radiofréquence. Lorsque cette sonde est soumise à un champ électrique, on entendra un bruit élevé sortant du haut-parleur, et lorsqu'il n'y a pas de champ électrique, il n'y aura pas de bruit.

Du fait que d'autres objets sont présents dans la pièce dans laquelle nous mesurons les ondes, notre champ électrique se mettra à secouer les électrons dans ces autres objets; le champ électrique fait osciller ces autres charges, et en oscillant elles produisent également un effet sur notre sonde. Ainsi pour réussir l'expérience, nous devons placer les appareils relativement proches l'un de l'autre, de telle sorte que l'influence des parois et de nous-mêmes – les ondes réfléchies – soient relativement faibles. Le phénomène n'apparaîtra donc pas précisément et parfaitement en accord avec l'équation (28.6), mais il en sera suffisamment proche pour que nous puissions évaluer cette loi.

Nous mettons maintenant en marche notre générateur et écoutons le signal audible. Nous trouvons un champ élevé lorsque le détecteur *D* est parallèle au générateur *G* au point 1 (Fig. 28-2). Nous

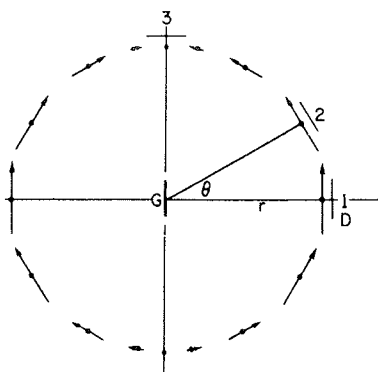


Fig. 28-2. Le champ électrique instantané sur une sphère centrée autour d'une charge localisée, oscillant linéairement.

trouvons la même quantité de champ à n'importe quel autre angle azimutal autour de l'axe de G , parce qu'il n'y a pas d'effets directionnels. D'un autre côté, lorsque le détecteur est en 3 le champ est nul. C'est correct, parce que notre formule dit que le champ doit être égal à l'accélération de la charge *projetée perpendiculairement* à la direction de l'observation. Ainsi lorsque nous regardons vers le bas dans la direction de G , la charge se déplace en se rapprochant et en s'écartant de D , et il n'y a pas d'effet. Cela vérifie donc la première règle qu'il n'y a pas d'effets lorsque la charge se dirige directement vers nous. Deuxièmement, la formule dit que le champ électrique doit être perpendiculaire à r , et dans le plan contenant G et r ; si donc nous plaçons D en 1 et le tournons de 90° , nous ne devons obtenir aucun signal. Et c'est très exactement ce que nous trouvons, le champ électrique est en effet vertical et non horizontal. Lorsque nous déplaçons D d'un certain angle intermédiaire, nous voyons que le signal le plus important apparaît lorsqu'il est orienté comme indiqué, parce que bien que G soit vertical il ne produit pas un champ simplement parallèle à lui-même – c'est la *projection de l'accélération perpendiculaire à la ligne d'observation* qui compte. Le signal est plus faible en 2 qu'il ne l'est en 1, à cause de cet effet de projection.

28-4 Interférences

Nous pouvons ensuite vérifier ce qui se passe lorsque nous avons deux sources côte à côte à quelques centimètres de distance (Fig. 28-3). La loi est que les deux sources doivent ajouter leurs effets au point 1 lorsque les deux sources sont branchées au même générateur et déplacent leurs électrons toutes les deux vers le haut et vers le bas de la même manière, de telle sorte que le champ électrique total soit la somme des deux et soit deux fois aussi important qu'il ne l'était précédemment.

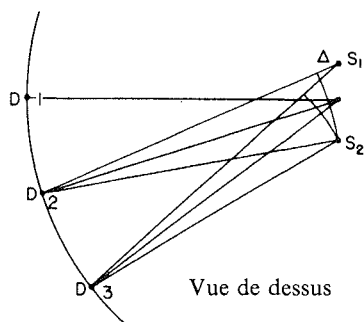


Fig. 28-3. Illustration de l'interférence de sources.

Voici maintenant une intéressante possibilité. Supposez que vous accélériez les charges dans S_1 et dans S_2 mais que vous retardiez ce qui se passe dans S_2 de telle sorte qu'elles soient déphasées de 180° . Alors le champ produit par S_1 aura une direction et le champ produit par S_2 aura à n'importe quel instant la direction opposée, et nous ne devons donc obtenir *aucun* effet au point 1. La phase de l'oscillation est facilement ajustable par l'intermédiaire d'un tuyau qui transporte le signal en S_2 . En modifiant la longueur de ce tuyau, nous modifions le temps qu'il faut au signal pour arriver en S_2 et donc nous modifions la phase de cette oscillation. En ajustant cette longueur nous pouvons, en effet, trouver un endroit pour lequel il n'y a plus aucun signal, malgré le fait que S_1 et S_2 soient toutes deux en activité! Le fait qu'elles agissent toutes les deux peut être vérifié, car si nous en arrêtons une, nous

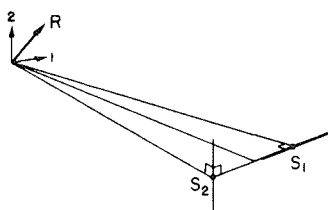


Fig. 28-4. Illustration du caractère vectoriel de la combinaison de sources.

pouvons voir le mouvement de l'autre. Ainsi l'ensemble des deux peut produire zéro, si tout est ajusté correctement.

Il est maintenant très intéressant de montrer que l'addition des deux champs est en fait une addition *vectorielle*. Nous ne l'avons vérifié que pour le mouvement vertical, mais voyons ce qu'il en est pour deux directions non parallèles. Nous ramenons d'abord S_1 et S_2 à la même phase; c'est-à-dire, elles suivent à nouveau le même mouvement. Mais maintenant nous tournons S_1 de 90° , comme indiqué à la Fig. 28-4. Au point 1 nous devons voir la somme des deux effets, l'un des deux étant vertical et l'autre horizontal. Le champ électrique est la somme vectorielle de ces deux signaux en phase — ils sont tous les deux importants au même instant et passent par zéro ensemble; le champ total doit être un signal R à 45° . Si nous tournons D de manière à obtenir le maximum de bruit, cela doit être autour de 45° et non pas à la verticale. Et si nous le plaçons perpendiculairement à cette direction, nous devons obtenir zéro, ce qui est facile à mesurer. En effet nous observons exactement ce comportement!

Qu'en est-il maintenant du retard? Comment pouvons-nous démontrer que le signal est retardé? Nous pourrions avec beaucoup d'appareils mesurer le temps auquel il arrive, mais il y a une autre manière bien plus simple. Nous nous reportons à nouveau à la Fig. 28-3, et supposons que S_1 et S_2 soient en phase. Elles oscillent ensemble toutes les deux et elles produisent des champs électriques égaux au point 1. Mais supposons que nous allions en un certain endroit 2 qui soit plus proche de S_2 et plus éloigné de S_1 . Alors, en accord avec le principe que l'accélération doit être retardée d'une certaine quantité égale à r/c , si les retards ne sont pas égaux, les signaux ne sont plus en phase. Il doit être alors possible de trouver une position à laquelle la distance de D à S_1 et S_2 diffère d'une certaine quantité Δ , de telle manière qu'il n'y ait plus de signal résultant. La distance Δ doit être la distance que la lumière parcourt en la moitié d'une oscillation du générateur. Nous pouvons aller encore plus loin, et trouver un point où la différence vaut un cycle complet; c'est-à-dire le signal de la première antenne atteint le point 3 après un temps qui est plus grand que celui de la deuxième antenne exactement du temps qu'il faut au courant électrique pour osciller un fois, et de ce fait les deux champs électriques produits en 3 sont à nouveau en phase. Au point 3 le signal est à nouveau intense.

Ceci termine notre discussion de la vérification expérimentale de certaines caractéristiques importantes de l'équation (28.6). Bien entendu, nous n'avons pas effectivement vérifié la variation en $1/r$ de l'intensité du champ électrique, ou le fait qu'il y ait également un champ magnétique associé avec le champ électrique. Pour ce faire, il nous faudrait des techniques assez avancées et cela n'ajouterait guère à notre compréhension actuelle. En tous les cas, nous avons vérifié les points qui sont les plus importants pour nos applications ultérieures, et nous reviendrons à l'étude des autres propriétés des ondes électromagnétiques l'année prochaine.

Interférence

29-1 Ondes électromagnétiques

29-2 Énergie du rayonnement

29-3 Ondes sinusoïdales

29-4 Deux dipôles rayonnants

29-5 Les mathématiques de l'interférence

29-1 Ondes électromagnétiques

Dans ce chapitre nous traiterons le sujet du chapitre précédent d'une manière plus mathématique. Nous avons démontré qualitativement qu'il y a des maxima et des minima dans le champ rayonné provenant de deux sources et notre problème est maintenant de décrire le champ mathématiquement en détail, sans se limiter à un simple aspect qualitatif.

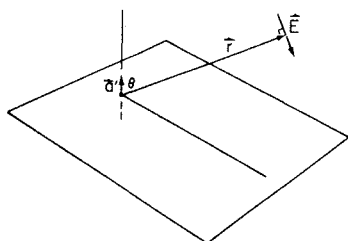


Fig. 29-1. Le champ électrique E dû à une charge positive dont l'accélération retardée est a' .

Nous avons déjà analysé la signification physique de la formule (28.6) d'une manière satisfaisante, mais il y a un certain nombre de remarques à faire sur elle d'un point de vue mathématique. En premier lieu, si une charge accélère verticalement le long d'une droite dans un mouvement de très faible amplitude, le champ dans une direction faisant l'angle θ avec l'axe du mouvement est dirigé perpendiculairement à la ligne d'observation et est situé dans le plan contenant à la fois l'accélération et la ligne d'observation (Fig. 29-1). Si on appelle r la distance, alors au temps t le champ électrique a la valeur

$$E(t) = \frac{-qa(t - r/c) \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}, \quad (29.1)$$

où $a(t - r/c)$ est l'accélération au temps $(t - r/c)$, appelée l'accélération *retardée*.

Il est maintenant intéressant de tracer une courbe du champ dans différentes conditions. La chose qui est intéressante, bien sûr, est le facteur $a(t - r/c)$, et pour le comprendre nous pouvons prendre le cas le plus simple, $\theta = 90^\circ$, et tracer le champ graphiquement. Précédemment nous nous trouvions en un endroit et nous nous demandions comment le champ variait en cet endroit avec le temps. Mais au lieu de cela, nous allons maintenant essayer de voir à quoi ressemble le champ en différentes positions de l'espace à un instant donné. Ainsi nous voulons une photographie « instantanée » qui nous dit la valeur du champ en différents endroits. Bien sûr, cela dépend de l'accélération de la charge. Supposons que la charge au début ait un mouvement particulier: elle se trouve initialement au repos et brutalement elle accélère d'une certaine manière, comme il est indiqué à la Fig. 29-2, puis elle s'arrête. Puis, peu de temps après, nous mesurons le champ en différents endroits. Nous pouvons alors affirmer que le champ ressemblera à ce qui est montré à la Fig. 29-3. En chaque point le champ est déterminé par l'accélération de la charge à un moment antérieur, la quantité de retard étant le retard r/c . Le champ en des points de plus en plus éloignés est déterminé par l'accélération à un instant de plus en plus éloigné dans le passé. Ainsi la courbe de la Fig. 29-3 est en réalité un tracé « renversé » de l'accélération en fonction du temps; la distance est reliée au temps par un facteur d'échelle constant c , que souvent nous prenons comme unité. Ceci est vérifié facilement en considérant le comportement mathématique de $a(t - r/c)$. Évidemment, si nous ajoutons un petit intervalle de temps Δt , nous obtenons la même valeur de $a(t - r/c)$ que nous aurions obtenue, si nous avions soustrait une petite distance: $\Delta r = -c \Delta t$.

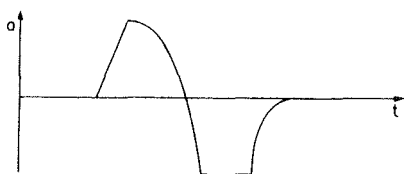


Fig. 29-2. L'accélération d'une certaine charge en fonction du temps.

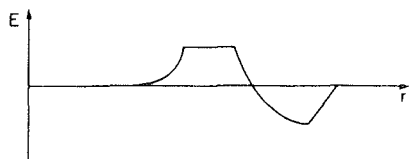


Fig. 29-3. Le champ électrique en fonction de la position à un instant ultérieur. (La variation en $1/r$ est ignorée.)

Énoncé d'une autre manière: si nous ajoutons un petit intervalle de temps Δt , nous pouvons ramener $a(t - r/c)$ à sa valeur antérieure en *ajoutant* une petite distance $\Delta r = c \Delta t$. C'est-à-dire le *champ se déplace avec le temps comme une onde qui s'éloigne de la source*. C'est la raison pour laquelle nous disons parfois que la lumière se propage comme des ondes. C'est la même chose de dire que le champ est retardé, ou de dire que le champ électrique se déplace vers l'extérieur lorsque le temps passe.

Un cas particulier intéressant est celui où la charge q oscille verticalement. Le cas que nous avons étudié expérimentalement au chapitre précédent était un de ceux dans lequel le déplacement x à tout moment t était égal à une certaine constante x_0 , la grandeur de l'oscillation, que multiplie $\cos \omega t$. L'accélération est alors

$$a = -\omega^2 x_0 \cos \omega t = a_0 \cos \omega t, \quad (29.2)$$

où a_0 est l'accélération maximum, $-\omega^2 x_0$. Portons cette formule dans (29.1),

nous trouvons

$$E = -q \sin \theta \frac{a_0 \cos \omega(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r c^2}. \quad (29.3)$$

Sans tenir compte maintenant de l'angle θ et des facteurs constants, voyons à quoi cela ressemble en tant que fonction de la position ou fonction du temps.

29-2 Énergie du rayonnement

D'abord, à un instant quelconque ou en un endroit quelconque, l'intensité du champ varie inversement avec la distance r , comme indiqué précédemment. Nous devons maintenant indiquer que le contenu de l'énergie d'une onde ou les effets d'énergie qu'un tel champ électrique peut avoir, sont proportionnels au carré du champ, car si, par exemple, nous avons une charge quelconque ou un oscillateur dans le champ électrique, et si nous laissons le champ agir sur l'oscillateur, il le fait se déplacer. Si c'est un oscillateur linéaire, l'accélération, la vitesse et le déplacement produits par le champ électrique agissant sur la charge sont tous proportionnels au champ. Ainsi, l'énergie cinétique qui apparaît dans la charge est proportionnelle au carré du champ. Aussi nous considérerons que l'énergie que peut fournir un champ à un système est proportionnelle au carré du champ.

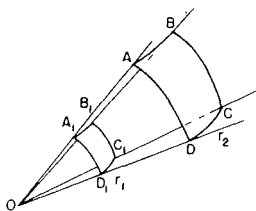


Fig. 29-4. L'énergie s'écoulant dans le cône $OABCD$ est indépendante de la distance r à laquelle elle est mesurée.

Cela signifie que l'énergie que la source peut transférer diminue lorsque nous nous éloignons davantage; en fait, elle varie *inversement avec le carré de la distance*. Mais ça c'est facile à interpréter: si nous voulons récupérer dans l'onde le maximum d'énergie dans un certain cône à une distance r_1 (Fig. 29-4), et que nous tentons la même chose à une autre distance r_2 , nous trouvons que la quantité d'énergie par unité de surface à n'importe quel endroit varie inversement avec le carré de r , mais la valeur de la surface interceptée par le cône varie *directement* comme le carré de r . Ainsi l'énergie que nous pouvons extraire de l'onde à l'intérieur d'un certain cône est la même, quelle que soit notre distance! En particulier, l'énergie totale que nous pouvons extraire de l'onde en plaçant tout autour des oscillateurs absorbants, est une quantité fixe donnée. Ainsi le fait que l'amplitude de E varie en $1/r$ revient à admettre l'existence d'un flux d'énergie, qui n'est jamais perdu, une énergie qui avance sans cesse, se dispersant sur une surface effective de plus en plus grande. Nous voyons donc qu'après son oscillation, une charge a perdu un peu de son énergie qu'elle ne peut jamais retrouver; l'énergie s'éloigne sans diminuer. Si donc nous sommes suffisamment loin pour que notre approximation de base soit bonne, la charge ne peut pas récupérer l'énergie qui a été, comme nous disons, rayonnée vers l'extérieur. Bien entendu l'énergie existe encore quelque part et est disponible

pour être accaparée par d'autres systèmes. Nous étudierons plus en détail cette « perte » d'énergie au Chapitre 32.

Considérons maintenant avec plus de soin, comment l'onde (29.3) varie en fonction du temps à un endroit donné, et en fonction de la position à un instant donné. A nouveau nous ignorons la variation en $1/r$ ainsi que les constantes.

29-3 Ondes sinusoïdales

Commençons par fixer la position r , et observons le champ en fonction du temps. Il oscille à la fréquence angulaire ω . La fréquence angulaire ω peut être définie comme *le taux de changement de phase avec le temps* (radians par seconde). Nous avons déjà étudié une telle chose, aussi elle doit nous être actuellement tout à fait familière. La *période* est la durée d'une oscillation, d'un cycle complet, et nous l'avons également calculée; elle vaut $2\pi/\omega$, car ω que multiplie la période est égal à un cycle du cosinus.

Nous introduisons maintenant une nouvelle quantité qui est beaucoup utilisée en physique. Elle est en relation avec le cas opposé dans lequel nous fixons t et nous observons l'onde en fonction de la distance r . Nous remarquons, bien entendu, que comme fonction de r , l'onde (29.3) oscille également. C'est-à-dire, sans tenir compte de $1/r$, que nous ignorons, nous voyons que E oscille lorsque nous modifions la position. Ainsi, en analogie avec ω , nous pouvons définir une quantité appelée *le nombre d'onde*, symbolisée par k . Cette quantité est définie comme *le taux de changement de phase avec la distance* (radians par mètre). Cela veut dire que lorsque nous nous déplaçons dans l'espace à un instant donné, les phases changent.

Il y a une autre quantité qui correspond à la période, et nous pouvons l'appeler la période dans l'espace, mais elle est habituellement appelée la longueur d'onde, symbolisée par λ . La longueur d'onde est la distance occupée par un cycle complet. Il est facile de voir, alors, que la longueur d'onde est égale à $2\pi/k$ parce que k que multiplie la longueur d'onde serait le nombre de radians dont la phase varie, car c'est le produit du taux de changement des radians par mètre que multiplie le nombre de mètres et la variation pour un cycle doit être égale à 2π . Ainsi $k\lambda = 2\pi$ est exactement analogue à $\omega t_0 = 2\pi$.

Pour notre onde particulière, il y a une relation bien définie entre la fréquence et la longueur d'onde, mais les définitions précédentes de k et ω sont en réalité tout à fait générales. C'est-à-dire que la longueur d'onde et la fréquence peuvent ne pas être reliées de la même manière dans d'autres circonstances physiques. Cependant, dans notre circonstance le taux de changement de phase avec la distance est facilement déterminé, parce que si nous appelons la phase $\phi = \omega(t - r/c)$ et si nous différencions (partiellement) par rapport à la distance r , le taux de changement, $\partial\phi/\partial r$, est

$$\left| \frac{\partial\phi}{\partial r} \right| = k = \frac{\omega}{c}. \quad (29.4)$$

Il y a plusieurs manières de représenter la même chose, telles que

$$\lambda = ct_0 \quad (29.5) \qquad \lambda\nu = c \quad (29.7)$$

$$\omega = ck \quad (29.6) \qquad \omega\lambda = 2\pi c \quad (29.8)$$

Pourquoi la longueur d'onde est-elle égale au produit de c par la période? C'est très simple, bien sûr,

parce que si nous nous asseyons tranquillement en attendant qu'une période se passe, les ondes se déplaçant à la vitesse c , parcourent une distance ct_0 , et se seront bien entendu déplacées d'une longueur d'onde.

Dans une configuration physique autre que celle de la lumière, k n'est pas nécessairement relié à ω de cette manière simple. Si nous appelons x la distance le long d'un axe, alors la formule d'une onde en cosinus se déplaçant dans la direction x avec un nombre d'onde k et une fréquence angulaire ω pourra s'écrire en général $\cos(\omega t - kx)$.

Ayant maintenant introduit la notion de longueur d'onde, nous pouvons dire quelque chose de plus sur les circonstances dans lesquelles (29.1) est une formule légitime. Nous rappelons que le champ est formé de plusieurs parties, l'une d'entre elles variant inversement avec r , une autre variant inversement avec r^2 , et d'autres qui varient encore plus vite. Il vaudrait la peine de savoir dans quelles circonstances la partie du champ en $1/r$ est la partie la plus importante et les autres parties, relativement négligeables. Naturellement, la réponse est « si nous allons suffisamment loin », parce que les termes qui varient inversement avec le carré deviennent en définitive négligeables en comparaison avec le terme en $1/r$. A quelle distance est-ce « suffisamment loin »? La réponse est, qualitativement, que les autres termes soient d'un ordre λ/r plus petits que le terme en $1/r$. Ainsi, aussi longtemps que nous sommes au-delà de quelques longueurs d'onde, (29.1) est une excellente approximation pour le champ. Quelquefois la région au-delà de quelques longueurs d'onde est appelée la « zone ondulatoire ».

29-4 Deux dipôles rayonnants

Abordons maintenant les mathématiques utilisées dans la combinaison des effets de deux oscillateurs pour trouver le champ résultant en un point donné. C'est très facile, dans les quelques cas que nous avons considérés au chapitre précédent. Nous commençons par décrire les effets qualitativement et ensuite plus quantitativement. Prenons le cas simple où les oscillateurs sont situés, avec leurs centres dans le même plan horizontal que le détecteur, et où la direction de vibration est verticale.

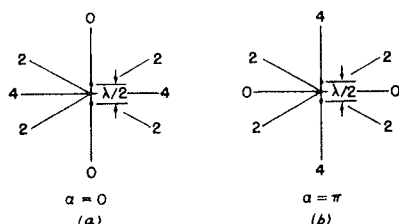


Fig. 29-5. Les intensités dans les diverses directions venant de deux oscillateurs dipôlares à une demi-longueur d'onde de distance. A gauche: en phase ($\alpha = 0$). A droite: déphasage d'une demi-période ($\alpha = \pi$).

La Figure 29-5 (a) représente une vue de dessus de deux tels oscillateurs, et dans cet exemple particulier, ils se trouvent à une demi-longueur d'onde de distance dans une direction N-S, et oscillent ensemble avec la même phase que nous appelons la phase zéro. Nous aimerions connaître l'intensité du rayonnement dans les diverses directions. Par intensité nous voulons dire la quantité d'énergie que le champ transporte par seconde en s'éloignant, qui est proportionnelle à la moyenne dans le temps du carré du champ. Ainsi ce que nous devons considérer lorsque nous voulons savoir quelle est l'intensité de la lumière, c'est le carré du champ électrique et non le champ électrique lui-même. (Le champ électrique nous dit l'intensité de la force ressentie par une

charge stationnaire, mais la quantité d'énergie qui s'éloigne en watts par mètre carré est proportionnelle au carré du champ électrique. Nous calculerons la constante de proportionnalité au chapitre suivant.) Si nous considérons l'ensemble en regardant depuis le côté Ouest, les deux oscillateurs contribuent également et en phase, ce qui fait que le champ électrique est deux fois plus fort que celui produit par un seul oscillateur. Ainsi *l'intensité est quatre fois plus élevée que s'il n'y avait là qu'un seul oscillateur*. (Les nombres à la Figure 29-5 représentent ce que serait l'intensité dans ce cas, en comparaison avec ce qu'elle aurait été s'il n'y avait eu qu'un seul oscillateur de force unité.) Dans les directions Nord et Sud, le long de la droite reliant les oscillateurs, et comme ils se trouvent à une demi-longueur d'onde de distance, l'effet d'un oscillateur se trouve être exactement déphasé d'une demi-oscillation par rapport à l'autre, et de ce fait les champs s'additionnent pour donner zéro. Pour un certain angle intermédiaire (en fait à 30°) l'intensité est 2, et elle diminue 4,2,0, etc. Nous devons apprendre comment trouver ces nombres pour d'autres angles. C'est une question concernant l'addition de deux oscillations avec des phases différentes.

Considérons rapidement quelques autres cas intéressants. Supposez que les oscillateurs soient à nouveau à une demi-longueur d'onde de distance, mais que la phase a de l'un soit égale à la moitié de la période et en retard par rapport à l'autre (Fig. 29-5 b). Dans la direction O l'intensité est maintenant nulle, parce qu'un oscillateur «pousse» lorsque l'autre «tire». Mais dans la direction N le signal venant de celui le plus proche arrive à un certain moment, et celui de l'autre arrive une demi-période plus tard. Mais ce dernier avait *initialement* une demi-période de retard, et de ce fait il est maintenant exactement en *coïncidence* avec le premier, et ainsi l'intensité dans cette direction vaut 4 unités. L'intensité dans la direction à 30° est encore 2, comme nous pourrions le prouver plus tard.

Nous arrivons maintenant à un cas intéressant, qui met en évidence une caractéristique qui peut être utile. Remarquons qu'une des raisons de l'intérêt des relations de phase entre les oscillateurs est de pouvoir fabriquer des faisceaux d'émission radio. Par exemple, si nous construisons un système d'antennes et que nous voulions envoyer un signal radio, par exemple à Hawaï, nous plaçons les antennes verticalement comme dans la Figure 29-5 (a) et nous émettons avec nos deux antennes en phase parce que Hawaï est à l'ouest de notre position. Puis nous décidons que demain nous émettrons vers Alberta, au Canada. Puisque c'est vers le nord et non vers l'ouest, il nous suffit de renverser la phase de l'une de nos antennes, et nous pouvons émettre vers le nord. Ainsi nous pouvons construire des systèmes d'antennes avec de nombreux arrangements. Le nôtre est l'un des plus simples possible; nous pouvons les rendre bien plus compliqués, et en changeant les phases dans les diverses antennes nous pouvons envoyer les faisceaux dans diverses directions et envoyer presque toute la puissance dans la direction dans laquelle nous voulons transmettre, sans même avoir à déplacer l'antenne! Dans les deux cas précédents cependant, tandis que nous émettons vers Alberta, nous perdons une partie de la puissance vers l'île de Pâques, et il serait intéressant de se demander s'il est possible de ne l'envoyer que dans *un seul* sens. A première vue, nous pourrions penser qu'avec une paire d'antennes de cette nature, le résultat sera toujours symétrique. Aussi considérons un cas qui donne des résultats non symétriques pour montrer les variétés possibles.

Si les antennes sont séparées d'un quart de longueur d'onde, et si celle qui se trouve au Nord est déphasée d'un quart de période par rapport à celle du Sud, alors que se passe-t-il (Fig. 29-6)? Dans la direction O nous obtenons 2, comme nous l'avons vu précédemment. Dans la direction S nous obtenons *zéro*, parce que le signal venant de S arrive à un certain moment; celui venant de N vient 90° plus tard en

temps, mais il est déjà en retard de 90° dans sa phase à l'émission, de ce fait ils arrivent ensemble déphasés de 180° , et il n'y a pas d'effet. D'un autre côté, dans la direction N, le signal N arrive plus tôt que le signal S de 90° en temps, parce qu'il est d'un quart de longueur d'onde plus proche. Mais sa phase est établie de telle sorte qu'il oscille à 90° en arrière en temps, ce qui compense exactement la différence de retard, et de ce fait les deux signaux apparaissent *ensemble* en phase rendant l'intensité de champ deux fois aussi grande et l'énergie quatre fois aussi grande.

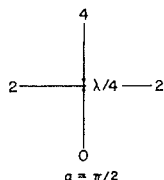


Fig. 29-6. Une paire d'antennes dipôlaires donnant le maximum de puissance dans une direction.

Ainsi, en faisant preuve d'un peu d'ingéniosité dans l'espacement et le retard de phase de nos deux antennes, nous pouvons envoyer toute la puissance dans une seule direction. Mais elle est toujours distribuée dans un angle assez grand. Pouvons-nous faire en sorte que la focalisation soit encore plus étroite dans une direction particulière? Considérons à nouveau le cas de Hawaii, pour lequel nous envoyons le faisceau vers l'est et l'ouest, mais celui-ci est étalé dans un grand angle, car même à 30° nous obtenons encore la moitié de l'intensité – nous perdons de la puissance. Pouvons-nous faire mieux? Prenons une situation dans laquelle la séparation est égale à dix longueurs d'ondes (Fig. 29-7), ce qui est davantage comparable à la situation dans laquelle nous avons expérimenté au chapitre précédent, avec des séparations de plusieurs longueurs d'ondes plutôt qu'une petite fraction de longueur d'onde. Ici la figure est assez différente.

Si les oscillations sont à dix longueurs d'ondes de distance (nous prenons le cas en phase pour simplifier) nous voyons que dans la direction E-O elles sont en phase, et nous obtenons une forte intensité, quatre fois celle que nous obtiendrions s'il n'y en avait qu'une. D'un autre côté, dans une direction formant un petit angle avec la première, les temps d'arrivée diffèrent de 180° et l'intensité est nulle. Pour être précis, si nous traçons une droite venant de chaque oscillateur jusqu'à un point éloigné et si la différence Δ des deux distances est $\lambda/2$, la moitié d'une oscillation, alors le déphasage sera de 180° . Le premier zéro apparaît dans ce cas. (La figure n'est pas dessinée à l'échelle; ce n'est qu'un dessin approché.) Cela signifie que nous avons en effet

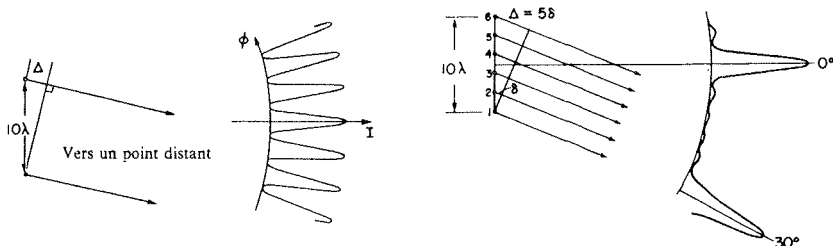


Fig. 29-7. Le schéma d'intensité pour deux dipôles séparés de 10λ .

Fig. 29-8. Un réseau d'antennes à six dipôles et une partie de sa distribution d'intensité.

un faisceau très étroit dans la direction que nous voulons, parce que si nous nous déplaçons simplement d'un petit peu, nous perdons toute notre intensité. Pratiquement, malheureusement, si nous voulons faire un réseau d'émission radio et que nous doublons la distance Δ , alors nous aurons un déphasage d'un cycle complet, ce qui est la même chose que d'être exactement à nouveau *en phase*! Ainsi nous obtenons plusieurs maxima et minima successifs, exactement comme ce que nous avons trouvé avec l'espacement de $2\frac{1}{2}\lambda$ au Chapitre 28.

Comment pouvons-nous faire pour éliminer tous ces maxima en trop, ces « lobes », comme on les appelle? Nous pouvons éliminer ces lobes indésirables d'une manière assez intéressante. Supposez que nous plaçons un groupe d'antennes entre les deux que nous avons déjà. C'est-à-dire que celles aux extrémités seront encore distantes de 10λ , mais entre elles par exemple tous les 2λ , nous avons placé une autre antenne et nous les pilotons toutes en phase. Il y a maintenant six antennes, et si nous regardons l'intensité dans la direction E-O, elle sera bien entendu beaucoup plus grande avec six antennes qu'avec une seule. Le champ sera six fois plus intense et l'intensité trente-six fois plus grande (le carré du champ). Nous obtenons trente-six unités d'intensité dans cette direction. Si maintenant nous considérons des points voisins, nous trouvons un zéro à peu près comme précédemment, mais si nous allons plus loin, là où nous avions l'habitude de trouver une nouvelle « remontée » importante, nous obtenons maintenant une « bosse » beaucoup plus petite. Essayons de voir pourquoi.

La raison est que, bien que nous nous attendions à obtenir un résultat important lorsque la distance Δ est exactement égale à la longueur d'onde, il est vrai que les dipôles 1 et 6 sont alors en phase et coopèrent en essayant d'envoyer une certaine intensité dans cette direction. Mais les numéros 3 et 4 sont approximativement déphasés d'une demi-longueur d'onde par rapport à 1 et 6, et bien que 1 et 6 travaillent ensemble, 3 et 4 agissent également, mais avec la phase opposée. De ce fait, il y a très peu d'intensité dans cette direction – mais il y a quelque chose; tout n'est pas complètement détruit. Cela continue de se produire; nous obtenons des remontées extrêmement faibles, et nous avons le faisceau important dans la direction où nous le voulons. Mais dans cet exemple particulier, quelque chose d'autre se passe: à savoir, puisque la distance entre deux dipôles successifs est égale à 2λ , il est possible de trouver un angle pour lequel la distance δ entre des *dipôles successifs* soit exactement une longueur d'onde, de telle sorte que les effets de l'ensemble de ces dipôles soient à nouveau en phase. Chacun est retardé relativement au précédent de 360° , ce qui fait qu'ils arrivent tous en phase, et nous avons un autre faisceau important dans cette direction! Il est facile d'éviter ceci en pratique, car il est possible de rapprocher les dipôles jusqu'à une distance inférieure à une longueur d'onde. Si nous mettons davantage d'antennes, de distances inférieures à une longueur d'onde, ce phénomène ne peut pas se produire. Mais le fait que ceci *puisse* se passer pour certains angles, si l'espacement est plus grand qu'une longueur d'onde, est un phénomène très intéressant et utile dans d'autres applications – non pas l'émission radio, mais dans les *réseaux de diffraction*.

29-5 Les mathématiques de l'interférence

Nous avons maintenant terminé notre analyse des phénomènes des dipôles rayonnants d'un point de vue qualitatif, et nous devons apprendre comment les calculer quantitativement. Pour trouver l'effet de deux sources dans une direction particulière, dans le cas le plus général où les deux oscillateurs ont une certaine phase relative intrinsèque a l'un par rapport à l'autre et des intensités A_1 et A_2 inégales, nous trouvons que nous devons additionner deux cosinus ayant la même fréquence, mais avec des phases différentes. Il est facile de trouver cette différence de phase; elle est formée d'un retard dû à la différence en distance, et de

la différence de phase intrinsèque de l'oscillation. Mathématiquement nous devons trouver la somme R de deux ondes: $R = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$. Comment faisons-nous?

C'est en réalité très simple, et nous supposons que nous savons déjà le faire. Cependant nous donnerons la procédure avec quelques détails. Nous pouvons d'abord, si nous sommes habiles en mathématiques et si nous en savons suffisamment sur les cosinus et les sinus, le calculer directement. Le cas le plus simple est celui où A_1 et A_2 sont égaux, par exemple tous les deux égaux à A . Dans ces circonstances (nous pourrions appeler ceci la méthode de résolution trigonométrique), nous avons

$$R = A[\cos(\omega t + \phi_1) + \cos(\omega t + \phi_2)]. \quad (29.9)$$

Dans notre cours de trigonométrie, il se peut que nous ayons un jour appris la règle que

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B). \quad (29.10)$$

Si nous savons cela, alors nous pouvons immédiatement écrire R sous la forme

$$R = 2A \cos \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) \cos(\omega t + \frac{1}{2}\phi_1 + \frac{1}{2}\phi_2). \quad (29.11)$$

Ainsi nous trouvons que nous avons une onde qui oscille avec une nouvelle phase et une nouvelle amplitude. En général, le résultat *sera* une onde qui oscille avec une nouvelle amplitude A_R , que nous appelons l'amplitude résultante, oscillant à la même fréquence mais avec une différence de phase ϕ_R , appelée la phase résultante. En fonction de cela, notre cas particulier donne le résultat suivant: l'amplitude résultante est égale à

$$A_R = 2A \cos \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2), \quad (29.12)$$

et la phase résultante est la moyenne des deux phases, et nous avons complètement résolu notre problème.

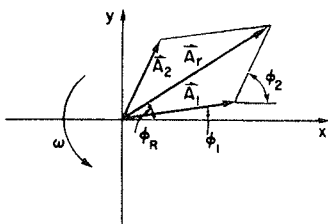


Fig. 29-9. Une méthode géométrique pour combiner deux ondes en cosinus. On considère que le diagramme entier tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre à une fréquence angulaire ω .

Supposez maintenant que nous ne puissions nous rappeler que la somme de deux cosinus est égale au double du cosinus de la moitié de la somme que multiplie le cosinus de la moitié de la différence. Nous pouvons alors utiliser une autre méthode de calcul qui est plus géométrique. Toute fonction cosinus de ωt peut être considérée comme la projection horizontale d'un *vecteur tournant*. Supposez qu'il y ait un vecteur A_1 de longueur A_1 tournant avec le temps, de telle sorte que son angle avec l'axe horizontal soit $\omega t + \phi_1$. (Nous oublierons le ωt pour un instant, et nous verrons que cela n'a pas d'importance.) Supposez que nous prenions une photographie instantanée au temps $t = 0$, bien qu'en fait la figure tourne avec la fréquence angulaire ω , (Fig. 29-9). La projection

de A_1 le long de l'axe horizontal est précisément $A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$. Or pour $t = 0$ la deuxième onde peut être représentée par un autre vecteur, A_2 , de longueur A_2 , d'angle ϕ_2 , et qui tourne lui aussi. Ils tournent tous les deux avec la même vitesse angulaire ω , et de ce fait les positions *relatives* de ces deux vecteurs sont fixes. Le système tourne comme un corps rigide. La projection horizontale de A_2 est $A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$. Mais nous savons, par la théorie des vecteurs, que si nous additionnons les deux vecteurs de la manière ordinaire par la règle du parallélogramme, et traçons le vecteur résultant A_R , la composante x de la résultante est la somme des composantes x des deux autres vecteurs. Ceci résout notre problème. Il est facile de vérifier que ceci donne le résultat correct, pour le cas particulier que nous avons traité ci-dessus, où $A_1 = A_2 = A$. Dans ce cas, nous voyons à partir de la Figure 29-9 que A_R se trouve à mi-distance entre A_1 et A_2 et forme un angle $\frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_1)$ avec chacun. De ce fait, nous voyons que $A = 2A \cos \frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_1)$, comme précédemment. De même, comme nous le voyons à partir du triangle, la phase de A_R , lorsqu'il tourne, est la moyenne des angles de A_1 et A_2 lorsque les amplitudes sont égales. Manifestement, nous pouvons également résoudre d'une manière aussi facile le cas où les amplitudes ne sont pas égales. Nous pouvons appeler ceci la méthode *géométrique* de résolution du problème.

Il y a encore une autre méthode de résolution, c'est la méthode *analytique*. C'est-à-dire qu'au lieu de tracer effectivement un schéma tel que la Fig. 29-9, nous pouvons écrire quelque chose qui dit la même chose que le schéma : au lieu d'écrire les vecteurs, nous écrivons un *nombre complexe* pour représenter chacun des vecteurs. Les parties réelles des nombres complexes sont les quantités physiques réelles. Et ainsi dans notre cas particulier les ondes peuvent être écrites de cette manière : $A_1 e^{i(\omega t + \phi_1)}$ [la partie réelle de ceci est $A \cos(\omega t + \phi_1)$] et $A_2 e^{i(\omega t + \phi_2)}$. Nous pouvons ensuite additionner les deux :

$$R = A_1 e^{i(\omega t + \phi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \phi_2)} = (A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2}) e^{i\omega t} \quad (29.13)$$

ou

$$\hat{R} = A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2} = A_R e^{i\phi_R}. \quad (29.14)$$

Notre problème est alors résolu, parce que le résultat se présente sous la forme d'un nombre complexe de grandeur A_R et de phase ϕ_R .

Pour voir comment marche cette méthode, essayons de trouver l'amplitude A_R qui est la « longueur » de $\hat{R}$. Pour obtenir la « longueur » d'une quantité complexe, nous multiplions toujours la quantité par son complexe conjugué, ce qui donne le carré de la longueur. Le complexe conjugué est la même expression, mais avec le signe de i renversé. Nous avons donc

$$A_R^2 = (A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2})(A_1 e^{-i\phi_1} + A_2 e^{-i\phi_2}). \quad (29.15)$$

En développant ceci, nous obtenons $A_1^2 + A_2^2$ (ici les e se simplifient), et pour le terme croisé nous obtenons

$$A_1 A_2 (e^{i(\phi_1 - \phi_2)} + e^{i(\phi_2 - \phi_1)}).$$

Or

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta + \cos \theta - i \sin \theta.$$

C'est-à-dire, $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$. Notre résultat final est donc

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1). \quad (29.16)$$

Comme nous le voyons, ceci est en accord avec la longueur de A_R à la Fig. 29-9, d'après les règles de trigonométrie.

Ainsi la somme des deux effets a l'intensité A_1^2 que nous obtiendrions avec l'un seul, plus l'intensité A_2^2 que nous obtiendrions avec l'autre seul, plus une correction. Nous appelons cette correction l'*effet d'interférence*. Ce n'est en réalité que la différence entre ce que nous obtiendrions en ajoutant les intensités, et ce que nous obtenons effectivement. Nous l'appelons interférence parce que c'est positif ou négatif. (L'interférence dans le langage habituel suggère habituellement une opposition ou un empêchement, mais en physique il arrive souvent que nous n'utilisions pas le langage dans son sens premier!) Si le terme d'interférence est positif, nous appelons ce cas une interférence *constructive*, ce qui est horrible aux oreilles de n'importe qui d'autre qu'un physicien! Le cas opposé est appelé une interférence *destructive*.

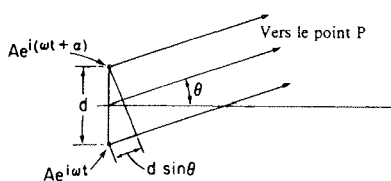


Fig. 29-10. Deux oscillateurs d'amplitudes égales, ayant entre eux une différence de phase α .

Voyons maintenant comment appliquer notre formule générale (29.16) dans le cas de deux oscillateurs, aux configurations particulières que nous avons déjà étudiées qualitativement. Pour appliquer cette formule générale, il suffit de trouver quelle différence de phase $\phi_1 - \phi_2$, existe entre les signaux arrivant en un point donné. (Seule compte la différence de phase bien sûr, et non de la phase elle-même.) Aussi considérons le cas où les deux oscillateurs, d'amplitudes égales, sont séparés d'une certaine distance d et ont une certaine phase relative intrinsèque α . (Lorsque l'un a une phase nulle, la phase de l'autre est égale à α .) Alors nous demandons quelle sera l'intensité dans une certaine direction azimuthale θ , par rapport à la droite E — O. [Remarquez que ceci n'est pas le même θ qui apparaît dans (29.1). Nous avons le choix entre utiliser un symbole non conventionnel tel que $\mathcal{U}$, ou utiliser le symbole conventionnel θ (Fig. 29-10).] La relation de phase est trouvée en remarquant que la différence des distances de P aux deux oscillateurs est $d \sin \theta$, de telle sorte que la contribution à la différence de phase de ce terme est le nombre de longueurs d'ondes dans $d \sin \theta$, multiplié par 2π . (Ceux qui préfèrent des solutions plus élégantes peuvent multiplier le nombre d'ondes k , qui est le taux de changement de phase avec la distance, par $d \sin \theta$; c'est exactement la même chose.) La différence de phase due à la différence de distance est alors $2\pi d \sin \theta / \lambda$, mais à cause des oscillateurs il y a une phase supplémentaire α . Ainsi la différence de phase à l'arrivée sera

$$\phi_2 - \phi_1 = \alpha + 2\pi d \sin \theta / \lambda. \quad (29.17)$$

Ceci rend compte de tous les cas. Aussi tout ce que nous devons faire est de substituer cette expression dans (29.16) pour le cas $A_1 = A_2$, et nous pouvons calculer les divers résultats pour deux antennes d'égale intensité.

Voyons maintenant ce qui se passe dans nos divers cas. La raison pour laquelle, par exemple, l'intensité est 2 à 30° à la Fig. 29-5 est la suivante: les deux oscillateurs sont à une distance $\frac{1}{2}\lambda$, ainsi à 30° , $d \sin \theta = \lambda/4$. Donc $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\lambda/4\lambda = \pi/2$, et ainsi le terme d'interférence est nul. (Nous additionnons deux vecteurs à 90° .) Le résultat est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, à 45° , qui est égale à $\sqrt{2}$ fois l'amplitude unité; en l'élevant au carré, nous obtenons le double de l'intensité d'un seul oscillateur. Tous les autres cas peuvent être calculés de la même manière.

Diffraction

30-1 L'amplitude résultante due à n oscillateurs égaux	30-5 Films colorés; cristaux
30-2 Le réseau de diffraction	30-6 Diffraction par des écrans opaques
30-3 Pouvoir de résolution d'un réseau	30-7 Le champ d'un plan de charges qui oscillent
30-4 L'antenne parabolique	
-

30-1 L'amplitude résultante due à n oscillateurs égaux

Ce chapitre est une suite directe du précédent, bien que l'on soit passé du titre d'*Interférence* à celui de *Diffraction*. Personne n'a encore jamais été capable de définir d'une manière satisfaisante la différence entre interférence et diffraction. C'est simplement une question d'usage, et il n'y a pas de différence spécifique, physiquement importante, entre elles. Le mieux que nous puissions faire, grossièrement parlant, est de dire que lorsqu'il n'y a que quelques sources, disons deux, qui se juxtaposent, alors le résultat est habituellement appelé interférence, mais s'il y en a un très grand nombre, il semble que le mot diffraction soit plus souvent utilisé. Ainsi nous ne nous préoccupons pas de savoir s'il s'agit d'interférence ou de diffraction, mais nous reprendrons directement le sujet là où nous l'avons laissé au chapitre précédent.

Ainsi nous allons maintenant étudier le cas où il y a n oscillateurs également espacés, tous d'amplitudes égales, mais avant chacun des phases différentes, soit parce qu'ils sont pilotés avec des phases différentes, soit parce que nous les regardons sous un certain angle de telle sorte que les temps de propagation soient différents entre eux. Pour une raison ou pour une autre, il nous faut additionner quelque chose comme ceci :

$$R = A[\cos \omega t + \cos(\omega t + \phi) + \cos(\omega t + 2\phi) + \cdots + \cos(\omega t + (n - 1)\phi)], \quad (30.1)$$

où ϕ est la différence de phase entre un oscillateur et le suivant, pour une certaine direction d'observation. Précisément $\phi = a + 2\pi d \sin \theta / \lambda$. Nous devons maintenant ajouter tous ces termes. Nous ferons ceci géométriquement. Le premier est de longueur A , et sa phase est nulle. Le suivant est également de longueur A et il a une phase égale à ϕ . Le suivant encore possède une longueur A , et il a une phase égale à 2ϕ , etc. Ainsi nous parcourons d'une manière évidente un polygone d'angles égaux avec n côtés (Fig. 30-1).

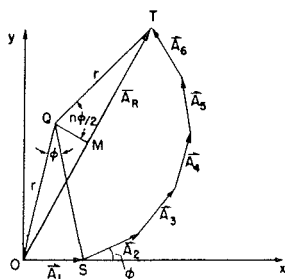


Fig. 30-1. L'amplitude résultante de $n = 6$ sources également espacées avec des différences de phase successives totales égales à Φ .

Les sommets, bien sûr, sont tous sur un cercle, et nous pouvons très facilement trouver l'amplitude résultante si nous connaissons le rayon de ce cercle. Supposons que Q soit le centre du cercle. Alors nous savons que l'angle OQS est tout simplement un angle de phase φ . (Du fait que le rayon QS se comporte géométriquement de la même façon par rapport à A_2 que QO par rapport à A_1 , ils forment un angle φ entre eux.) De ce fait le rayon r doit être tel que $A = 2r \sin \varphi/2$, ce qui fixe r . Mais le grand angle OQT est égal à $n\varphi$, et nous trouvons donc que $A_R = 2r \sin n\varphi/2$. Combinant ces deux résultats pour éliminer r , nous obtenons

$$A_R = A \frac{\sin n\varphi/2}{\sin \varphi/2}. \quad (30.2)$$

L'intensité résultante est donc

$$I = I_0 \frac{\sin^2 n\varphi/2}{\sin^2 \varphi/2}. \quad (30.3)$$

Analysons maintenant cette expression et étudions certaines de ses conséquences. En premier lieu, nous pouvons la vérifier pour $n = 1$. Elle est correcte: $I = I_0$. Ensuite, nous la vérifions pour $n = 2$: écrivant $\sin \varphi = 2 \sin \varphi/2 \cos \varphi/2$, nous trouvons que $A_R = 2A \cos \varphi/2$, ce qui est en accord avec (29.12).

L'idée qui nous a conduit à considérer l'addition de différentes sources était que nous pourrions obtenir une intensité plus importante dans une direction que dans une autre; que les maxima voisins qui auraient été là s'il n'y avait eu que deux sources, diminueraient alors en intensité. Afin d'observer cet effet, nous traçons la courbe correspondant à (30.3), prenant n extrêmement élevé et traçant la région voisine de $\varphi = 0$. En premier lieu, si φ est exactement 0, nous avons 0/0, mais si φ est infinitésimal, le rapport du carré des sinus est simplement égal à n^2 , puisque le sinus et l'angle sont approximativement égaux. Ainsi l'intensité du maximum de la courbe est égale à n^2 fois l'intensité d'un oscillateur. C'est facile à voir puisque, lorsqu'ils sont tous en phases, les petits vecteurs sont tous alignés et ces n vecteurs s'additionnent de telle sorte que l'amplitude soit n fois, et l'intensité n^2 fois plus forte.

Lorsque la phase φ augmente, le rapport des deux sinus commence à diminuer et il atteint pour la première fois zéro lorsque $n\varphi/2 = \pi$, puisque $\sin \pi = 0$. En d'autres termes, $\varphi = 2\pi/n$ correspond au premier minimum de la courbe (Fig. 30-2). En termes de ce qui se passe avec les flèches à la Fig. 30-1, le premier minimum apparaît lorsque toutes les flèches reviennent au point de départ; cela signifie que l'angle total formé

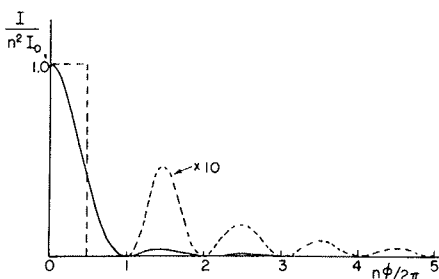


Fig. 30-2. L'intensité en fonction de l'angle de phase pour un grand nombre d'oscillateurs d'égale importance.

par toutes les flèches, la différence totale de phase entre le premier et le dernier oscillateur doit être 2π pour faire un tour sur le cercle.

Nous parvenons maintenant au maximum suivant, et nous voulons vérifier qu'il est effectivement beaucoup plus petit que le premier, comme nous l'avions espéré. Nous n'atteindrons pas précisément la position du maximum parce que le numérateur et le dénominateur de (30.3) varient simultanément, mais $\sin \varphi/2$ varie assez lentement en comparaison de $\sin n\varphi/2$ lorsque n est grand, ce qui fait que lorsque $\sin n\varphi/2 = 1$ nous sommes extrêmement proches de ce maximum. Le maximum suivant de $\sin^2 n\varphi/2$ apparaît à $n\varphi/2 = 3\pi/2$, ou $\varphi = 3\pi/n$. Ceci correspond à des flèches ayant parcouru le cercle une fois et demie. En faisant $\varphi = 3\pi/n$ dans la formule pour trouver la valeur de ce maximum, nous découvrons que $\sin^2 3\pi/2 = 1$ au numérateur (puisque c'est pour cette raison que nous avons choisi cet angle), et au dénominateur nous avons $\sin^2 3\pi/2n$. Si maintenant n est suffisamment grand, alors cet angle est extrêmement petit et le sinus est égal à l'angle; ainsi pour toute application pratique, nous pouvons écrire $\sin 3\pi/2n = 3\pi/2n$. Nous trouvons donc que l'intensité de ce maximum est $I = I_0 (4n^2/9\pi^2)$. Mais $n^2 I_0$ était l'intensité maximum et nous avons donc $4/9\pi^2$ fois l'intensité du maximum, ce qui vaut environ 0,047, moins de 5 pour cent de l'intensité maximum! Bien entendu, il y a plus loin des intensités qui diminuent encore. Nous avons donc un maximum central très aigu avec des maxima secondaires latéraux extrêmement faibles.

Il est possible de prouver que la surface de toute la courbe, en tenant compte de toutes les petites remontées, est égale à $2\pi n I_0$, ou deux fois la surface du rectangle en pointillé sur la Fig. 30-2.

Voyons maintenant comment nous pouvons appliquer l'équation (30.3) dans différentes circonstances, et essayer de comprendre ce qui se passe. Supposons que toutes les sources soient en ligne, comme elles sont tracées sur la Fig. 30-3. Il y en a n , toutes séparées d'une distance d , et nous supposons que la phase relative intrinsèque de l'une par rapport à la suivante est α . Si nous observons dans une direction donnée θ mesurée à partir de la normale, cela introduit un

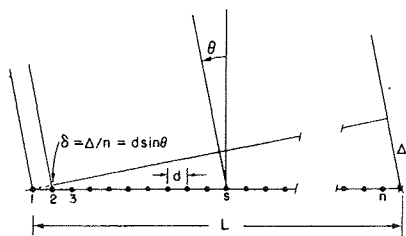


Fig. 30-3. Un réseau linéaire de n oscillateurs égaux pilotés avec des phases $\alpha_s = s\alpha$.

angle de phase supplémentaire $2\pi d \sin \theta / \lambda$ à cause du retard entre chaque oscillateur successif dont nous avons parlé précédemment. Ainsi

$$\begin{aligned}\phi &= \alpha + 2\pi d \sin \theta / \lambda \\ &= \alpha + kd \sin \theta.\end{aligned}\tag{30.4}$$

Nous prendrons d'abord le cas $\alpha = 0$. C'est-à-dire, tous les oscillateurs sont en phase et nous voulons savoir quelle est la forme de l'intensité en fonction de l'angle θ . Pour le trouver, il nous suffit d'écrire $\phi = kd \sin \theta$ dans la formule (30.3) et de voir ce qui se passe. Il y a tout d'abord un maximum, lorsque $\phi = 0$. Ceci signifie que lorsque tous les oscillateurs sont en phase, l'intensité est très grande dans la direction $\theta = 0$. D'un autre côté, une question intéressante se pose: où est le premier minimum? Celui-ci apparaît lorsque $\phi = 2\pi/n$. En d'autres termes, lorsque $2\pi d \sin \theta / \lambda = 2\pi/n$, nous obtenons le premier minimum de la courbe. Si nous éliminons les 2π afin de voir plus clair, nous obtenons

$$nd \sin \theta = \lambda.\tag{30.5}$$

Essayons maintenant de comprendre physiquement pourquoi nous obtenons un minimum à cet endroit: nd est la longueur totale L du réseau. Se reportant à la Fig. 30-3, nous voyons que $nd \sin \theta = L \sin \theta = \Delta$. L'équation (30.5) exprime que: lorsque Δ est égal à une *longueur d'onde*, nous obtenons un minimum. Mais pourquoi obtenons-nous un minimum lorsque $\Delta = \lambda$? Parce que les contributions des différents oscillateurs sont alors uniformément distribuées en phase de 0° à 360° . Les flèches (Fig. 30-1) parcourent le cercle complet – nous additionnons des vecteurs égaux dans toutes les directions, et une telle somme est nulle. Ainsi lorsque nous avons un angle tel que $\Delta = \lambda$ nous obtenons un minimum. C'est le premier minimum.

Il y a un autre aspect important de la formule (30.3), qui est que si l'angle ϕ s'accroît de tout multiple de 2π , cela ne modifie pas la formule. Ainsi nous allons obtenir d'autres maxima intenses à $\phi = 2\pi, 4\pi, 6\pi$, etc. Près de chacun de ces grands maxima, le modèle de la Fig. 30-2 se répète. Nous pouvons demander quelle est la circonstance géométrique qui conduit à ces autres grands maxima. La condition est $\phi = 2\pi m$ où m est un nombre entier quelconque. C'est-à-dire $2\pi d \sin \theta / \lambda = 2\pi m$. En divisant par 2π nous voyons que

$$d \sin \theta = m\lambda.\tag{30.6}$$

Ceci ressemble à l'autre formule, (30.5). Non, cette formule était $nd \sin \theta = \lambda$. La différence est qu'ici nous devons considérer les *sources individuelles*, et lorsque nous disons $d \sin \theta = m\lambda$, cela signifie que nous avons un angle θ tel que $\delta = m\lambda$. En d'autres termes, chaque source contribue maintenant pour une certaine part et des sources successives ont un déphasage égal à un multiple entier de 360° , de ce fait elles contribuent *en phase*, car être déphasé de 360° c'est comme se trouver en phase. Ainsi elles contribuent toutes en phase et produisent un tout aussi bon maximum que celui pour $m = 0$ étudié auparavant. Les remontées secondaires, l'aspect général de la figure est semblable à son aspect au voisinage de $\phi = 0$, avec exactement les mêmes minima de chaque côté, etc. Ainsi un tel réseau

enverra des faisceaux dans différentes directions – chaque faisceau ayant un maximum central intense et un certain nombre de «lobes latéraux» faibles. On dit que les différents faisceaux intenses sont le faisceau d'ordre zéro, le faisceau d'ordre un, etc., selon la valeur de m . m est appelé *l'ordre* du faisceau.

Nous attirons l'attention sur le fait que si d est plus petit que λ , l'équation (30.6) peut n'avoir aucune solution à l'exception de $m = 0$, de telle sorte que si l'espacement est trop petit, il n'y a qu'un seul faisceau possible, le faisceau d'ordre zéro centré en $\theta = 0$. (Il y a, bien sûr, également un faisceau dans la direction opposée.) Pour obtenir des maxima secondaires importants, nous devons avoir un espacement d du réseau plus grand qu'une longueur d'onde.

30-2 Le réseau de diffraction

Sur des réalisations techniques d'antennes et de fils, il est possible de faire en sorte que toutes les phases des oscillateurs ou des antennes soient égales. Comment pouvons-nous réaliser une chose semblable avec la lumière? Nous ne pouvons pas à l'heure actuelle fabriquer au sens propre de petites stations émettrices de fréquence optique, les relier à des fils infiniment petits et les piloter toutes avec une phase donnée. Mais il existe une façon très simple d'arriver au même résultat.

Supposez que nous ayons un ensemble de fils parallèles, également espacés d'une distance d et une source de radiofréquence extrêmement éloignée, pratiquement à l'infini, qui envoie un champ électrique arrivant en chacun de ces fils avec la même phase (elle est tellement éloignée que le temps de propagation est le même pour tous les fils). (On peut également considérer le cas de réseaux courbes, mais prenons le cas d'un réseau plan.) Alors le champ électrique externe va faire osciller les électrons dans chaque fil. C'est-à-dire que le champ qui vient de la source originale va faire bouger les électrons et que ceux-ci, en bougeant, deviennent de *nouveaux générateurs*. Ce phénomène est appelé diffusion: un onde de lumière venant d'une certaine source peut induire un mouvement des électrons dans un morceau de matériau et ces mouvements engendrent leurs propres ondes. Il est donc seulement nécessaire de disposer un ensemble de fils également espacés, de les piloter avec une source de radiofréquence extrêmement éloignée et nous avons la configuration désirée sans les complications de câblages multiples et spéciaux. Si l'incidence est normale, les phases seront égales et nous obtenons exactement le cas déjà étudié. Si l'espacement des fils est plus grand que la longueur d'onde, nous obtiendrons une intensité de diffusion importante dans la direction normale et dans certaines directions données par (30.6).

Ceci peut être également réalisé avec la lumière! A la place de fils, nous utilisons un morceau de verre plat et traçons sur lui des entailles de telle sorte que chacune de ces entailles diffuse un peu différemment du reste du verre. Si maintenant nous envoyons de la lumière sur le verre, chacun de ces sillons représentera une source, et si nous espaçons de très peu les lignes, mais d'une distance qui n'est pas inférieure à une longueur d'onde (ce qui est de toute façon pratiquement impossible du point de vue technique), nous nous attendons alors à un phénomène miraculeux: la lumière non seulement traversera directement, mais on observera également un faisceau intense faisant un certain angle qui dépend de l'espacement des sillons! De tels objets sont effectivement fabriqués et sont d'usage courant – ils sont appelés des *réseaux de diffraction*.

Dans l'une de ces formes, un réseau de diffraction n'est rien de plus qu'une plaque de verre plane transparente et incolore, portant des entailles. Il y a souvent plusieurs

centaines de traits au millimètre, disposés avec *beaucoup* de soin, de telle sorte qu'ils soient également espacés. L'effet d'un tel réseau peut être observé en utilisant un projecteur qui projette un étroit ruban lumineux vertical (l'image d'une fente) sur un écran. Lorsque nous plaçons le réseau sur le parcours du faisceau, ses traits étant verticaux, nous voyons que la ligne est toujours là, mais que, en plus, de chaque côté, nous avons *une autre* tache importante de lumière *colorée*. C'est, bien sûr, l'image de la fente dispersée dans un large domaine angulaire, parce que l'angle θ dans (30.6) dépend de λ , et que des lumières de couleurs différentes correspondent, comme nous le savons, à des fréquences différentes et donc à des longueurs d'ondes différentes. La plus grande longueur d'onde visible est le rouge, et puisque $d \sin \theta = \lambda$, ceci nécessite un plus grand θ . Et nous trouvons effectivement que le rouge fait un angle plus grand avec l'image centrale! Il doit y avoir également un faisceau de l'autre côté et en effet nous en voyons un sur l'écran. Puis, il peut y avoir une autre solution de (30.6) lorsque $m = 2$. Nous voyons qu'on distingue vaguement à cet endroit quelque chose de très faible et qu'il y a même d'autres faisceaux au-delà.

Nous venons de démontrer que tous ces faisceaux doivent être de la même intensité, mais nous voyons qu'en réalité ils ne le sont pas, et en fait le premier sur la droite n'est même pas égal au premier sur la gauche! La raison est que le réseau a été construit précisément pour obtenir cela. Comment? Si le réseau était formé de très fins sillons, d'une largeur infinitésimale, espacés de la même manière, alors toutes les intensités seraient égales. Mais, en réalité, bien que nous ayons pris le cas le plus simple, nous aurions pu également considérer un réseau de *paires* d'antennes, dans lequel chaque membre de la paire a une certaine intensité et une certaine phase relative. Dans ce cas, il est possible d'obtenir des intensités qui sont différentes dans les ordres différents. Un réseau est souvent fabriqué avec des entailles en « dents de scie », au lieu de petits sillons symétriques. En arrangeant avec soin les « dents de scie », on peut faire en sorte que plus de lumière soit envoyé dans un ordre particulier du spectre que dans les autres. Dans un réseau particulier, nous aimerions avoir autant de lumière que possible dans un des ordres. Ceci peut sembler compliqué à introduire, mais c'est une chose très intelligente à faire, parce qu'elle rend le réseau plus utile.

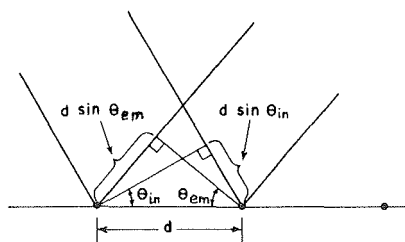


Fig. 30-4. La différence de marche pour les rayons diffusés par des traits adjacents d'un réseau est égale à $d \sin \theta_{em} - d \sin \theta_{in}$.

Jusqu'à présent, nous avons considéré le cas où toutes les phases des sources sont égales. Nous avons également une formule pour φ lorsque les phases diffèrent de l'une à l'autre d'un angle α . Ceci nécessite de câbler nos antennes avec une légère différence de phase entre chacune d'elles. Pouvons-nous le réaliser avec de la lumière? Oui, nous pouvons le faire très facilement, car supposez une source de lumière à l'infini *dans une certaine direction* telle que la lumière arrive sous un angle θ_{in} et disons que nous voulions étudier le faisceau diffusé qui quitte sous un angle θ_{em} . Le θ_{em} est le même θ que nous avions auparavant, mais le θ_{in} est simplement un moyen de faire en sorte que la phase de chaque source soit

différente: la lumière venant de la source distante frappe d'abord un des traits, ensuite le suivant, puis le suivant, etc., avec une différence de phase de l'un à l'autre, qui comme nous le voyons est $a = -d \sin \theta_{in}/\lambda$. Ainsi, nous avons la formule pour un réseau dans laquelle la lumière à la fois pénètre et sort sous un certain angle:

$$\phi = 2\pi d \sin \theta_{em}/\lambda - 2\pi d \sin \theta_{in}/\lambda. \quad (30.7)$$

Essayons de trouver dans ce cas dans quelles directions nous obtenons une forte intensité. La condition pour obtenir une forte intensité est bien sûr que ϕ soit un multiple de 2π . Il y a plusieurs points intéressants à noter.

Un cas assez intéressant est celui qui correspond à $m = 0$, où d est inférieur à λ ; en fait, c'est la seule solution. Dans ce cas nous voyons que $\sin \theta_{em} = \sin \theta_{in}$, ce qui signifie que la lumière sort dans la *même direction* que la lumière qui excite le réseau. Nous pourrions penser que la lumière ne fait que «traverser». Non, il s'agit d'une *lumière différente*. La lumière qui traverse directement provient de la source initiale; ce dont nous parlons est la nouvelle lumière *qui est engendrée par diffusion*. Il apparaît que la lumière diffusée va dans la même direction que la lumière incidente, en fait elle peut interférer avec elle – un aspect que nous étudierons plus tard.

Il y a une autre solution pour ce même cas. Pour un certain θ_{in} , θ_{em} peut être le *supplémentaire* de θ_{in} . Ainsi non seulement nous obtenons un faisceau dans la même direction que le faisceau incident, mais également dans une autre direction qui, si nous la considérons avec soin, est telle que l'*angle d'incidence est égal à l'angle de diffusion*. Nous appelons ceci le *faisceau réfléchi*.

Ainsi nous commençons de comprendre le mécanisme de base de la réflexion: la lumière incidente engendre le mouvement des atomes dans le réflecteur, le réflecteur alors engendre une *nouvelle onde*, et une des solutions pour la direction de la diffusion, la *seule* solution si l'espacement des centres diffuseurs est petit en comparaison d'une longueur d'onde est que l'angle de retour de la lumière soit égal à l'angle d'arrivée.

Nous allons traiter ensuite le cas particulier où $d \rightarrow 0$. C'est-à-dire le cas où nous avons simplement un morceau de matériau solide, mais de longueur finie. En plus nous voulons que le déphasage d'un centre diffuseur au suivant tende vers zéro. En d'autres termes, nous plaçons de plus en plus d'antennes entre celles déjà présentes de telle sorte que chaque différence de phase diminue, mais que le nombre d'antennes augmente de telle manière que la différence totale de phases entre une extrémité de la ligne et l'autre soit constante. Voyons ce que devient (30.3) si nous gardons constante la différence de phase $n\phi$ entre les deux extrémités (disons $n\phi = \varphi$), tout en faisant tendre le nombre n vers l'infini et tendre la différence de phase ϕ entre deux voisines vers zéro. φ est maintenant si petit que $\sin \varphi = \varphi$ et si nous reconnaissons également que $n^2 I_0$ est égal à I_m , l'intensité maximum du centre du faisceau, nous trouvons

$$I = 4I_m \sin^2 \frac{1}{2}\Phi/\Phi^2. \quad (30.8)$$

Ce cas limite est montré sur la Fig. 30-2.

Dans de telles circonstances nous trouvons le même type général de courbe que pour un espacement fini avec $d > \lambda$; tous les lobes latéraux sont pratiquement les mêmes que précédemment, mais il n'y a pas de maxima d'ordres plus élevés. Si tous les centres diffuseurs sont tous en phase, nous obtenons un maximum dans la direction $\theta_{em} = 0$, et un minimum lorsque la distance Δ est égale à λ , exactement comme pour les valeurs finies de d et de n . Ainsi nous pouvons même analyser une distribution *continue* de centres diffuseurs ou d'oscillateurs, en utilisant des intégrales à la place des additions.

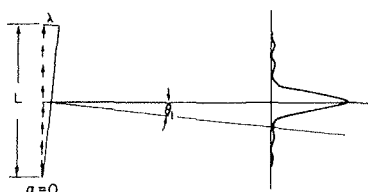


Fig. 30-5. La distribution en intensité d'une ligne continue d'oscillateurs possède un seul maximum intense et de nombreux « lobes » faibles.

Comme exemple, supposez qu'il y ait une longue rangée d'oscillateurs alignés avec des charges oscillant dans la direction de l'alignement (Fig. 30-5). Pour un tel réseau, la plus grande intensité est obtenue dans une direction perpendiculaire à la ligne d'oscillateurs. Il y a un petit peu d'intensité au-dessus et en dessous du plan équatorial, mais elle est extrêmement faible. Avec ces résultats, nous pouvons traiter une disposition expérimentale beaucoup plus compliquée. Supposez que nous ayons un ensemble de droites semblables, chacune ne produisant un faisceau que dans un plan perpendiculaire.

Trouver l'intensité dans différentes directions provenant d'une série de long fils, au lieu de fils infinitésimaux, est le même problème que pour des fils infinitésimaux, aussi longtemps que nous sommes dans le plan central perpendiculaire au fil; nous additionnons simplement les contributions de chacun des longs fils. C'est pourquoi, bien que nous n'ayons en réalité étudié que de petites antennes, nous aurions pu également utiliser un réseau avec des fentes longues et étroites. Chacune des fentes longues ne produit un effet que dans sa propre direction, non vers le haut ou vers le bas, mais elles sont toutes placées les unes à côté des autres horizontalement, et ainsi elles interfèrent.

Nous pouvons ainsi établir des dispositions plus compliquées en ayant des distributions différentes de centres diffuseurs sur une droite, dans un plan ou dans l'espace. La première chose que nous avons fait était de considérer des centres diffuseurs alignés et nous avons simplement étendu l'analyse à des bandes; nous pouvons traiter tous les cas en faisant simplement les sommations nécessaires, ajoutant les contributions de chacun des centres individuels. Le principe est toujours le même

30-3 Pouvoir de résolution d'un réseau

Nous sommes maintenant en mesure de comprendre un certain nombre de phénomènes intéressants. Considérez, par exemple, l'utilisation d'un réseau pour séparer des longueurs d'onde. Nous avons remarqué que le spectre total était dispersé sur l'écran, ainsi un réseau peut être utilisé pour séparer la lumière en ses différentes longueurs d'ondes. Une question intéressante est la suivante: supposez qu'il y ait deux sources de fréquences légèrement différentes ou de longueurs d'ondes légèrement différentes, quel devrait être l'écart entre leurs longueurs d'onde pour que le réseau soit incapable de dire qu'il y a effectivement deux longueurs d'ondes? Le rouge et le bleu étaient clairement séparés. Mais lorsqu'une onde est rouge et l'autre est légèrement plus rouge, très proche, quelle peut être leur séparation

minimum? Ceci est appelé le *pouvoir de résolution* du réseau, et une manière d'analyser le problème est la suivante. Supposons que pour la lumière d'une certaine couleur nous ayons un maximum du faisceau diffracté pour un certain angle. Si nous varions la longueur d'onde, la phase $2\pi d \sin \theta / \lambda$ varie également, ce qui fait que nous obtenons, bien sûr, le maximum pour un angle différent. C'est pourquoi le rouge et le bleu sont séparés. Quelle doit être la différence d'angle pour que nous soyons en mesure de la voir? Si les deux maxima sont exactement l'un sur l'autre, nous ne pouvons pas les voir. Si le maximum de l'un est suffisamment éloigné de l'autre, alors nous sommes en mesure de voir qu'il y a une double bosse dans la distribution de la lumière. Afin d'être justement capable de faire apparaître la double bosse dans la distribution de la lumière, le critère simple suivant, appelé *critère de Rayleigh*, est utilisé habituellement (Fig. 30-6). Il faut que le premier minimum de l'une des bosses se trouve au maximum de l'autre. Il est alors très facile de calculer la différence de longueurs d'onde, quand un minimum se trouve sur l'autre maximum. La meilleure manière de le faire est d'opérer géométriquement.

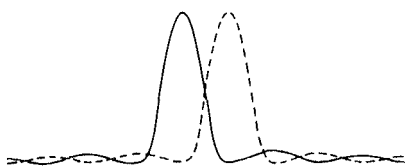


Fig. 30-6. Illustration du critère de Rayleigh. Le maximum d'une distribution tombe sur le premier minimum de l'autre.

Afin d'obtenir un maximum pour la longueur d'onde λ' , la distance Δ (Fig. 30-3) doit être $n\lambda'$, et si nous considérons un faisceau du m^{e} ordre, c'est $mn\lambda'$. En d'autres termes, $2\pi d \sin \theta / \lambda' = 2\pi m$, ce qui fait que $nd \sin \theta$, c'est-à-dire Δ , est égal à λ' multiplié par n , c'est-à-dire à $mn\lambda'$. Pour l'autre faisceau, de longueur d'onde λ , nous voulons avoir un *minimum* à cet angle. C'est-à-dire nous voulons que Δ soit exactement supérieur à $mn\lambda$ d'une longueur d'onde λ . C'est-à-dire $\Delta = mn\lambda + \lambda = mn\lambda'$. Ainsi, si $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$, nous trouvons

$$\Delta\lambda / \lambda = 1 / mn. \quad (30.9)$$

Le rapport $\lambda / \Delta\lambda$ est appelé le *pouvoir de résolution* d'un réseau; nous voyons qu'il est égal au nombre total de lignes dans le réseau que multiplie l'ordre. Il n'est pas difficile de montrer que cette formule est équivalente à la formule disant que l'erreur en fréquence est égale à l'inverse de la différence des temps entre les trajectoires extrêmes qui interfèrent*:

$$\Delta\nu = 1/T.$$

En fait, c'est la meilleure manière de se la rappeler, parce que la formule générale s'applique non seulement aux réseaux, mais aussi à n'importe quel autre instrument, tandis que la formule particulière (30.9) dépend du fait que nous utilisons un réseau.

* Dans notre cas $T = \Delta / c = mn\lambda / c$, où c'est la vitesse de la lumière. La fréquence $\nu = c / \lambda$, ainsi $\Delta\nu = c\Delta\lambda / \lambda^2$.

30-4 L'antenne parabolique

Considérons maintenant un autre problème sur le pouvoir de résolution. Il se rapporte à l'antenne d'un radiotélescope, utilisé pour déterminer la position des radio-sources dans le ciel, c'est-à-dire leurs distances angulaires. Bien entendu, si nous utilisons n'importe quelle vieille antenne et que nous trouvions des signaux, nous ne saurons pas de quelles directions ils viennent. Nous sommes extrêmement intéressés de savoir si la source est en tel endroit ou en tel autre. Une façon de résoudre ce problème consiste à disposer toute une série de fils dipolaires, également espacés, dans la campagne Australienne. Puis nous prenons tous les fils de ces antennes et nous les envoyons dans le même récepteur, de telle manière que tous les retards dans les lignes soient égaux. Ainsi le récepteur reçoit en phase les signaux de tous les dipôles. C'est-à-dire qu'il additionne toutes les ondes de chacun des dipôles avec la même phase. Maintenant que se passe-t-il? Si la source est directement au-dessus du réseau, à l'infini ou pratiquement, alors ces ondes de radio vont exciter toutes les antennes avec la même phase, ce qui fait qu'elles alimentent le récepteur ensemble.

Supposons que la source de radio fasse un petit angle θ avec la verticale. Alors les différentes antennes reçoivent des signaux un petit peu déphasés. Le récepteur additionne tous ces signaux déphasés et ainsi nous n'obtenons rien si l'angle θ est trop grand. Quelle grandeur peut avoir cet angle? *Réponse:* nous obtenons zéro si l'angle $\Delta/L = \theta$ (Fig. 30-3) correspond à une différence de phase de 360° , c'est-à-dire si Δ est égal à la longueur d'onde λ . En effet les contributions vectorielles forment au total un polygone complet avec une résultante nulle. Le plus petit angle qui peut être résolu par un réseau d'antennes de longueur L est $\theta = \lambda/L$. Remarquez que le modèle de réception d'une antenne telle que celle-ci est exactement le même que celui de la distribution de l'intensité que nous obtiendrions si nous transformions le récepteur en émetteur. Ceci est un exemple de ce qu'on appelle le *principe de réciprocité*. Il apparaît, en fait, que si pour n'importe quel arrangement d'antennes, d'angles, etc., nous calculons d'abord quelles sont les intensités relatives dans les diverses directions en supposant que le récepteur soit un émetteur, alors les sensibilités directionnelles relatives du récepteur avec le même câblage externe, le même réseau d'antennes, sont les mêmes que les intensités relatives d'émission lorsque celui-ci est un émetteur.

Certaines antennes de radio sont construites d'une manière différente. Au lieu de disposer tout un ensemble de dipôles le long d'une droite, avec un ensemble de fils d'alimentation, nous pouvons les mettre non pas sur une droite mais sur une courbe, et placer le récepteur en un certain point où il peut détecter les ondes diffusées. Cette courbe est astucieusement dessinée de telle sorte que si les ondes de radio viennent du haut et que les fils diffusent, créant une nouvelle onde, la disposition de ces fils soit telle que les ondes diffusées atteignent le récepteur toutes en même temps (Fig. 26-12). En d'autres termes, la courbe est une *parabole*, et lorsque la source est exactement sur son axe, nous obtenons une très forte intensité au foyer. Dans ce cas, nous comprenons très clairement quelle est le pouvoir de résolution d'un tel instrument. L'arrangement des antennes sur une courbe parabolique n'est pas un point essentiel. C'est simplement une manière commode d'obtenir tous les signaux au même point sans retards relatifs et sans fils qui les conduisent. L'angle qu'un tel instrument peut résoudre est toujours $\theta = \lambda/L$, où L est la séparation entre la première et la dernière antenne. Cela ne dépend pas de l'espacement des antennes et elles peuvent être très proches ou même, en fait, ne former qu'une seule

pièce de métal. Nous sommes en réalité maintenant en train de décrire un miroir de télescope. Nous avons trouvé le pouvoir de résolution d'un télescope! (Quelquefois le pouvoir de résolution est écrit $\theta = 1,22\lambda/L$, où L est le diamètre du télescope. La raison pour laquelle ce n'est pas exactement λ/L est la suivante: lorsque nous avons établi que $\theta = \lambda/L$, nous avons supposé que toutes les intensités des dipôles étaient identiques, mais lorsque nous avons un télescope circulaire, ce qui est la forme de fabrication habituelle d'un télescope, il y a moins de signal venant des bords extérieurs, parce que ce n'est pas une ouverture carrée pour laquelle on obtient la même intensité venant des bords et du centre. Nous obtenons un petit peu moins parce que nous n'utilisons dans ce cas qu'une partie de télescope; nous voyons de ce fait que le diamètre effectif est un petit peu plus petit que le vrai diamètre, ce que nous dit le facteur 1,22. En tout cas, il paraît un petit peu pédant d'introduire une telle précision dans la formule du pouvoir de résolution*.)

30-5 Films colorés; cristaux

Nous venons de voir certains des effets de l'interférence obtenus en additionnant des ondes différentes. Mais il y a beaucoup d'autres exemples, et bien que nous ne comprenions pas le mécanisme fondamental maintenant, — cela arrivera un jour — nous pouvons cependant comprendre maintenant comment les interférences apparaissent. Par exemple, lorsqu'une onde de lumière frappe la surface d'un matériau d'indice n sous, par exemple, une incidence normale, une partie de la lumière est réfléchi. Nous ne sommes pas en mesure de comprendre maintenant la *raison* de cette réflexion; nous la discuterons plus tard. Mais supposez que nous sachions qu'une partie de la lumière est réfléchi à la fois en entrant et en quittant un milieu réfringent. Alors, si nous regardons la réflexion d'une lumière dans un film mince, nous voyons la somme des deux ondes; si les épaisseurs sont suffisamment petites, ces deux ondes vont produire une interférence, constructive ou destructive, selon les signes des phases. Il se peut, par exemple, que pour la lumière rouge nous obtenions une réflexion plus grande que normale, mais que pour la lumière bleue dont la longueur d'onde est différente, nous obtenions peut-être une interférence destructive et donc nous voyons une réflexion rouge brillante. Si nous modifions l'épaisseur, c'est-à-dire si nous regardons en un autre endroit où le film est plus épais, l'effet peut être renversé, le rouge interférant et non le bleu, ce qui fait qu'on voit un bleu brillant ou du vert, ou du jaune ou tout ce que vous voudrez. Nous voyons donc des *couleurs* lorsque nous regardons des films minces et leurs couleurs changent si nous regardons sous des angles différents. En effet nous remarquons que les temps sont différents pour des angles différents. Ainsi nous comprenons soudainement une autre centaine de milliers d'effets colorés lorsque nous regardons des pellicules d'huile, des bulles de savon, etc., sous des angles différents. Mais le principe est toujours le même: nous ne faisons qu'ajouter des ondes de phases différentes.

Comme autre importante application de la diffraction, nous pouvons mentionner ceci. Nous avons utilisé un réseau et nous avons vu l'image diffractée sur un écran. Si nous avons utilisé une lumière monochromatique, la lumière aurait été localisée en un endroit particulier. Il y avait également diverses images d'ordres plus élevés. Des positions de ces images nous pouvions

* C'est dû à ce que le critère de Rayleigh est déjà quelque chose d'approximatif. Il nous indique à quel moment cela devient extrêmement difficile de dire si l'image a été produite par une ou deux étoiles. En réalité, si on peut réaliser des mesures suffisamment précises de la distribution exacte d'intensité sur les taches diffractées, on peut prouver que deux sources composent la tache même si θ est inférieur à λ/L .

déduire la distance des lignes du réseau, si nous connaissons la longueur d'onde de la lumière. De la différence en intensité des différentes images, nous pouvons trouver la forme des entailles du réseau, si le réseau était fait de fils, de sillons en dents de scies ou de quoi que ce soit d'autre, *sans être pour autant capables de les voir*. Ce principe est utilisé pour découvrir les positions des *atomes dans un cristal*. La seule complication est qu'un cristal est à trois dimensions; c'est un réseau périodique d'atomes à trois dimensions. Nous ne pouvons pas utiliser la lumière ordinaire, car nous devons utiliser quelque chose dont la longueur d'onde soit inférieure à la distance entre les atomes, ou sinon nous n'obtenons aucun effet; nous devons donc utiliser un rayonnement de très courte longueur d'onde, c'est-à-dire des rayons X. Ainsi, en envoyant des rayons X sur un cristal et en mesurant l'intensité des réflexions dans les différents ordres, nous pouvons déterminer l'arrangement des atomes à l'intérieur, sans jamais être capables de les voir avec notre œil! C'est de cette manière que nous connaissons l'arrangement des atomes dans diverses substances, ce qui nous a permis de faire ces dessins au premier chapitre, montrant les arrangements des atomes dans le sel, etc. Nous reviendrons plus tard sur ce sujet et nous en parlerons plus en détail, aussi nous ne dirons rien de plus maintenant sur cette idée tout à fait remarquable.

30-6 Diffraction par des écrans opaques

Nous allons traiter maintenant un cas extrêmement intéressant. Supposez que nous ayons une feuille opaque avec des trous dans cette feuille et une lumière d'un côté de la feuille. Nous voulons savoir quelle est l'intensité de l'autre côté. La plupart des gens disent que la lumière est visible au travers des trous et produit un effet de l'autre côté. Il apparaît que l'on obtient la bonne réponse à une excellente approximation, si on suppose qu'il y a des sources distribuées avec une densité uniforme sur l'ouverture du trou, et que les phases de ces sources sont les mêmes que ce qu'elles auraient été si le reste du matériau opaque était absent. Bien sûr, il n'y a *pas* en réalité de sources sur les trous — de plus c'est bien le seul endroit où il n'y a *certainement* pas de sources. Néanmoins, nous obtenons les figures de diffraction correctes en considérant les trous comme étant les seuls endroits où se *trouvent* des sources; c'est un fait assez curieux. Nous expliquerons plus tard pourquoi c'est vrai, mais, pour l'instant, nous allons l'admettre.

Dans la théorie de la diffraction, il y a un autre type de diffraction que nous devrions traiter brièvement. Habituellement, ce n'est pas traité aussi tôt dans un cours élémentaire, car les formules mathématiques nécessaires pour additionner ces petits vecteurs sont

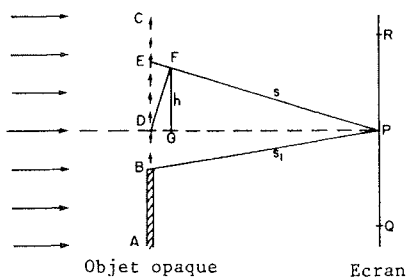


Fig. 30-7. Une source de lumière distante projette l'ombre d'un objet opaque sur un écran.

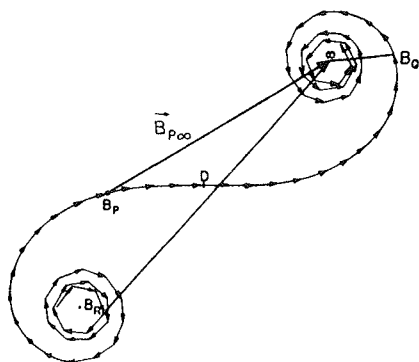


Fig. 30-8. L'addition d'amplitudes pour de nombreux oscillateurs en phase dont les retards de phase varient avec le carré de la distance du point D sur la figure précédente.

un peu difficiles. Sinon c'est exactement la même chose que ce que nous avons fait jusqu'à présent. Tous les phénomènes d'interférence sont les mêmes; il n'y a rien de très compliqué, seules les conditions sont plus compliquées et il est plus difficile d'additionner les vecteurs, c'est tout.

Supposons que nous ayons de la lumière venant de l'infini projetant l'ombre d'un objet. La Fig. 30-7 montre un écran sur lequel l'ombre d'un objet AB est formée par une source de lumière extrêmement éloignée, comparée avec une longueur d'onde. Maintenant nous nous attendons à ce que à l'extérieur de l'ombre, l'intensité soit partout brillante et à l'intérieur qu'elle soit partout sombre. En réalité, si nous traçons l'intensité en fonction de la position près du bord de l'ombre, l'intensité augmente, puis dépasse le maximum, et oscille ensuite d'une manière particulière, près du bord (Fig. 30-9). Nous allons maintenant discuter la raison de ce comportement. Si nous utilisons le théorème que nous n'avons pas encore prouvé, nous pouvons alors remplacer le problème réel par un ensemble de sources effectives uniformément distribuées sur l'espace ouvert au-delà de l'objet.

Nous imaginons un très grand nombre d'antennes extrêmement proches, et nous voulons l'intensité en un certain point P . Cela ressemble tout à fait à ce que nous avons déjà fait. Non, pas tout à fait; parce que notre écran n'est pas à l'infini. Nous ne voulons pas l'intensité à l'infini, mais en un point fini. Pour calculer l'intensité en un endroit particulier, nous devons additionner les contributions de toutes les antennes. Il y a d'abord une antenne en D , exactement en face de P ; si nous allons un petit peu plus haut en angle, disons jusqu'à une hauteur h , le retard augmente (également un changement d'amplitude à cause du changement de distance, mais c'est un très petit effet si nous sommes à une assez grande distance et cet effet est beaucoup moins important que la différence des phases). La différence des trajectoires $EP-DP$ est égale à $h^2/2s$, de telle sorte que la différence de phase est proportionnelle au carré de la distance à partir de D tandis que dans notre calcul précédent s était l'infini, et la différence de phases était linéairement proportionnelle à h . Lorsque les phases sont linéairement proportionnelles, chaque vecteur ajoute un angle constant au vecteur précédent. Ce qu'il nous faut maintenant, c'est une courbe qui soit obtenue en additionnant un ensemble de vecteurs infinitésimaux avec la condition que l'angle qu'ils font augmente, non pas linéairement, mais comme le carré de la longueur de la courbe. Construire cette courbe nécessite des mathématiques légèrement plus difficiles, mais nous pouvons toujours la construire en traçant effectivement les flèches et en mesurant les angles. En tous les cas,

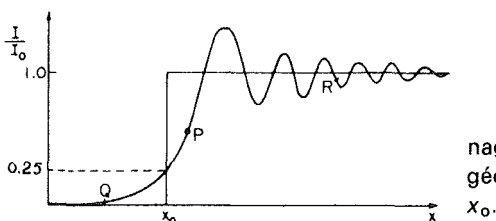


Fig. 30-9. L'intensité au voisinage du bord d'une ombre. Le bord géométrique de l'ombre est situé en x_0 .

nous obtenons la merveilleuse courbe (appelée spirale de Cornu) que l'on voit sur la Fig. 30-8. Comment utilisons-nous cette courbe?

Si nous voulons l'intensité, par exemple au point P , nous additionnons un ensemble de contributions de phases différentes du point D en montant jusqu'à l'infini, et de D en descendant seulement jusqu'au point B_P . Ainsi nous partons de B_P sur la Fig. 30-8, et nous traçons une série de flèches d'angle toujours croissant. La contribution totale au-dessus du point B_P se déplace le long de la courbe en spirale. Si nous devions arrêter l'intégration en un certain endroit, alors l'amplitude totale serait un vecteur allant de B jusqu'en ce point; dans ce problème particulier nous allons à l'infini, ce qui fait que la réponse totale est le vecteur B_{P_∞} . Mais la position de la courbe correspondant au point B_P sur l'objet dépend de l'endroit où P est situé, puisque le point D , le point d'inflexion, correspond toujours à la position du point P . Ainsi, dépendant de l'endroit où P est situé au-dessus de B , le point de départ se trouve en différents endroits dans la partie gauche inférieure de la courbe, et le vecteur résultant B_{P_∞} aura plusieurs maxima et minima (Fig. 30-9).

Par ailleurs, si nous sommes en Q , de l'autre côté de P , alors nous n'utilisons qu'une des extrémités de la spirale, et non l'autre extrémité. En d'autres termes, nous ne commençons même pas en D , mais en B_Q , ce qui fait que de ce côté nous obtenons une intensité qui diminue continuellement lorsque Q s'enfonce plus profondément dans l'ombre.

Un point sur la courbe que nous pouvons calculer facilement tout de suite, pour montrer que nous comprenons réellement ce qui se passe, est l'intensité au point exactement en face du bord. L'intensité ici est égale au quart de celle de la lumière incidente. La raison: Au bord (ainsi le point final B de la flèche est en D à la Figure 30-8) nous avons la moitié de la courbe que nous aurions eue si nous étions loin dans la région brillante. Si notre point R est loin dans la zone lumineuse, nous allons d'une des extrémités de la courbe à l'autre, c'est-à-dire que nous avons un vecteur unité complet; mais si nous sommes au bord de l'ombre, nous avons simplement la moitié de l'amplitude — $1/4$ de l'intensité.

Dans ce chapitre nous avons trouvé l'intensité produite dans différentes directions par diverses distributions de sources. Comme exemple final, nous allons établir une formule dont nous aurons besoin au chapitre suivant sur la théorie de l'indice de réfraction. Jusqu'ici les intensités relatives ont été suffisantes pour ce que nous faisons, mais cette fois nous essayerons de trouver la formule complète du champ dans la configuration suivante.

30-7 Le champ d'un plan de charges qui oscillent

Supposez que nous ayons un plan recouvert de sources oscillant toutes ensemble, avec leur mouvement dans le plan et ayant toutes la même amplitude et la même phase. Quel est le champ à une distance du plan finie très grande? (Nous ne pouvons

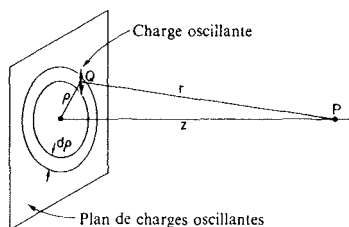


Fig. 30-10. Champ rayonné par une couche de charges qui oscillent.

pas trop nous rapprocher, bien sûr, parce que nous n'avons pas les formules correctes du champ près des sources.) Si nous appelons XY le plan des charges, nous voulons donc trouver le champ en un point P loin sur l'axe des Z (Fig. 30-10). Nous supposons qu'il y a η charges par unité de surface du plan et que chacune d'elles a une valeur q . Toutes les charges se déplacent selon un mouvement harmonique simple, dans la même direction avec la même amplitude et la même phase. Le mouvement de chaque charge par rapport à sa propre position moyenne est donné par $x_0 \cos \omega t$. Ou bien, en utilisant la notation complexe et se souvenant que la partie réelle représente le mouvement effectif, le mouvement peut être décrit par $x_0 e^{i\omega t}$.

Nous cherchons maintenant le champ en un point P créé par toutes les charges, en déterminant le champ à cet endroit provenant de chaque charge q et ensuite en additionnant les contributions de toutes les charges. Nous savons que le champ du rayonnement est proportionnel à l'accélération de la charge, qui est $-\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$ (et qui est la même pour chaque charge). Le champ électrique au point P dû à une charge au point Q est proportionnel à l'accélération de la charge q , mais il faut se souvenir que le champ au point P à l'instant t est donné par l'accélération de la charge au temps antérieur $t' = t - r/c$, où r/c est le temps qu'il faut à l'onde pour parcourir la distance r de Q à P . Ainsi le champ en P est proportionnel à

$$-\omega^2 x_0 e^{i\omega(t-r/c)}. \quad (30.10)$$

Utilisant cette valeur de l'accélération, vue à partir de P , dans notre formule pour le champ électrique à grande distance d'une charge rayonnante, nous obtenons

$$\left(\begin{array}{c} \text{champ électrique en } P \\ \text{de la charge en } Q \end{array} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2 x_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \quad (\text{approximativement}). \quad (30.11)$$

Cette formule n'est pas tout à fait exacte, parce que nous aurions dû utiliser *non pas* l'accélération de la charge, mais *sa composante* perpendiculaire à la droite QP . Nous supposons cependant que le point P est si éloigné en comparaison de la distance du point Q à l'axe (la distance ρ à la Figure 30-9), pour les variations qui nous intéressent, que nous pourrions écarter le facteur cosinus (qui serait de toute façon approximativement égal à 1).

Pour obtenir le champ total en P , nous additionnons maintenant les effets de toutes les charges dans le plan. Nous devrions bien sûr calculer la somme *vectorielle*. Mais puisque la direction du champ électrique est pratiquement la même pour toutes les charges, nous pouvons en gardant l'approximation que nous avons déjà faite, additionner simplement les grandeurs des champs. Avec notre approximation

le champ en P dépend simplement de la distance r , ce qui fait que toutes les charges à la même distance r produisent des champs égaux. Ainsi, nous additionnons d'abord les champs de ces charges dans un anneau de largeur $d\rho$ et de rayon ρ . Ensuite, en prenant l'intégrale sur toutes les valeurs de ρ , nous obtenons le champ total.

Le nombre de charges dans un anneau est le produit de la surface de l'anneau, $2\pi\rho d\rho$, et de η , le nombre de charges par unité de surface. Nous avons donc,

$$\text{Champ total en } P = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2 x_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \cdot \eta \cdot 2\pi\rho d\rho. \quad (30.12)$$

Nous voulons évaluer cette intégrale de $\rho = 0$ à $\rho = \infty$. La variable t , bien sûr, doit être maintenue fixe tandis que nous effectuons l'intégrale, ce qui fait que les seules quantités variables sont ρ et r . En écartant pour le moment tous les facteurs constants, *y compris le facteur $e^{i\omega t}$* , l'intégrale que nous cherchons est

$$\int_{\rho=0}^{\rho=\infty} \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} \rho d\rho. \quad (30.13)$$

Pour calculer cette intégrale, nous devons utiliser la relation entre r et ρ :

$$r^2 = \rho^2 + z^2. \quad (30.14)$$

Puisque z est indépendant de ρ , lorsque nous prenons la différentielle de cette équation, nous obtenons

$$2r dr = 2\rho d\rho,$$

ce qui est heureux, puisque dans notre intégrale nous pouvons remplacer $\rho d\rho$ par $r dr$ et le r va se simplifier avec celui dans le dénominateur. L'intégrale que nous voulons devient plus simple, c'est la suivante:

$$\int_{r=z}^{r=\infty} e^{-i\omega r/c} dr. \quad (30.15)$$

Intégrer une exponentielle est extrêmement facile. Nous divisons par le coefficient de r dans l'exposant et évaluons l'exponentielle aux limites. Mais les limites de r ne sont pas les mêmes que les limites de ρ . Lorsque $\rho = 0$, nous avons $r = z$, ainsi les limites de r sont z et l'infini. Nous obtenons pour l'intégrale

$$- \frac{c}{i\omega} [e^{-i\infty} - e^{-(i\omega/c)z}], \quad (30.16)$$

où nous avons écrit ∞ pour $(r/c) \infty$, puisque tous les deux signifient simplement un très grand nombre!

Or $e^{-i\infty}$ est une quantité mystérieuse. Sa partie réelle, par exemple, est $\cos(-\infty)$ qui, mathématiquement parlant, est complètement indéfinie (bien que nous nous attendions à la trouver quelque part – ou partout (?) – entre $+1$ et -1 !). Mais dans un cas *physique*, cela peut signifier quelque chose d'assez raisonnable et habituellement peut être pris égal à zéro. Pour voir que c'est le cas ici, nous revenons en arrière pour considérer à nouveau l'intégrale initiale (30.15).

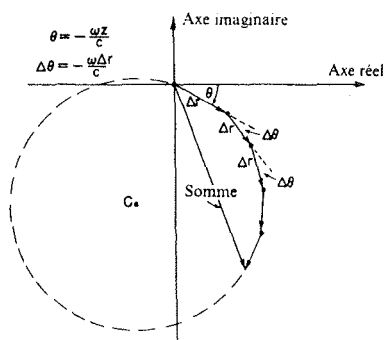


Fig. 30-11. Solution graphique de

$$\int_z^{\infty} e^{-i\omega r/c} dr.$$

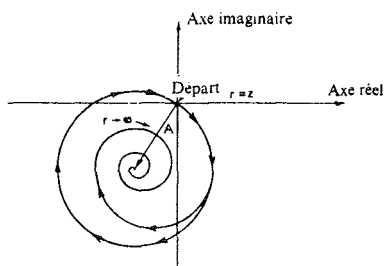


Fig. 30-12. Solution graphique de

$$\int_z^{\infty} \eta e^{-i\omega r/c} dr.$$

Nous pouvons comprendre (30.15) comme une somme d'une très grande quantité de petits nombres complexes, chacun de grandeur Δr , avec l'angle $\theta = -\omega r/c$ dans le plan complexe. Nous pouvons essayer d'évaluer la somme par une méthode graphique. A la Figure 30-11, nous avons tracé les cinq premiers éléments de la somme. Chaque segment de la courbe a la longueur Δr et est tourné d'un angle $\Delta\theta = -\omega\Delta r/c$ par rapport à l'élément précédent. La somme de ces cinq premiers éléments est représentée par la flèche à partir du point de départ jusqu'à la fin du cinquième segment. Lorsque nous continuons d'additionner ces petits éléments, nous traçons un polygone jusqu'à ce que nous revenions au point de départ (approximativement) et puis nous repartons à nouveau pour faire un tour. Ajouter davantage d'éléments revient simplement à tourner en rond en suivant de près un cercle dont on montre facilement que son rayon vaut c/ω . Nous pouvons voir maintenant pourquoi l'intégrale ne donne pas une réponse définie!

Maintenant nous devons revenir à la *physique* de la configuration. Dans tous les cas réels le plan des charges *ne peut pas* être infini en dimension, mais doit s'arrêter à un moment. S'il s'arrêtait brutalement, et était de forme exactement circulaire, notre intégrale aurait une certaine valeur sur le cercle à la Figure 30-11. Si, cependant, nous laissons le nombre de charges dans le plan diminuer progressivement aux grandes distances du centre (ou sinon s'arrêter soudainement mais avec une forme irrégulière, ce qui, pour des valeurs supérieures de ρ , élimine la contribution de l'anneau entier de largeur $d\rho$), alors le coefficient η dans l'intégrale rigoureuse va tendre vers zéro. Puisque nous additionnons des parties de plus en plus petites, mais tournant toujours du même angle, le graphique de notre intégrale deviendra donc une courbe qui est une spirale. La spirale se terminera éventuellement au centre de notre cercle initial, comme il est montré sur la Figure 30-12. L'intégrale correcte du point de vue *physique* est le nombre complexe A représenté dans la figure par l'intervalle entre le point de départ et le centre du cercle et qui est simplement égal à

$$\frac{c}{i\omega} e^{-i\omega z/c}, \quad (30.17)$$

comme vous pouvez le trouver vous-même. C'est le même résultat que nous aurions obtenu à l'équation (30.16) en faisant $e^{-i\infty} = 0$.

(Il y a également une autre raison pour laquelle la contribution à l'intégrale diminue pour des grandes valeurs de r , c'est le facteur que nous avons omis dans la projection de l'accélération sur le plan perpendiculaire à la ligne PQ .)

Nous sommes, bien sûr, uniquement intéressés par des cas physiques et nous prendrons donc $e^{-i\infty}$ égal à zéro. Revenons à notre formule initiale (30.12) pour le champ et réintroduisons tous les facteurs qui accompagnent l'intégrale, nous obtenons le résultat

$$\text{Champ total en } P = - \frac{\eta q}{2\epsilon_0 c} i\omega x_0 e^{i\omega(t-z/c)} \quad (30.18)$$

(se souvenant que $1/i = -i$).

Il est intéressant de remarquer que $(i\omega x_0 e^{i\omega(t-z/c)})$ est tout juste égal à la *vitesse* des charges, de telle sorte que nous pouvons également écrire l'équation pour le champ comme étant

$$\text{Champ total en } P = - \frac{\eta q}{2\epsilon_0 c} [\text{vitesse des charges}]_{\text{à } t = z/c}, \quad (30.19)$$

ce qui est un petit peu étrange, parce que le retard est exactement déterminé par la distance z , qui est la plus courte distance de P au plan de charge. Mais c'est la forme du résultat – heureusement une formule plutôt simple. (Nous pouvons ajouter d'ailleurs que bien que notre démonstration ne soit valable que pour de grandes distances du plan de charges en oscillation, il se trouve que la formule (30.18) ou (30.19) est correcte à toutes distances z , même pour $z < \lambda$.)

L'origine de l'indice de réfraction

31-1 L'indice de réfraction

31-2 Le champ dû au matériau

31-3 Dispersion

31-4 Absorption

31-5 L'énergie transportée par une onde électrique

31-6 Diffraction de la lumière par un écran

31-1 L'indice de réfraction

Nous avons dit précédemment que la lumière se déplace plus lentement dans l'eau que dans l'air, et légèrement plus lentement dans l'air que dans le vide. Cet effet est représenté par l'indice de réfraction n . Maintenant nous aimerions comprendre la raison de cette vitesse plus lente. En particulier, nous voudrions essayer de voir en quoi ceci est relié à certaines hypothèses physiques ou énoncés physiques, émis précédemment et qui étaient les suivants :

- (a) Le champ électrique total dans toute circonstance physique peut toujours être représenté par la somme des champs de toutes les charges dans l'univers.
- (b) Le champ d'une seule charge est *toujours* (pour le champ du rayonnement) donné par son accélération évaluée avec un retard à la vitesse c .

Mais pour un morceau de verre, vous pouvez penser : « Oh ! non, vous devez modifier tout cela. Vous devriez dire que c'est retardé à la vitesse c/n . » Ceci, cependant, n'est pas exact et nous devons comprendre pourquoi.

Il est approximativement vrai que la lumière ou toute onde électrique *semble* se déplacer à la vitesse c/n dans un matériau dont l'indice de réfraction est n , mais les champs sont encore produits par les mouvements de *toutes* les charges – y compris les charges en mouvement dans le matériau – et ces contributions fondamentales du champ se déplacent en définitive à la vitesse c . Notre problème est de comprendre pourquoi se manifeste une vitesse *apparemment* plus lente.

Nous essayerons de comprendre cet effet dans un cas extrêmement simple. Une source que nous appellerons « la source *externe* » est placée à une grande distance d'une plaque mince de matériau transparent, par exemple du verre. Nous cherchons le champ à une grande distance de l'autre côté de la plaque. La situation est illustrée par le diagramme de la Figure 31-1, où on imagine que S et P sont extrêmement éloignés de la plaque. Selon les principes que nous avons énoncés plus haut, un champ électrique n'importe où, loin de toutes les charges en mouvement est la somme (vectorielle) des champs produits par la source externe (en S) et des champs produits par *chacune* des charges dans la plaque

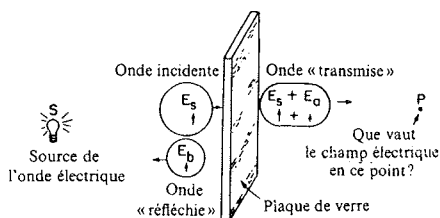


Fig. 31-1. Onde électrique traversant une couche de matériau transparent.

de verre, *chacune avec son propre retard à la vitesse c* . Rappelons que la contribution de chacune des charges n'est pas modifiée par la présence des autres charges. Ce sont nos principes de base. Le champ en P peut donc être écrit ainsi:

$$\mathbf{E} = \sum_{\text{toutes les charges}} \mathbf{E}_{\text{chaque charge}} \quad (31.1)$$

ou

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \sum_{\text{toutes les autres charges}} \mathbf{E}_{\text{chaque charge}} \quad (31.2)$$

où $\mathbf{E}_s$ est le champ dû à la source seule qui serait précisément le champ en P *s'il n'y avait pas de matériau présent*. Nous nous attendons à ce que le champ en P soit différent de $\mathbf{E}_s$ s'il y a tout autre charge en mouvement.

Pourquoi doit-il y avoir des charges en mouvement dans le verre? Nous savons que tous les matériaux sont formés d'atomes qui contiennent des électrons. Lorsque le champ électrique *de la source* agit sur ces atomes, il fait osciller les électrons car il exerce une force sur eux. Et les électrons en mouvement engendrent un champ – ils constituent de nouveaux émetteurs. Ces nouveaux émetteurs sont reliés à la source S , parce qu'ils sont pilotés par le champ de la source. Le champ total n'est pas simplement le champ de la source S , il est modifié par la contribution supplémentaire des autres charges en mouvement. Ceci signifie que le champ n'est pas le même que celui qui était présent en l'absence du verre, mais qu'il est modifié et sa modification est telle qu'il semble se déplacer à l'intérieur du verre à une vitesse différente. C'est cette idée que nous voudrions essayer de préciser quantitativement.

Mais dans le cas général, c'est assez compliqué, parce que bien que nous ayons dit que toutes les autres charges en mouvement sont pilotées par le champ source, ce n'est pas complètement exact. Si nous considérons une charge particulière, elle subit non seulement la source, mais comme tout autre chose dans le monde, elle subit *toutes* les autres charges en mouvement. Elle sent, en particulier, les charges qui se déplacent quelque part ailleurs dans le verre. Ainsi le champ total qui agit sur une *charge particulière* est une combinaison des champs produits par les autres charges, *dont les mouvements dépendent de ce que cette charge particulière est en train de faire!* Vous pouvez deviner qu'il faudrait un ensemble compliqué d'équations pour obtenir la formule exacte et complète. C'est si compliqué que nous laissons ce problème de côté jusqu'à l'année prochaine.

Au lieu de cela, nous essayerons de résoudre un cas très simple afin de comprendre très clairement tous les principes physiques. Nous prenons le cas dans lequel l'effet des autres atomes est très faible en comparaison de l'effet de la source. En d'autres termes, nous prenons un matériau dans lequel le champ total n'est pas modifié énormément par le mouvement

des autres charges. Cela correspond à un matériau pour lequel l'indice de réfraction est très proche de 1, ce qui s'obtient, par exemple, lorsque la densité des atomes est très faible. Notre calcul sera valable pour tous les cas où l'indice est, pour n'importe quelle raison, très proche de 1. De cette manière, nous éviterons les complications de la solution plus générale et complète.

Incidentement vous devez remarquer qu'il y a un autre effet causé par le mouvement des charges dans la plaque. Ces charges émettront également des ondes vers l'arrière, vers la source S . Ce champ qui revient est la lumière réfléchie que nous voyons à la surface des matériaux transparents. Elle ne provient pas simplement de la surface. Le rayonnement vers l'arrière provient de tout point dans l'intérieur, mais il apparaît que l'effet total est équivalent à une réflexion aux surfaces. Ces effets de réflexion dépassent notre approximation pour le moment, parce que nous nous limiterons à un calcul pour un matériau d'indice si voisin de 1 que très peu de lumière est réfléchie.

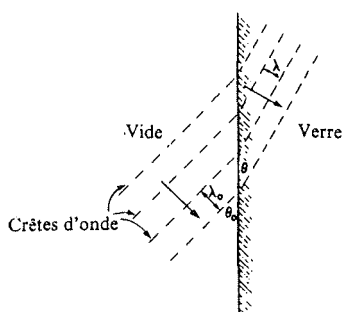


Fig. 31-2. Relation entre la réfraction et le changement de la vitesse.

Avant de continuer notre étude du calcul de l'indice de réfraction, nous devons comprendre que ce qui est nécessaire pour interpréter la réfraction est de comprendre pourquoi la *vitesse* apparente des ondes est différente dans des matériaux différents. Les rayons de lumière sont *déviés* simplement *parce que* la vitesse effective des ondes est différente dans les matériaux. Pour vous rappeler la raison de cette déviation, nous avons tracé sur la Figure 31.2 différentes crêtes successives d'une onde électrique qui, venant du vide, rencontrent la surface d'un bloc de verre. La flèche perpendiculaire aux crêtes de l'onde indique la direction de propagation de l'onde. Toutes les oscillations dans l'onde doivent avoir la même *fréquence*. (Nous avons vu que des oscillations forcées ont la même fréquence que la source pilote.) Cela signifie également que les crêtes des ondes des deux côtés de la surface doivent avoir le *même espacement le long de la surface* car elles doivent se déplacer ensemble, de telle sorte qu'une charge se trouvant à la frontière ne sentira qu'une seule fréquence. Cependant la *plus courte* distance entre des crêtes est la longueur d'onde qui est égale à la vitesse divisée par la fréquence. Du côté du vide, elle vaut $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$, et de l'autre côté elle vaut $\lambda = 2\pi v/\omega$ ou $2\pi c/\omega n$, lorsque $v = c/n$ est la vitesse de l'onde. Sur la figure, nous pouvons voir que la seule manière de « satisfaire » aux conditions de traversée de la surface, revient, pour l'onde dans le matériau, à se déplacer dans une direction différente par rapport à la surface. Nous pouvons voir géométriquement sur la figure que la condition de passage se traduit par $\lambda_0/\sin \theta_0 = \lambda/\sin \theta$, ou

$\sin \theta_0 / \sin \theta = n$, qui est la loi de Snell. Nous considérerons dans la suite de notre discussion uniquement la raison pour laquelle la lumière a une vitesse effective de c/n dans un matériau d'indice n , et nous ne nous préoccupons pas davantage dans ce chapitre de la déviation de la lumière.

Revenons maintenant au phénomène schématisé sur la Figure 31-1. Nous voyons que nous devons calculer le champ produit en P par toutes les charges qui oscillent dans le morceau de verre. Nous appellerons E_a cette partie du champ et c'est simplement le second terme de la somme dans l'équation (31.2). Lorsque nous lui additionnons le terme E_s , dû à la source, nous obtenons le champ total en P .

C'est probablement la chose la plus compliquée que nous ferons cette année, mais c'est compliqué uniquement parce qu'il y a beaucoup de parties qui doivent être rassemblées; chaque partie considérée en elle-même cependant est très simple. A la différence d'autres démonstrations où nous disons, « Oubliez la démonstration, ne considérez que la réponse! », dans ce cas nous n'avons pas autant besoin de la réponse que de la démonstration. En d'autres termes, la chose à comprendre maintenant, c'est le mécanisme physique qui produit l'indice.

Pour voir où nous allons, cherchons d'abord l'allure de la « correction de champ » E_a lorsque le champ total en P doit apparaître comme un rayonnement venant de la source qui est ralenti lorsqu'il traverse la plaque mince. Si la plaque ne produisait aucun effet sur lui, le champ de l'onde avançant vers la droite (le long de l'axe z) serait

$$E_s = E_0 \cos \omega(t - z/c) \quad (31.3)$$

ou en utilisant la notation exponentielle,

$$E_s = E_0 e^{i\omega(t - z/c)}. \quad (31.4)$$

Maintenant que se passe-t-il si l'onde se déplace un peu plus lentement en traversant la plaque? Appelons Δz l'épaisseur de la plaque. Si la plaque n'était pas là, l'onde traverserait la distance Δz , dans le temps $\Delta z/c$. Mais si elle apparaît avancer à la vitesse c/n , alors elle doit mettre un temps plus long $n\Delta z/c$ ou le temps supplémentaire $\Delta t = (n - 1) \Delta z/c$. Après cela, elle continue de se déplacer à la vitesse c . Nous pouvons introduire le retard supplémentaire à la traversée de la plaque en remplaçant t dans l'équation (31.4) par $(t - \Delta t)$ ou par $[t - (n - 1) \Delta z/c]$. Ainsi l'onde, après insertion de la plaque, doit être écrite

$$E_{\text{après la plaque}} = E_0 e^{i\omega[t - (n - 1) \Delta z/c - z/c]}. \quad (31.5)$$

Nous pouvons également écrire cette équation

$$E_{\text{après la plaque}} = e^{-i\omega(n - 1) \Delta z/c} E_0 e^{i\omega(t - z/c)}, \quad (31.6)$$

ce qui signifie que l'onde après la plaque s'exprime en fonction de l'onde qui aurait pu exister sans la plaque, c'est-à-dire de E_s , en multipliant par un facteur $e^{-i\omega(n - 1) \Delta z/c}$. Nous savons que multiplier une fonction oscillante telle que $e^{i\omega t}$ par un facteur $e^{i\theta}$ revient à dire que nous changeons la phase de l'oscillation d'un angle θ , et c'est ce que réalise, bien sûr, le retard supplémentaire à la traversée de l'épaisseur Δz . Il a retardé

la phase de la quantité $\omega(n-1)\Delta z/c$ (retardé, à cause du signe moins dans l'exposant).

Nous avons dit précédemment que la plaque doit *ajouter* un champ E_a au champ initial $E_s = E_0 e^{i\omega(t-z/c)}$, mais nous avons trouvé, au lieu de cela, que l'effet de la plaque est de *multiplier* le champ par un facteur qui modifie sa phase. C'est cependant tout à fait correct, car nous pouvons obtenir le même résultat en additionnant un nombre complexe bien choisi. Il est particulièrement simple de trouver le nombre correct qu'il faut additionner dans le cas où Δz est petit, car vous vous souvenez que si x est un petit nombre alors e^x est pratiquement égal à $(1+x)$. Nous pouvons écrire de ce fait

$$e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c} = 1 - i\omega(n-1)\Delta z/c. \quad (31.7)$$

Utilisant cette égalité dans l'équation (31.6), nous avons

$$E_{\text{après la plaque}} = \underbrace{E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_{E_s} - \underbrace{\frac{i\omega(n-1)\Delta z}{c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_{E_a}. \quad (31.8)$$

Le premier terme est le champ de la source, le deuxième terme doit être simplement égal à E_a , le champ produit vers la droite de la plaque par les charges qui oscillent dans la plaque – exprimé ici en fonction de l'indice de réfraction n , et dépendant bien sûr de l'importance de l'onde venant de la source.

Ce que nous avons fait, peut être facilement représenté si nous considérons le diagramme dans le plan complexe représenté sur la Figure 31-3. Nous traçons d'abord le nombre E_s (nous choisissons une valeur pour z , et t de telle sorte que E_s soit horizontal, mais ceci n'est pas absolument nécessaire). Le retard dû au ralentissement dans la plaque, modifiera la phase de ce nombre, c'est-à-dire qu'il fera tourner E_s d'un angle négatif. Mais cela revient au même que d'ajouter le petit vecteur E_a , approximativement perpendiculaire à E_s . Or c'est exactement ce que signifie le facteur $-i$ dans le deuxième terme de l'équation (31.8). Il dit que si E_s est réel, alors E_a est imaginaire négatif ou que, en général E_s et E_a forment un angle droit.

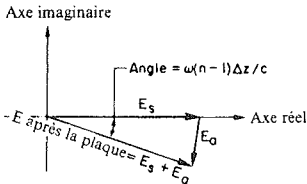


Fig. 31-3. Diagramme de l'onde transmise pour des valeurs particulières de z et t .

31-2 Le champ dû au matériau

Nous devons maintenant poser la question suivante: Le champ E_a obtenu dans le deuxième terme de l'équation (31.8) est-il du type de celui qui est créé par les charges qui oscillent dans la plaque? Si nous pouvons montrer que c'est le cas, nous aurons alors calculé ce que doit être l'indice n ! [Puisque n est le seul nombre qui ne soit pas fondamental dans l'équation (31.8).] Nous allons donc maintenant calculer quel

Tableau 31-1

Symboles utilisés dans les calculs

E_s	= champ provenant de la source
E_a	= champ produit par les charges dans la plaque
Δz	= épaisseur de la plaque
z	= distance perpendiculaire à la plaque
n	= indice de réfraction
ω	= fréquence (angulaire) du rayonnement
N	= nombre de charges par unité de volume dans la plaque
η	= nombre de charges par unité de surface dans la plaque
q_e	= charge d'un électron
m	= masse d'un électron
ω_0	= fréquence de résonance d'un électron lié à un atome

champ E_a produiront les charges dans le matériau. (Afin de vous aider à garder en mémoire les différents symboles que nous avons utilisés jusqu'à présent, et que nous utiliserons dans la suite de nos calculs, nous les avons tous rassemblés dans le Tableau 31-1.)

Si la source S (de la Figure 31-1) est très éloignée sur la gauche, alors le champ E_s aura la même phase n'importe où sur la plaque, ce qui fait que nous pouvons écrire au voisinage de la plaque

$$E_s = E_0 e^{i(\omega t - z/c)}. \quad (31.9)$$

Sur la plaque, où $z = 0$, nous aurons

$$E_s = E_0 e^{i\omega t} \text{ (sur la plaque)}. \quad (31.10)$$

Chacun des électrons dans les atomes de la plaque subira ce champ électrique et sera déplacé alternativement de haut en bas (nous supposons que la direction de E_0 est verticale) par la force électrique qE . Pour trouver quel sera le mouvement des électrons, nous supposerons que les atomes sont de petits oscillateurs, c'est-à-dire que les électrons sont fixés élastiquement aux atomes, ce qui signifie que si une force est appliquée à un électron, le déplacement de sa position normale sera proportionnel à la force.

Vous pouvez penser que c'est un drôle de modèle d'atome, si vous avez déjà entendu parler des électrons tournant sur des orbites. Mais ce n'est qu'un schéma extrêmement simplifié. La description correcte d'un atome, qui est donnée par la théorie de la mécanique ondulatoire, dit que, *en ce qui concerne les problèmes liés à la lumière*, les électrons se comportent comme s'ils étaient maintenus par des ressorts. Nous supposerons donc que les électrons sont soumis à une force de rappel linéaire qui, avec leur masse m , les fait se comporter comme de petits oscillateurs avec une fréquence de résonance ω_0 . Nous avons déjà étudié de tels oscillateurs et nous savons que l'équation de leurs mouvements s'écrit ainsi

$$m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = F, \quad (31.11)$$

où F est la force appliquée.

Dans notre problème, la force appliquée provient du champ électrique de l'onde de la source, ce qui fait que nous devons utiliser

$$F = q_e E_s = q_e E_0 e^{i\omega t}, \quad (31.12)$$

où q_e est la charge électrique d'un électron et pour E_s nous utilisons l'expression $E_s = E_0 e^{i\omega t}$ de (31.10). Notre équation du mouvement de l'électron est alors

$$m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = q_e E_0 e^{i\omega t}. \quad (31.13)$$

Nous avons déjà résolu cette équation auparavant, et nous savons que la solution est

$$x = x_0 e^{i\omega t}, \quad (31.14)$$

et, en substituant dans (31.13), nous trouvons que

$$x_0 = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (31.15)$$

de telle sorte que

$$x = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}. \quad (31.16)$$

Nous obtenons ainsi ce qu'il est nécessaire de connaître – le mouvement des électrons dans la plaque. Il est identique pour chaque électron, à l'exception de la position moyenne (le « zéro » du mouvement) qui est, bien sûr, différente pour chaque électron.

Nous sommes maintenant prêts à trouver le champ E_a que ces atomes produisent au point P , car nous avons déjà calculé (à la fin du Chapitre 30) quel est le champ produit par un plan de charges qui, toutes, se déplacent ensemble. Se rapportant à l'équation (30.19), nous voyons que le champ E_a en P est simplement égal à une constante négative que multiplie la vitesse des charges, retardée en temps de la quantité z/c . En dérivant x dans l'équation (31.16) pour obtenir la vitesse, et en introduisant le retard [ou en mettant simplement x_0 tiré de l'équation (31.15) dans l'équation (31.18)] on obtient

$$E_a = - \frac{nq_e}{2\epsilon_0 c} \left[i\omega \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega(t-z/c)} \right]. \quad (31.17)$$

Tout à fait comme attendu, le mouvement forcé des électrons produit une onde supplémentaire qui se déplace vers la droite (c'est ce que dit le facteur $e^{i\omega(t-z/c)}$), et l'amplitude de cette onde est proportionnelle au nombre des atomes par unité de surface dans la plaque (le facteur η) et est également proportionnelle à l'intensité du champ de la source (le facteur E_0). Il y a également certains facteurs qui dépendent des propriétés atomiques (q_e , m et ω_0), comme on peut s'y attendre.

La chose la plus importante, cependant, est que cette formule (31.17), donnant E_a ressemble tout à fait à l'expression de E_a que nous avons obtenue dans l'équation (31.8) en disant que l'onde initiale était retardée en traversant un matériau d'indice de réfraction

n. Les deux expressions seront en fait identiques si

$$(n - 1) \Delta z = \frac{\eta q_e^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (31.18)$$

Remarquez que les deux côtés sont proportionnels à Δz , puisque η , qui est le nombre d'atomes par *unité de surface*, est égal à $N \Delta z$, où N est le nombre d'atomes *par unité de volume* de la plaque. Substituant $N \Delta z$ à η et simplifiant par Δz , nous obtenons notre résultat principal, une formule pour l'indice de réfraction en fonction des propriétés des atomes du matériau et de la fréquence de la lumière:

$$n = 1 + \frac{N q_e^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (31.19)$$

Cette équation donne «l'explication» de l'indice de réfraction que nous voulions obtenir.

31-3 Dispersion

Remarquez que dans le processus précédent nous avons obtenu quelque chose de très intéressant. Car nous n'avons pas simplement obtenu un nombre pour l'indice de réfraction, qui peut être calculé à partir des quantités atomiques de base, mais nous avons également appris comment l'indice de réfraction doit varier avec la fréquence ω de la lumière. Voilà quelque chose que nous n'aurions jamais compris à partir du simple énoncé que «la lumière se déplace plus lentement dans un matériau transparent». Il nous reste toujours le problème, bien sûr, de savoir combien il y a d'atomes par unité de volume et quelles sont leurs fréquences naturelles ω_0 . Nous ne le savons pas pour le moment, parce que c'est différent pour chaque matériau, et nous ne pouvons pas en élaborer une théorie générale maintenant. Un énoncé de la théorie générale des propriétés de différentes substances – leurs fréquences naturelles, etc. – n'est possible qu'avec la mécanique atomique quantique. De même, différents matériaux ont des propriétés différentes et des indices différents, ce qui fait que nous ne pouvons nous attendre de toute manière à obtenir une formule générale pour l'indice qui s'appliquera à toutes les substances.

Cependant, nous allons appliquer la formule que nous avons obtenue à différentes circonstances possibles. Premièrement, pour la plupart des gaz ordinaires (par exemple pour l'air, la plupart des gaz incolores, l'hydrogène, l'hélium, etc.) les fréquences naturelles des oscillateurs électroniques correspondent à la lumière ultra-violette. Ces fréquences sont plus élevées que les fréquences de la lumière visible, c'est-à-dire que ω_0 est beaucoup plus grand que ω pour la lumière visible, et en première approximation nous pouvons négliger le terme ω^2 par rapport à ω_0^2 . Nous trouvons alors que l'indice est pratiquement constant. Ainsi, pour un gaz l'indice est pratiquement constant. C'est également vrai pour la plupart des autres substances transparentes, comme le verre. Si nous regardons notre expression d'un petit peu plus près, cependant, nous remarquons que lorsque ω augmente, diminuant un petit peu le dénominateur, l'indice augmente également. Ainsi n augmente avec la fréquence. L'indice est plus élevé pour la lumière bleue que pour la lumière rouge. C'est la raison pour laquelle un prisme dévie la lumière davantage dans le bleu que dans le rouge.

Ce phénomène – l'indice dépend de la fréquence – est appelé le phénomène de *dispersion*, parce qu'il est à la base du fait que la lumière est «dispersée»

par un prisme en un spectre. L'équation de l'indice de réfraction en fonction de la fréquence est appelée une *équation de dispersion*. Ainsi nous avons obtenu une équation de dispersion. (Dans les dernières années, les « équations de dispersion » ont trouvé une nouvelle utilisation dans la théorie des particules élémentaires.)

Notre équation de dispersion suggère d'autres effets intéressants. Si nous avons une fréquence naturelle ω_0 , qui se trouve dans la région visible, ou si nous mesurons l'indice de réfraction d'un matériau tel que le verre dans l'ultra-violet, où ω se rapproche de ω_0 , nous voyons que pour des fréquences très proches de la fréquence naturelle l'indice peut devenir extrêmement grand, car le dénominateur peut tendre vers zéro. Supposons ensuite que ω soit plus grand que ω_0 . Ceci se passe par exemple, si nous prenons un matériau comme le verre, et si nous envoyons des rayons X sur lui. En fait, puisque de nombreux matériaux qui sont opaques à la lumière visible, comme par exemple le graphite, sont transparents aux rayons X, nous pouvons également parler de l'indice de réfraction du carbone pour les rayons X. Toutes les fréquences naturelles des atomes de carbone sont beaucoup plus faibles que la fréquence que nous utilisons dans les rayons X, puisque les rayons X ont une très haute fréquence. L'indice de réfraction est celui donné par notre équation de dispersion si nous remplaçons ω_0 par zéro, (nous négligeons ω_0^2 en comparaison de ω^2).

Un cas analogue se produit si nous envoyons un faisceau d'ondes de radio (ou de lumière) sur un gaz d'électrons libres. Dans la haute atmosphère les électrons sont libérés de leurs atomes par la lumière ultra-violette venant du soleil et ils sont là-haut à l'état d'électrons libres. Pour des électrons libres $\omega_0 = 0$ (il n'y a pas de force de rappel élastique). Faisant $\omega_0 = 0$ dans notre équation de dispersion, nous obtenons la formule correcte de l'indice de réfraction des ondes de radio dans la stratosphère, où N représente maintenant la densité d'électrons libres (le nombre par unité de volume) dans la stratosphère. Mais considérons à nouveau l'équation, si nous envoyons des rayons X sur de la matière ou des ondes de radio (ou n'importe quelle onde électrique) sur des électrons libres, le terme $(\omega_0^2 - \omega^2)$ devient *négatif*, et nous obtenons le résultat que n est *inférieur à un*. Cela signifie que la vitesse effective des ondes dans la substance est *plus grande* que c ! Cela peut-il être exact ?

C'est en effet exact. Bien qu'il soit dit que vous ne pouvez envoyer des signaux plus rapidement que la vitesse de la lumière, il est néanmoins vrai que l'indice de réfraction des matériaux à une fréquence particulière, peut-être soit plus grand, soit plus petit que 1. Cela signifie simplement que le *décalage de phase* qui est produit par la lumière diffusée peut être soit positif, soit négatif. On peut montrer, cependant, que la vitesse à laquelle vous envoyez un *signal* n'est pas déterminée par la valeur de l'indice à une seule fréquence, mais dépend de ce que vaut l'indice à *plusieurs* fréquences. L'indice nous donne la vitesse à laquelle les *nauds* (ou les crêtes) de l'onde se déplacent. Le *nœud* d'une onde n'est pas un signal en lui-même. Avec une onde parfaite, qui n'a aucune modulation d'aucune sorte, c'est-à-dire avec une oscillation continue, vous ne pouvez pas réellement dire quand elle « commence », vous ne pouvez donc pas l'utiliser comme signal dans le temps. Afin d'envoyer un *signal*, vous devez changer l'onde d'une manière ou d'une autre, la déformer en un endroit, la rendre un petit peu plus large ou plus étroite. Cela signifie qu'il faut plus d'une fréquence dans l'onde, et on peut montrer que la vitesse à laquelle les *signaux* se déplacent ne dépend pas de l'indice seul, mais dépend de la manière dont l'indice se modifie avec la fréquence. Nous devons également reporter ce sujet à plus tard (jusqu'au Chapitre 48). Alors nous vous calculerons la vitesse réelle des *signaux* traversant un morceau de verre et vous verrez qu'elle ne sera pas plus rapide que la vitesse de

la lumière, bien que les nœuds, qui sont des points mathématiques, se déplacent vraiment plus vite que la vitesse de la lumière.

Pour vous donner simplement une légère idée de la manière dont ceci se passe, vous remarquerez que la difficulté réelle est liée au fait que les réponses des charges sont opposées au champ, c'est-à-dire que le signe s'est renversé. Ainsi, dans notre expression de x (Éq. 31.16), le déplacement de la charge est dans la direction opposée au champ qui la déplace, parce que $(\omega_0^2 - \omega^2)$ est négatif pour des petites valeurs de ω_0 . La formule dit que lorsque le champ électrique tire dans une direction, la charge se déplace dans la direction opposée.

Comment se fait-il que la charge se déplace dans la direction opposée? Elle ne part certainement pas dans la direction opposée, lorsque le champ est mis en marche pour la première fois. Lorsque le mouvement commence, il y a au début un effet transitoire, qui disparaît au bout d'un certain temps, et seulement *alors* la phase de l'oscillation de la charge est opposée au champ conducteur. Et c'est alors que la *phase* du champ transmis peut apparaître en *avance* par rapport à l'onde de la source. C'est de cette *avance de phase* que l'on veut parler, lorsque nous disons que la « vitesse de phase » ou la vitesse des nœuds est plus grande que c . Sur la Figure 31-4 nous donnons une idée schématique de l'apparence d'une onde dans le cas où l'onde est soudainement créée (pour produire un signal). Vous verrez, à partir du diagramme, que le *signal* (c'est-à-dire le *départ* de l'onde) *n'est pas* en avance, même pour l'onde qui finalement se trouve avec une avance de phase.

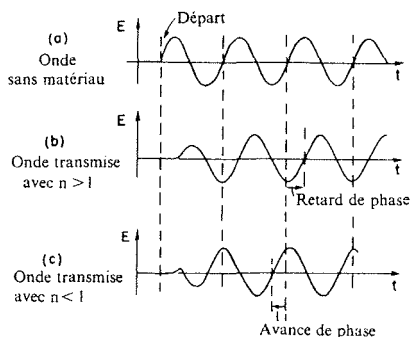


Fig. 31-4. « Signaux » ondulatoires.

Considérons à nouveau notre équation de dispersion. Nous devons remarquer que notre analyse de l'indice de réfraction nous donne un résultat quelque peu simplifié par rapport à ce que vous trouverez en réalité dans la nature. Pour être tout à fait précis, nous devons ajouter quelques améliorations. D'abord, nous devons nous attendre à ce que notre modèle de l'oscillateur atomique contienne une force d'amortissement (sinon une fois parti, il oscillera éternellement, et nous ne pensons pas que ceci puisse effectivement arriver). Nous avons calculé auparavant (Éq. 23.8) le mouvement d'un oscillateur amorti, et le résultat est que le dénominateur dans l'équation (31.16), et donc dans l'équation (31.9), au lieu d'être égal à $(\omega_0^2 - \omega^2)$ vaut maintenant $(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$, où γ est le coefficient d'amortissement.

Il faut une seconde modification, pour tenir compte du fait qu'il y a plusieurs fréquences de résonances pour un certain type particulier d'atome. Il est facile de corriger notre

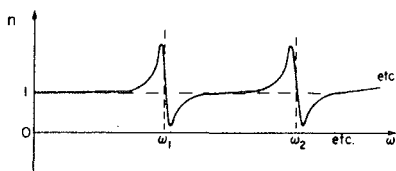


Fig. 31-5. L'indice de réfraction en fonction de la fréquence.

équation de dispersion en imaginant qu'il y a plusieurs types différents d'oscillateurs, mais que chaque oscillateur agit séparément, et que nous additionnons simplement les contributions de tous les oscillateurs. Disons qu'il y a N_k électrons par unité de volume, dont la fréquence naturelle est ω_k et dont le facteur d'amortissement est γ_k . Nous aurons donc, pour notre équation de dispersion

$$n = 1 + \frac{q_e^2}{2\epsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega}. \quad (31.20)$$

Nous avons finalement une expression complète qui décrit l'indice de réfraction qui est observé pour de nombreuses substances*. L'indice décrit par cette formule varie avec la fréquence approximativement comme la courbe indiquée sur la Figure 31-5.

Vous remarquerez qu'aussi longtemps que ω n'est pas trop près d'une des fréquences de résonance, la pente de la courbe est positive. Une telle pente positive est appelée une dispersion « normale » (parce qu'elle est clairement le phénomène le plus commun). Très proche des fréquences de résonances, cependant, il y a un petit domaine de ω pour lequel la pente est négative. Une telle pente négative est souvent appelée une dispersion « anormale » (voulant dire anormale), parce que cela semblait inhabituel lorsque cela fut observé pour la première fois, bien avant que personne ne se doute même que les électrons existaient. De notre point de vue, les deux pentes sont tout à fait « normales »!

31-4 Absorption

Peut-être avez-vous remarqué quelque chose d'un petit peu étrange dans la dernière forme (Éq. 31.20) que nous avons obtenue pour notre équation de dispersion. A cause du terme $i\gamma$ que nous avons introduit afin de prendre en considération l'amortissement, l'indice de réfraction est maintenant un *nombre complexe*! Qu'est-ce que *cela* signifie? En calculant quelles sont les parties réelles et imaginaires de n nous pouvons écrire

$$n = n' - in'', \quad (31.21)$$

où n' et n'' sont des nombres réels. (Nous utilisons le signe moins devant in'' parce qu'alors n'' est un nombre positif, comme vous pouvez le vérifier vous-même.)

Nous pouvons voir ce qu'un tel indice complexe signifie en revenant à l'équation (31.6) qui est l'équation de l'onde après qu'elle ait traversé une plaque de matériau

* En réalité, bien qu'en mécanique quantique l'équation (31.20) soit toujours valable, son interprétation est quelque peu différente. En mécanique quantique, même un atome avec un seul électron, comme l'hydrogène, a plusieurs fréquences de résonance. Ainsi N_k n'est pas réellement le nombre d'électrons ayant la fréquence ω_k , mais est remplacé par Nf_k où N est le nombre d'atomes par unité de volume et f_k (appelé la force de l'oscillateur) est un facteur qui nous dit avec quelle intensité l'atome manifeste chacune de ses fréquences de résonance ω_k .

d'indice n . Si nous plaçons notre nombre complexe n dans cette équation, et réalisons quelques modifications, nous obtenons

$$E_{\text{après la plaque}} = \underbrace{e^{-\omega n'' \Delta z / c}}_A \underbrace{e^{-i\omega(n'-1)\Delta z / c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_B \quad (31.22)$$

Les derniers facteurs, indiqués par B dans l'équation (31.22), sont exactement ce que nous avons précédemment, et décrivent encore une onde dont la phase a été retardée d'un angle $\omega(n'-1)\Delta z/c$ en traversant le matériau. Le premier terme (A) est nouveau et est un facteur exponentiel avec un exposant *réel*, parce qu'il y avait là deux i qui se sont simplifiés. De plus, l'exposant est négatif, ce qui fait que ce facteur est un nombre réel inférieur à 1. Il décrit une *diminution* de la grandeur du champ et, comme nous pouvons nous y attendre, une quantité qui est d'autant plus grande que Δz est plus élevé. Au fur et à mesure que l'onde traverse le matériau, elle s'affaiblit. Le matériau « absorbe » une partie de l'onde. L'onde sort de l'autre côté avec moins d'énergie. Nous ne devons pas en être surpris, car l'amortissement que nous avons introduit dans les oscillateurs est en réalité une force de frottement et on doit s'attendre à ce qu'il cause une perte d'énergie. Nous voyons que la partie imaginaire n'' d'un indice complexe de réfraction représente une absorption (ou « atténuation ») de l'onde. En fait, on dit parfois que n'' est « l'indice d'absorption ».

Nous pouvons également remarquer qu'une partie imaginaire de l'indice n correspond à faire tourner vers l'origine le vecteur E_a de la Figure 31-3. La raison de la diminution du champ transmis est alors claire.

Normalement, par exemple, dans le verre, l'absorption de la lumière est très faible. Ceci correspond bien à notre équation (31.20), car la partie imaginaire du dénominateur $i\gamma_k\omega$, est beaucoup plus faible que le terme $(\omega_k^2 - \omega^2)$. Mais si la fréquence de la lumière ω est très proche de ω_k , alors le terme de résonance $(\omega_k^2 - \omega^2)$ peut devenir petit en comparaison avec $i\gamma_k$ et l'indice devient presque complètement imaginaire. L'absorption de la lumière devient l'effet dominant. C'est précisément cet effet qui produit les lignes sombres dans le spectre de la lumière que nous recevons du soleil. La lumière issue de la surface solaire est passée au travers de l'atmosphère du soleil (aussi bien que de celle de la terre) et la lumière a été fortement absorbée aux fréquences de résonance des atomes dans l'atmosphère solaire.

L'observation de telles lignes spectrales dans la lumière venant du soleil nous permet de déterminer les fréquences de résonance des atomes, et donc la composition chimique de l'atmosphère du soleil. Le même type d'observation nous donne des informations sur les matériaux dans les étoiles. A partir de telles mesures nous savons que les éléments chimiques dans le soleil et dans les étoiles sont les mêmes que ceux que nous trouvons sur la terre.

31-5 L'énergie transportée par une onde électrique

Nous avons vu que la partie imaginaire de l'indice signifie une absorption. Nous utiliserons maintenant cette information pour trouver quelle est la quantité d'énergie transportée par une onde de lumière. Nous avons donné précédemment un argument disant pourquoi l'énergie transportée par la lumière est proportionnelle à $\overline{E^2}$, la moyenne temporelle du carré du champ électrique de l'onde. La décroissance de E due à l'absorption doit signifier une perte d'énergie, qui doit se transformer en frottement des électrons et, nous pouvons le supposer, doit finalement se dissiper en chaleur dans le matériau.

Si nous considérons la lumière arrivant sur une surface unité, par exemple sur un centimètre carré, de notre plaque à la Figure 31-1, alors nous pouvons écrire l'équation suivante pour l'énergie (si nous supposons que l'énergie est conservée ce qu'évidemment nous *faisons* !):

$$\text{Énergie incidente par seconde} = \text{énergie sortant par seconde} + \text{travail réalisé par seconde} \quad (31.23)$$

Pour le premier terme nous pouvons écrire $a\overline{E_s^2}$, où a est la constante de proportionnalité jusqu'alors inconnue qui relie la valeur moyenne de E^2 à l'énergie transportée. Dans le deuxième terme, nous devons inclure la partie venant des atomes qui émettent dans les matériaux, ainsi nous devons utiliser $\alpha(\overline{E_s} + \overline{E_a})^2$ ou (évaluant le carré) $\alpha(\overline{E_s^2} + 2\overline{E_s E_a} + \overline{E_a^2})$.

Tous nos calculs ont été réalisés pour une plaque fine de matériau dont l'indice n'est pas très éloigné de 1, de telle sorte que E_a sera toujours beaucoup plus faible que E_s (simplement pour rendre nos calculs plus faciles). En conservant nos approximations, nous devons de ce fait laisser de côté le terme $\overline{E_a^2}$, parce qu'il est beaucoup plus petit que le terme $\overline{E_s E_a}$. Vous pouvez alors dire: « Vous pourriez également laisser de côté $\overline{E_s E_a}$, puisqu'il est beaucoup plus petit que $\overline{E_s^2}$. » C'est vrai que $\overline{E_s E_a}$ est beaucoup plus petit que $\overline{E_s^2}$, mais nous devons conserver $\overline{E_s E_a}$ ou alors notre approximation reviendrait à négliger complètement la présence du matériau! Une manière de vérifier que notre calcul est cohérent est de vérifier si nous conservons toujours les termes qui sont proportionnels à $-N\Delta z$, la densité des atomes dans le matériau, et si nous laissons de côté les termes qui sont proportionnels à $(N\Delta z)^2$ ou à toute puissance supérieure de $N\Delta z$. Voilà donc ce que nous devrions appeler une « approximation de faible densité ».

Dans le même esprit, nous pouvons remarquer que notre équation concernant l'énergie, a négligé l'énergie de l'onde réfléchie. Mais c'est parfait car ce terme, également, est proportionnel à $(N\Delta z)^2$, puisque l'amplitude de l'onde réfléchie est proportionnelle à $N\Delta z$.

Pour le dernier terme de l'équation (31.23) nous voulons calculer le taux suivant lequel l'onde incidente produit du travail sur les électrons. Nous savons que le travail est égal à la force que multiplie la distance, ainsi le *taux* de production de travail (également appelée puissance) est le produit de la force par la vitesse. C'est en réalité $\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}$, mais nous n'avons pas besoin de nous préoccuper du produit scalaire, lorsque la vitesse et la force sont dans la même direction, ce qui est le cas ici (à l'exception d'un signe moins possible). Ainsi pour chaque atome nous prenons $\overline{q_e E_s v}$ comme vitesse moyenne de production du travail. Puisqu'il y a $N\Delta z$ atomes par unité de surface, le dernier terme de l'équation (31.23) doit être $N\Delta z q_e \overline{E_s v}$. Notre équation énergétique s'écrit maintenant

$$\alpha \overline{E_s^2} = \alpha \overline{E_s^2} + 2\alpha \overline{E_s E_a} + N\Delta z q_e \overline{E_s v}. \quad (31.24)$$

Les termes $\overline{E_s^2}$ se simplifient et nous avons

$$2\alpha \overline{E_s E_a} = N\Delta z q_e \overline{E_s v}. \quad (31.25)$$

Nous retournons maintenant à l'équation (31.19) qui nous dit que pour z grand

$$E_a = \frac{N\Delta z q_e}{2\epsilon_0 c} v(\text{ret de } z/c) \quad (31.26)$$

(se rappelant que $\eta = N\Delta z$). Mettant l'équation (31.26) à gauche de l'équation (31.25), nous obtenons

$$2\alpha \frac{N \Delta z q_e}{2\epsilon_0 c} \overline{E_s(\text{en } z) \cdot v(\text{ret de } z/c)}.$$

Cependant, $E_s(\text{en } z)$ est égal à E_s (aux atomes) retardé de z/c . Puisque la moyenne est indépendante du temps, c'est la même maintenant que pour un retard de z/c , c'est donc $\overline{E_s(\text{aux atomes})} \cdot v$, la même moyenne qui apparaît du côté droit de (31.25). Les deux côtés sont de ce fait égaux si

$$\frac{\alpha}{\epsilon_0 c} = 1, \quad \text{ou} \quad \alpha = \epsilon_0 c. \quad (31.27)$$

Nous avons découvert que si l'énergie est conservée, l'énergie transportée dans une onde électrique par unité de surface et par unité de temps (ou ce que nous avons appelé *l'intensité*) doit être donnée par $\epsilon_0 c \overline{E^2}$. Si nous appelons $\overline{S}$ l'intensité, nous avons

$$\overline{S} = \left\{ \begin{array}{c} \text{intensité} \\ \text{ou} \\ \text{énergie/surface/temps} \end{array} \right\} = \epsilon_0 c \overline{E^2}, \quad (31.28)$$

où la barre signifie la *moyenne temporelle*. Nous obtenons un bon résultat en prime de notre théorie de l'indice de réfraction!

31-6 Diffraction de la lumière par un écran

C'est maintenant le moment de considérer un sujet quelque peu différent que nous pouvons traiter avec les méthodes de ce chapitre. Dans le chapitre précédent nous disions que lorsque nous avons un écran opaque et que la lumière peut traverser certaines ouvertures dans cet écran, la distribution de l'intensité — la figure de diffraction — peut être obtenue en imaginant qu'il y a, à la place des trous, des sources (oscillateurs) uniformément distribuées sur l'ouverture. En d'autres termes, l'onde diffractée est la même que si le trou était une nouvelle source. Nous devons en expliquer la raison, car le trou est bien sûr justement l'endroit où il n'y a *aucune* source, où il n'y a *aucune* charge en accélération.

Demandons-nous d'abord : « Qu'est-ce qu'un écran opaque ? » Supposez que nous ayons un écran complètement opaque entre une source S et un observateur en P , comme dans la Figure 31-6 (a). Si l'écran est « opaque » il n'y a pas de champ en P . Pourquoi n'y a-t-il pas de champ en P ? Selon

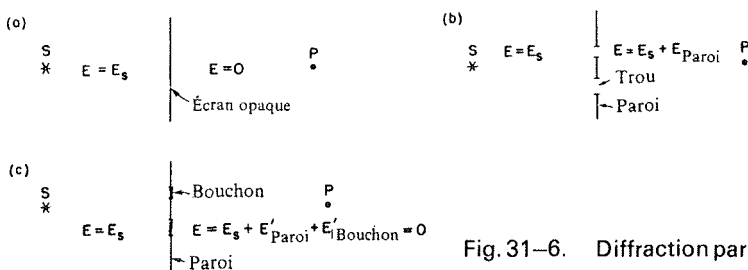


Fig. 31-6. Diffraction par un écran.

les principes de base, nous devons obtenir le champ en P en ajoutant le champ E_s de la source retardée au champ de toutes les autres charges tout autour. Mais comme nous avons vu ci-dessus, les charges dans l'écran seront mises en mouvement par le champ E_s , et ces mouvements vont créer un nouveau champ, qui, si l'écran est opaque, doit *exactement équilibrer* le champ E_s de l'autre côté de l'écran. Vous dites: « Quel miracle que l'équilibre soit *parfait*! » Si ce n'est pas tout à fait exact (souvenez-vous que cet écran opaque a une certaine épaisseur), le champ vers la partie arrière de l'écran ne serait pas tout à fait nul. Ainsi, n'étant pas tout à fait nul, il mettrait en mouvement d'autres charges dans le matériau de l'écran et ainsi produirait un petit peu plus de champ, essayant d'obtenir l'équilibre du total. Si donc nous rendons l'écran suffisamment épais, il n'y a pas de champ résiduel, parce qu'il y a suffisamment de possibilités pour rendre nul l'effet global. En fonction de nos formules précédentes, nous dirions que l'écran a un grand indice imaginaire, de telle sorte que l'onde est absorbée exponentiellement lorsqu'elle le traverse. Vous savez, bien sûr, qu'une couche suffisamment fine du matériau le plus opaque, même l'or, est transparente.

Maintenant voyons ce qui se passe avec un écran opaque qui est percé d'un trou comme il est indiqué sur la Figure 31-6(b). A quoi nous attendons-nous pour le champ en P ? Le champ en P peut être représenté comme une somme de deux parties – le champ dû à la source S plus le champ dû à la paroi, c'est-à-dire dû aux mouvements des charges dans les parois. Nous pouvons nous attendre à ce que les mouvements des charges dans les parois soient compliqués, mais nous pouvons trouver *quels champs elles produisent* d'une manière assez simple.

Supposons que nous prenions le même écran, mais que nous bouchions les trous comme indiqué à la partie c de la figure. Nous imaginons que les bouchons sont exactement du même matériau que le mur. Les bouchons sont placés là où étaient les trous dans le cas (b). Calculons maintenant le champ en P . Le champ en P est certainement zéro dans le cas (c), mais il est *aussi* égal au champ venant de la source plus le champ dû à tous les mouvements des atomes dans la paroi et dans les bouchons. Nous pouvons écrire les équations suivantes:

$$\begin{aligned}\text{Cas (b): } E_{\text{en } P} &= E_s + E_{\text{paroi}} \\ \text{Cas (c): } E_{\text{en } P} &= 0 = E_s + E'_{\text{paroi}} + E'_{\text{bouchon}}\end{aligned}$$

où les primes se rapportent au cas où les bouchons sont en place; or E_s est bien sûr le même dans chacun des cas. Si maintenant nous soustrayons les deux équations, nous obtenons

$$E_{\text{en } P} = (E_{\text{paroi}} - E'_{\text{paroi}}) - E'_{\text{bouchon}}$$

Maintenant si les trous ne sont pas très petits (disons de plusieurs longueurs d'ondes de large) nous ne nous attendons pas à ce que la présence des bouchons modifie le champ qui arrive aux parois à l'exception peut-être d'une petite quantité autour des bords des trous. Négligeant ce petit effet, nous pouvons écrire $E_{\text{paroi}} = E'_{\text{paroi}}$ et nous obtenons que

$$E_{\text{en } P} = - E'_{\text{bouchon}}$$

Nous obtenons le résultat que le champ en P lorsqu'il y a des trous dans un écran (cas b) est le même (à l'exception du signe) que le champ qui est produit par *cette partie* de l'écran complètement opaque qui est *située là où il y a les trous*! (Le signe n'est pas très important, puisque nous sommes habituellement intéressés par l'intensité qui est proportionnelle au carré du champ.)

Cela ressemble à un étonnant jeu d'échanges d'argument. C'est cependant non seulement vrai (approximativement pour des trous qui ne sont pas trop petits), mais utile, et c'est la justification de la théorie usuelle de la diffraction.

Le champ E'_{bouchon} est calculé dans tout cas particulier en se souvenant que le mouvement des charges *partout* dans l'écran est simplement celui qui va faire disparaître le champ E_s à l'arrière de l'écran. Une fois que nous connaissons ces mouvements, nous ajoutons simplement les champs rayonnés en P pour les charges dans les bouchons.

Nous remarquons à nouveau que cette théorie de la diffraction n'est qu'approchée, et qu'elle n'est suffisamment correcte que si les trous ne sont pas trop petits. Pour des trous qui sont trop petits, le terme E'_{bouchon} sera petit et la différence entre E'_{paroi} et E_{paroi} (différence que nous avons considérée comme nulle) peut être alors comparable ou même plus grande que le petit terme E'_{bouchon} , et notre approximation ne sera plus valable.

Amortissement par rayonnement. Diffusion de la lumière

32-1 Résistance de rayonnement

32-4 Sources indépendantes

32-2 Le taux de rayonnement de l'énergie

32-5 Diffusion de la lumière

32-3 Amortissement par rayonnement

32-1 Résistance de rayonnement

Dans le chapitre précédent nous avons appris que lorsqu'un système oscille, de l'énergie est émise vers l'extérieur et nous avons déterminé une formule donnant l'énergie rayonnée par un système oscillant. Si nous connaissons le champ électrique, alors la valeur moyenne du carré du champ que multiplie $\epsilon_0 c$ est la quantité d'énergie qui passe par mètre carré et par seconde au travers d'une surface normale à la direction dans laquelle le rayonnement se propage :

$$S = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle. \quad (32.1)$$

Toute charge oscillante rayonne de l'énergie ; par exemple, une antenne excitée émet de l'énergie. Si le système rayonne de l'énergie, nous devons alors, afin de rendre compte de la conservation de l'énergie, trouver que de la puissance est délivrée dans les fils qui vont vers l'antenne. C'est-à-dire que pour le circuit de commande, l'antenne agit comme une *résistance*, ou comme un endroit où de l'énergie peut être « perdue » (l'énergie n'est pas en réalité perdue, elle est effectivement rayonnée, mais du point de vue du circuit, l'énergie est perdue). Dans une résistance ordinaire, l'énergie qui est « perdue » se transforme en chaleur ; dans notre cas, l'énergie qui est « perdue » s'en va dans l'espace. Mais du point de vue de la théorie du circuit, sans considérer où va l'énergie, l'effet résultant pour le circuit est le même — de l'énergie est « perdue » dans ce circuit. Ainsi pour le générateur, l'antenne semble posséder une résistance, même si elle est fabriquée avec du cuivre parfaitement conducteur. En fait, si elle est bien construite, elle se manifestera comme une résistance pratiquement pure, avec très peu d'inductance ou de capacité, parce que nous souhaitons grâce à elle émettre autant d'énergie que possible. Cette résistance manifestée par une antenne est appelée la *résistance de rayonnement*.

Lorsqu'un courant I se dirige vers l'antenne, le taux moyen avec lequel l'énergie est fournie à l'antenne est égal à la valeur moyenne du carré du courant que multiplie la résistance. Le taux avec lequel l'énergie est *rayonnée* par l'antenne est bien sûr proportionnel au carré du courant dans l'antenne, parce que tous les champs sont proportionnels aux courants et l'énergie libérée est proportionnelle au carré

du champ. Le coefficient de proportionnalité entre la puissance rayonnée et $\langle I^2 \rangle$ est la résistance de rayonnement.

Une question intéressante est de se demander à quoi est due la résistance de rayonnement? Prenons un exemple simple: supposons que les courants circulent dans une antenne alternativement de haut en bas. Nous trouvons que nous devons fournir du travail si l'antenne rayonne de l'énergie. Si nous prenons un corps chargé, et l'accélérons vers le haut et vers le bas, il rayonne de l'énergie; s'il n'était pas chargé, il ne rayonnerait pas d'énergie. Une chose est de calculer, à partir de la conservation de l'énergie, quelle énergie est perdue, une autre consiste à déterminer *contre quelle force* nous travaillons. C'est une question intéressante et très difficile qui n'a jamais été résolue complètement ni d'une manière satisfaisante pour les électrons, bien qu'on l'ait résolue pour les antennes. Voici ce qui se passe: dans une antenne, les champs produits par les charges en mouvement dans une partie de l'antenne réagissent sur les charges en mouvement dans une autre partie de l'antenne. Nous pouvons calculer ces forces et trouver combien de travail elles produisent, et ainsi trouver la bonne formule donnant la résistance de rayonnement. Lorsque nous disons, « Nous pouvons calculer » – ce n'est pas tout à fait exact – nous ne pouvons pas, car nous n'avons pas jusqu'à présent étudié les lois de l'électricité à petites distances; ce n'est que pour de grandes distances que nous savons ce que vaut le champ électrique. Nous avons vu la formule (28.3), mais nous ne savons pas à l'heure actuelle calculer les champs à l'intérieur de la zone ondulatoire: c'est trop compliqué. Bien entendu, puisque la conservation de l'énergie est valable, nous pouvons déterminer le résultat correctement sans connaître les champs à petites distances. (En fait, en utilisant cet argument en sens inverse, il apparaît qu'on peut trouver la formule des forces à petites distances en ne connaissant que le champ à très grande distance, grâce à l'utilisation des lois de conservation de l'énergie, mais nous laisserons cela de côté ici.)

Le problème dans le cas d'un seul électron est celui-ci: sur quoi la force peut-elle agir s'il n'y a qu'une charge? On a proposé, dans la vieille théorie classique, que la charge était une petite balle, et qu'une partie de la charge agissait sur une autre partie. A cause du retard de l'action dû à la traversée du petit électron, la force n'est pas exactement en phase avec le mouvement. Lorsque l'électron se trouve au repos, nous savons que « l'action est égale à la réaction ». Ainsi les diverses forces internes sont égales, et il n'y a pas de forces résultantes. Mais si l'électron accélère, alors à cause du retard pris en le traversant, la force qui agit sur l'avant venant de l'arrière n'est pas exactement la même que la force sur l'arrière venant de l'avant à cause du retard dans l'effet. Ce retard réalise un déséquilibre, de telle sorte que comme effet résultant, la chose se maintient d'elle-même! Ce modèle de l'origine de la résistance à l'accélération, la résistance de rayonnement d'une charge en mouvement, a rencontré de nombreuses difficultés, parce que notre point de vue actuel sur l'électron est que ce n'est *pas* une « petite balle »; ce problème n'a jamais été résolu. Néanmoins, nous pouvons calculer exactement, bien sûr, quelle doit être la force de résistance de rayonnement résultante, c'est-à-dire quelle perte il doit y avoir lorsque nous accélérons une charge, bien que nous ne connaissions pas directement le mécanisme qui fait travailler cette force.

32-2 Le taux de rayonnement de l'énergie

Nous allons maintenant calculer l'énergie totale rayonnée par une charge en accélération. Pour conserver à la discussion son caractère de généralité, nous prendrons le cas d'une charge ayant une accélération

quelconque mais non relativiste. A un certain moment, lorsque l'accélération est par exemple verticale, nous savons que le champ électrique qui est créé est égal à la charge multipliée par la projection de l'accélération retardée, divisée par la distance. Nous connaissons le champ électrique en tout point, nous pouvons donc calculer le carré du champ électrique et ainsi déterminer l'énergie $\epsilon_0 c E^2$ qui traverse l'unité de surface par seconde.

La quantité $\epsilon_0 c$ apparaît très souvent dans les expressions comportant des propagations d'ondes radio. Son inverse est appelé l'*impédance du vide*, et c'est un nombre facile à se rappeler: il a la valeur $1/\epsilon_0 c = 377$ ohms. Ainsi la puissance en watts par mètre carré est égale à la valeur moyenne du carré du champ divisée par 377.

Utilisant notre expression (29.1) pour le champ électrique, nous trouvons que

$$S = \frac{q^2 a'^2 \sin^2 \theta}{16 \pi^2 \epsilon_0 r^2 c^3} \quad (32.2)$$

est la puissance par mètre carré rayonnée dans la direction θ . Nous remarquons qu'elle varie inversement avec le carré de la distance, comme nous l'avons déjà dit. Supposons maintenant que nous voulions l'énergie totale rayonnée dans toutes les directions: nous devons alors intégrer (32.2) dans toutes les directions. Nous multiplions d'abord par la surface, pour trouver la quantité qui circule dans un petit angle $d\theta$ (Fig. 32-1). Il nous faut la surface d'une section sphérique. On peut la calculer ainsi: si r est le rayon, la longueur d'un arc de cercle est $r d\theta$, et la circonférence est $2\pi r \sin \theta$, car $r \sin \theta$ est le rayon du cercle.

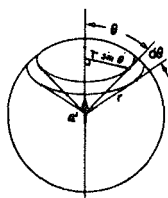


Fig. 32-1. La surface d'une section sphérique vaut $2\pi r \sin \theta \cdot r d\theta$.

Ainsi la surface de cette petite partie de la sphère est $2\pi r \sin \theta$ que multiplie $r d\theta$:

$$dA = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta. \quad (32.3)$$

En multipliant le flux [(32.2), la puissance par mètre carré] par la surface en mètre carré contenue dans le petit angle $d\theta$, nous trouvons la quantité d'énergie qui est envoyée dans cette direction entre θ et $\theta + d\theta$; ensuite nous intégrons ceci sur tous les angles θ de 0 à 180° :

$$P = \int S dA = \frac{q^2 a'^2}{8 \pi \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta. \quad (32.4)$$

En écrivant $\sin^3 \theta = (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta$, il n'est pas difficile de montrer que $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4/3$. Utilisant ce résultat, nous obtenons finalement

$$P = \frac{q^2 a'^2}{6 \pi \epsilon_0 c^3}. \quad (32.5)$$

Cette expression appelle quelques remarques. Tout d'abord puisque le vecteur $\mathbf{a}$

possède une certaine direction, a'^2 dans (32.5) sera le carré du vecteur a' , c'est-à-dire $a' \cdot a'$, la longueur du vecteur au carré. Deuxièmement, le flux (32.2) a été calculé en utilisant l'accélération retardée; c'est-à-dire l'accélération à l'instant où était émise l'énergie qui traverse maintenant la surface de la sphère. Nous aimerions dire que cette énergie a été effectivement émise à ce moment antérieur. Ce n'est pas tout à fait vrai; ce n'est qu'une idée approchée. Le moment exact auquel l'énergie a été libérée, ne peut être défini précisément. Tout ce que nous pouvons calculer effectivement avec précision est ce qui se passe dans un mouvement complet, tel qu'une oscillation ou quelque chose d'autre, où l'accélération finalement s'annule. Nous trouvons alors que le flux d'énergie total par cycle est égal à la valeur moyenne du carré de l'accélération, pour un cycle complet. C'est ce qui devrait réellement apparaître dans (32.5). Ou si c'est un mouvement avec une accélération qui est initialement et finalement nulle, alors l'énergie totale qui s'est écoulée vers l'extérieur est l'intégrale en fonction du temps de (32.5).

Pour illustrer les conséquences de la formule (32.5) lorsque nous avons un système en oscillation, regardons ce qui se passe si le déplacement x de la charge oscille de telle sorte que l'accélération a soit $-\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$. La valeur moyenne du carré de l'accélération sur un cycle (souvenez-vous que nous devons faire très attention lorsque nous élevons au carré des termes qui sont écrits en notation complexe - on a, en réalité, un cosinus, et la valeur moyenne de $\cos^2 \omega t$ est un-demi) est donc $\langle a'^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega^4 x_0^2$. De ce fait

$$P = \frac{q^2 \omega^4 x_0^2}{12 \pi \epsilon_0 c^3}. \quad (32.6)$$

Les formules que nous discutons maintenant sont d'un niveau relativement avancé et elles sont plus ou moins modernes; elles datent du début du vingtième siècle et elles sont très renommées. A cause de leur valeur historique, il est important que nous soyons capables de les lire dans des livres plus anciens. En fait, les vieux livres utilisent également un système d'unité différent de notre système mks actuel. Cependant, toutes ces complications peuvent s'arranger dans les formules finales concernant les électrons grâce aux règles suivantes: La quantité $q_e^2/4\pi\epsilon_0$, où q_e est la charge électronique (en coulombs), a été historiquement écrite comme étant e^2 . Il est très facile de calculer que e dans le système mks est numériquement égal à $1,5188 \times 10^{-19}$, parce que nous savons que numériquement $q_e = 1,60206 \times 10^{-19}$ et $1/4\pi\epsilon_0 = 8,98748 \times 10^9$. Aussi nous utilisons souvent une abréviation commode

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (32.7)$$

Si nous utilisons la valeur numérique précédente de e dans les anciennes formules, et que nous les traitons comme si elles étaient écrites en unité mks, nous obtiendrons des résultats numériques corrects. Par exemple, la forme ancienne de (32.5) est $P = \frac{2}{3} e^2 a'^2 / c^3$. A nouveau, l'énergie potentielle d'un proton et d'un électron à la distance r est $q_e^2/4\pi\epsilon_0 r$ ou e^2/r , avec $e = 1,5188 \times 10^{-14}$ mks.

32-3 Amortissement par rayonnement

Le fait qu'un oscillateur perde une certaine énergie signifie que si nous avons une charge à l'extrémité d'un ressort (ou un électron dans un atome) ayant une fréquence naturelle ω_0 , que nous le mettons en mouvement oscillant et que nous le laissons aller, il n'oscillera pas indéfiniment,

même s'il se trouve dans un espace vide à des millions de kilomètres de n'importe quoi d'autre. Il n'y a pas d'huile, pas de résistance, au sens ordinaire; pas de «viscosité». Mais néanmoins il n'oscillera pas «pour toujours», contrairement à ce que nous avons pu dire une fois, parce que s'il est chargé il rayonne de l'énergie et ainsi l'oscillation va lentement disparaître. A quelle vitesse? Quel est le Q d'un tel oscillateur, dû aux effets électromagnétiques, ce qu'on appelle la résistance de rayonnement ou l'amortissement par rayonnement d'un oscillateur? Le Q de n'importe quel système oscillant est le rapport du contenu total de l'énergie de l'oscillateur à n'importe quel instant à la perte d'énergie par radian :

$$Q = \frac{W}{dW/d\phi}.$$

Ou (une autre manière de l'écrire), puisque $dW/d\phi = (dW/dt)(d\phi/dt) = (dW/dt)/\omega$

$$Q = \frac{\omega W}{dW/dt}. \quad (32.8)$$

Si pour un Q donné ceci nous dit comment l'énergie de l'oscillation diminue, $dW/dt = -(\omega/Q)W$, qui a la solution $W = W_0 e^{-t\omega/Q}$ si W_0 est l'énergie initiale (au temps $t = 0$).

Pour trouver le facteur Q d'un système qui émet, nous retournons à (32.8) et utilisons (32.6) pour dW/dt .

Quelle valeur prenons-nous pour l'énergie W de l'oscillateur? L'énergie cinétique de l'oscillateur est $\frac{1}{2}mv^2$, et l'énergie cinétique *moyenne* est $m\omega^2 x_0^2/4$. Mais nous nous rappelons que dans l'énergie totale d'un oscillateur, la moitié de la valeur moyenne est cinétique et la moitié de l'énergie est potentielle, et donc nous doublons notre résultat et trouvons pour l'énergie totale de l'oscillateur

$$W = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2. \quad (32.9)$$

Quelle fréquence utilisons-nous dans nos formules? Nous utilisons la fréquence naturelle ω_0 , car dans toutes les applications pratiques, c'est la fréquence à laquelle notre atome rayonne et pour m nous utilisons la masse de l'électron m_e . Puis, opérant les divisions et simplifications nécessaires, la formule devient

$$\frac{1}{Q} = \frac{4\pi e^2}{3\lambda m_e c^2}. \quad (32.10)$$

(Afin de mieux l'examiner et pour emprunter une forme plus historique, nous l'écrivons en utilisant notre abréviation $q_e^2/4\pi\epsilon_0 = e^2$, et le facteur ω_0/c qui était laissé de côté, a été écrit sous la forme $2\pi/\lambda$.) Puisque Q est sans dimensions, la combinaison $e^2/m_e c^2$ doit n'être qu'une propriété de la masse et de la charge de l'électron, une propriété intrinsèque de l'électron, et cela doit être une *longueur*. On lui a donné un nom, *le rayon classique de l'électron*, parce que les modèles atomiques antérieurs, qui avaient été inventés pour expliquer la résistance de rayonnement sur la base de la force d'une partie de l'électron agissant sur les autres parties, nécessitaient tous un électron dont la dimension était de cet ordre de grandeur en général. Cependant, cette quantité n'a plus du tout la signification que nous croyons; nous ne croyons pas que l'électron *possède* effectivement un tel rayon. Numériquement, la grandeur du rayon est

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.82 \times 10^{-15} \text{ m}. \quad (32.11)$$

Essayons maintenant de calculer effectivement la valeur de Q pour un atome qui émet de la lumière – par exemple un atome de sodium. Pour un atome de sodium, la longueur d'onde est approximativement 6.000 angströms, dans la partie jaune du spectre visible et cette longueur d'onde est typique. Alors

$$Q = \frac{3\lambda}{4\pi r_0} \approx 5 \times 10^7, \quad (32.12)$$

ainsi le Q d'un atome est de l'ordre de 10^8 . Ceci signifie qu'un oscillateur atomique va osciller pendant 10^8 radians, c'est-à-dire à peu près 10^7 oscillations, avant que son énergie ne diminue d'un facteur $1/e$. La fréquence de l'oscillation de la lumière correspondant à 6.000 angströms, $\nu = c/\lambda$, est de l'ordre de 10^{15} cycles/sec et donc le temps de vie, le temps qu'il faut à l'énergie d'un atome émetteur pour diminuer d'un facteur $1/e$, est de l'ordre de 10^{-8} sec. Dans des circonstances ordinaires, les atomes émettant librement mettent à peu près ce temps pour rayonner. Ceci n'est valable que pour les atomes qui sont dans l'espace vide, n'étant par ailleurs aucunement perturbés. Si l'électron est dans un solide et qu'il doit frapper d'autres atomes ou d'autres électrons, il y a de ce fait des résistances additionnelles et des amortissements différents.

Le terme de résistance effective γ dans la loi de résistance de l'oscillateur peut être trouvé à partir de la relation $1/Q = \gamma/\omega_0$, et nous nous souvenons que la grandeur de γ détermine quelle est la largeur de la courbe de résonance (Fig. 23-2). Ainsi nous avons simplement calculé les *largeurs des raies spectrales* d'atomes émettant librement! Puisque $\lambda = 2\pi c/\omega$, nous trouvons que

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= 2\pi c \Delta\omega/\omega^2 = 2\pi c\gamma/\omega_0^2 = 2\pi c/Q\omega_0 \\ &= \lambda/Q = 4\pi r_0/3 = 1.18 \times 10^{-14} \text{ m.} \end{aligned} \quad (32.13)$$

32-4 Sources indépendantes

Pour préparer notre deuxième sujet, la diffusion de la lumière, nous devons maintenant discuter d'une certaine caractéristique des phénomènes d'interférences que nous avons négligé de traiter jusqu'à maintenant. C'est le problème de savoir quand les interférences *ne se produisent pas*. Si nous avons deux sources S_1 et S_2 avec des amplitudes A_1 et A_2 et que nous faisons une observation dans une certaine direction dans laquelle les phases à l'arrivée des deux signaux sont ϕ_1 et ϕ_2 (une combinaison du temps réel effectif de l'oscillation et du temps de retard dépendant de l'observation), alors l'énergie que nous recevons peut être déterminée en composant les deux vecteurs représentant les nombres complexes A_1 et A_2 d'un angle ϕ_1 et l'autre d'angle ϕ_2 (comme nous l'avons fait au Chapitre 30) et nous trouvons que l'énergie résultante est proportionnelle à

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2). \quad (32.14)$$

Si maintenant le terme croisé $2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2)$ n'était pas là, alors l'énergie totale reçue dans une certaine direction serait simplement la somme des deux énergies $A_1^2 + A_2^2$, qui seraient envoyées par chacune des sources séparément, ce à quoi nous nous attendons habituellement. C'est-à-dire que l'intensité combinée de la lumière éclairant quelque chose et provenant de deux sources est la somme des intensités des deux lumières. D'un autre côté, si tout est placé correctement et que nous ayons un terme croisé, ce n'est plus simplement une telle somme, parce qu'il y a aussi un terme d'interférence. S'il y a des circonstances dans lesquelles ce terme est sans

dans la nature elle est toujours là, mais nous pouvons ne pas être en mesure de la détecter.

Considérons quelques exemples. Supposez premièrement que les deux sources soient distantes de 7.000.000.000 de longueurs d'onde, un arrangement qui n'est pas impossible. Alors dans une certaine direction, il est vrai qu'il y a une valeur bien définie de la différence de phase. Mais, d'un autre côté, si nous nous déplaçons d'un rien dans une direction, de quelques longueurs d'ondes par exemple, ce qui revient à dire de rien du tout (notre œil est déjà percé d'un trou qui est si large que nous prenons la moyenne des effets sur un domaine très large en comparaison avec une longueur d'onde) nous changeons alors la phase relative, et le cosinus change très rapidement. Si nous prenons la valeur *moyenne* de l'intensité sur une petite région, le cosinus qui passe par plus, moins, plus, moins, lorsque nous nous déplaçons, est en moyenne nul.

Si donc nous prenons la moyenne sur des régions où la phase varie très rapidement avec la position, nous n'obtenons pas d'interférence.

Un autre exemple. Supposez que les deux sources soient deux oscillateurs radio indépendants – et non un seul oscillateur étant alimenté par deux fils, ce qui garantit que leurs phases restent semblables, mais deux sources indépendantes – et qu'elles ne soient pas *précisément* accordées à la même fréquence (il est très difficile de les mettre exactement à la même fréquence, à moins de ne faire qu'un seul montage). Dans ce cas, nous avons ce que nous appelons deux sources *indépendantes*. Bien sûr, puisque les fréquences ne sont pas exactement égales, et bien qu'elles partent en phase, l'une d'elles commence à prendre un peu d'avance sur l'autre, bientôt elles sont déphasées, puis elles continuent d'avancer et un peu plus tard elles sont à nouveau en phase. Ainsi leur différence de phase dérive progressivement avec le temps, mais si notre observation est si grossière que nous ne pouvons pas observer ce petit intervalle de temps, si nous prenons la moyenne sur une durée beaucoup plus longue, alors bien que l'intensité grandisse et diminue comme ce que nous appelons des « battements » dans le son, si ces montées et descentes sont trop rapides pour que notre équipement puisse les suivre, alors à nouveau on ne voit que la moyenne.

En d'autres termes, chaque fois que l'on prend la moyenne du décalage de phase on ne voit aucune interférence!

On trouve beaucoup de livres qui disent que deux sources de lumières distinctes n'interfèrent jamais. Ce n'est pas un énoncé de physique, mais simplement une affirmation du degré de sensibilité de la technique des expériences au temps où le livre a été écrit. Ce qui se passe dans une source de lumière est qu'un atome émet et puis un autre émet, etc., et nous venons tout juste de voir que les atomes émettent un train d'onde de durée environ 10^{-8} sec; après 10^{-8} sec, un atome a probablement pris la relève, puis un autre atome a pris sa place, etc. Ainsi les phases ne peuvent réellement rester constantes que pendant à peu près 10^{-8} sec. De ce fait, si nous prenons la moyenne pour des temps beaucoup plus longs que 10^{-8} sec, nous ne voyons pas l'interférence de deux sources différentes, parce qu'elles ne peuvent pas garder leurs phases constantes pendant un temps plus long que 10^{-8} sec. Avec des cellules photoélectriques, une détection à très grande vitesse est possible, et on peut montrer qu'il y a une interférence qui varie avec le temps augmentant et diminuant en à peu près 10^{-8} sec. Mais la plupart des équipements de détection, bien sûr, ne distinguent pas des intervalles de temps aussi fins et ne voient donc aucune interférence. Certainement avec l'œil, qui a un temps de réaction moyen de l'ordre du 10^e de seconde, il n'y a aucune chance de voir une interférence entre deux sources différentes ordinaires.

Récemment, il est devenu possible de faire deux sources de lumière qui permettent d'éliminer cet effet en faisant émettre tous les atomes en *même temps*. L'appareil qui permet ceci est

une chose très compliquée, son principe ne peut être compris qu'à l'aide de la mécanique quantique. Il est appelé un *laser* et on peut fabriquer à partir d'un laser une source dans laquelle la fréquence d'interférence, le temps pendant lequel la phase est maintenue constante, est beaucoup plus grand que 10^{-8} sec. Il peut être de l'ordre de un centième ou de un dixième, ou même d'une seconde et ainsi avec des cellules photoélectriques ordinaires, on peut enregistrer la différence de fréquence entre deux lasers différents. On peut facilement détecter la pulsation des battements entre deux sources lasers. Bientôt, sans doute, quelqu'un sera capable de montrer deux sources éclairant le mur, pour lesquelles les battements seront si lents qu'on pourra *voir* le mur devenir brillant et sombre!

Un autre cas dans lequel les interférences se détruisent en moyenne est celui pour lequel au lieu d'avoir *deux* sources, nous en avons *beaucoup*. Dans ce cas, nous écrirons les expressions de A_R^2 comme la somme de tout un ensemble d'amplitudes, de nombres complexes, élevés au carré et nous obtiendrons la somme des carrés de chacun, plus les termes croisés pour chaque paire et si les circonstances sont telles que ces derniers se détruisent en moyenne, alors il n'y aura pas d'effet d'interférence. Il se peut que les différentes sources soient situées au hasard dans diverses positions, de façon que, bien que la différence de phase entre A_2 et A_3 soit bien définie, elle soit très différente de celle entre A_1 et A_2 , etc. Ainsi nous obtiendrions tout un ensemble de cosinus, un grand nombre positif, les autres négatifs, se détruisant en moyenne.

Ainsi dans de nombreuses occasions, nous ne voyons pas les effets de l'interférence, mais nous ne voyons qu'une intensité collective totale égale à la somme de toutes les intensités.

32-5 Diffusion de la lumière

Ce que nous venons de voir nous conduit à un effet qui se manifeste dans l'air comme conséquence de la position irrégulière des atomes. Lorsque nous avons traité l'indice de réfraction, nous avons vu qu'un faisceau de lumière incident provoque une émission des atomes. Le champ électrique du faisceau incident fait osciller les électrons verticalement et ceux-ci émettent à cause de leur accélération. Ce rayonnement diffusé se mélange pour donner un faisceau dans la même direction que le faisceau incident, mais de phase quelque peu différente, ce qui constitue l'origine de l'indice de réfraction.

Mais que pouvons-nous dire de la quantité de lumière réémise dans d'autres directions? Habituellement, si les atomes sont bien placés dans une structure harmonieuse, il est facile de montrer que dans d'autres directions nous n'obtenons rien, parce que nous additionnons de nombreux vecteurs dont les phases varient sans cesse, et le résultat est nul. Mais si les objets sont distribués *au hasard*, alors l'intensité totale dans n'importe quelle direction est la *somme* des intensités qui sont diffusées par chaque atome, comme nous venons de le voir. De plus, les atomes dans un gaz sont en mouvement effectif, de telle sorte que bien que la phase relative de deux atomes soit une quantité bien définie maintenant, plus tard la phase sera tout à fait différente et ainsi il faudra considérer la valeur moyenne de *chaque* terme en cosinus qui est nulle. Ainsi, pour trouver comment la lumière est diffusée dans une direction donnée par un gaz, nous étudions simplement l'effet pour *un atome* et multiplions l'intensité qu'il émet par le nombre d'atomes.

Précédemment, nous avons indiqué que le phénomène de ce genre de diffusion de la lumière est à l'origine du bleu du ciel. La lumière du soleil traverse l'air et lorsque nous regardons latéralement – par exemple à 90° du faisceau venant du soleil – nous voyons de la lumière bleue; nous devons maintenant déterminer la *quantité* de lumière que nous voyons et *pourquoi elle est bleue*.

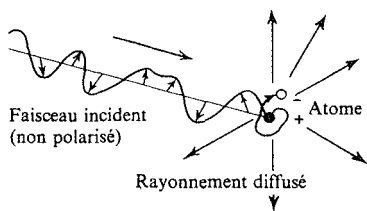


Fig. 32-2. Un rayonnement tombe sur un atome et fait se déplacer les charges (électrons) dans l'atome. Les électrons en mouvement à leur tour émettent dans diverses directions.

Si le faisceau incident donne un champ électrique $\mathbf{E} = E_0 e^{i\omega t}$ au point où l'atome est situé, nous savons qu'un électron dans l'atome oscille en réponse à ce champ électrique $\mathbf{E}$ (Fig. 32-2). De l'équation 23.8 on tire l'amplitude

$$\hat{x} = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}. \quad (32.15)$$

Nous pourrions inclure l'amortissement et la possibilité que l'atome agisse comme plusieurs oscillateurs de fréquences différentes et faire la somme pour toutes ces fréquences différentes, mais pour simplifier, ne considérons qu'un seul oscillateur et négligeons l'amortissement. La réponse au champ électrique externe, que nous avons déjà utilisée dans le calcul de l'indice de réfraction, est simplement

$$\hat{x} = \frac{q_e \hat{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (32.16)$$

Nous pourrions maintenant facilement calculer l'intensité de la lumière qui est émise dans différentes directions, en utilisant la formule (32.2) et l'accélération correspondant à la valeur $\hat{x}$ que l'on vient d'indiquer.

Plutôt que de faire cela, cependant, nous calculerons simplement la *quantité totale* de lumière diffusée dans *toutes* les directions, pour gagner du temps. La quantité totale d'énergie lumineuse diffusée par seconde dans toutes les directions par un seul atome, est bien sûr donnée par l'équation (32.6). Ainsi, en rassemblant les différents morceaux et en les regroupant, nous obtenons

$$\begin{aligned} P &= [(q_e^2 \omega^4 / 12 \pi \epsilon_0 c^3) q_e^2 E_0^2 / m_e^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2] \\ &= (\frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2) (8 \pi / 3) (q_e^4 / 16 \pi^2 \epsilon_0^2 m_e^2 c^4) [\omega^4 / (\omega^2 - \omega_0^2)^2] \\ &= (\frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2) (8 \pi r_0^2 / 3) [\omega^4 / (\omega^2 - \omega_0^2)^2] \end{aligned} \quad (32.17)$$

pour la puissance totale diffusée émise dans toutes les directions.

Nous avons écrit le résultat dans la forme ci-dessus parce qu'il est alors facile à retenir: Premièrement, l'énergie totale qui est diffusée est proportionnelle au carré du champ incident. Qu'est-ce que cela signifie? Évidemment, le carré du champ incident est proportionnel à l'énergie incidente par seconde. En fait, l'énergie incidente par mètre carré par seconde est égale au produit de $\epsilon_0 c$ par la valeur moyenne $\langle E^2 \rangle$ du carré du champ électrique, et si E_0 est la valeur maximum de E , alors $\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} E_0^2$. En d'autres termes, l'énergie totale diffusée est proportionnelle à l'énergie incidente par mètre carré; plus la lumière du soleil dans le ciel sera brillante, plus le ciel apparaîtra brillant.

Quelle *fraction* de la lumière incidente est diffusée? Imaginons une « cible » ayant une certaine surface, par exemple σ , placée dans le faisceau (non pas une cible matérielle, parce qu'elle diffracterait la lumière, etc.; nous voulons dire une surface imaginaire découpée dans l'espace). La quantité totale d'énergie qui traverse cette surface σ dans des conditions données est proportionnelle à la fois à l'intensité incidente et à σ et vaut

$$P = (\frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2)\sigma. \quad (32.18)$$

Nous inventons maintenant une notion nouvelle: nous disons que l'atome diffuse le total d'une quantité d'intensité qui est la quantité qui tomberait sur une certaine surface et nous donnons la réponse en donnant la valeur de cette surface. Cette réponse est alors indépendante de l'intensité incidente; elle donne le rapport de l'énergie diffusée à l'énergie incidente par mètre carré. En d'autres termes, le rapport

$$\frac{\text{énergie totale diffusée par seconde}}{\text{énergie incidente par mètre carré par seconde}} \text{ est une } \textit{surface}.$$

La signification de cette surface est que, si toute l'énergie qui atteint cette surface devait être envoyée dans toutes les directions, ce serait alors la quantité d'énergie diffusée par l'atome.

Cette surface est appelée la *section efficace de diffusion*; la notion de section efficace est utilisée constamment, chaque fois qu'un phénomène se produit en proportion de l'intensité d'un faisceau. Dans de tels cas, on décrit toujours l'intensité du phénomène produit en donnant la valeur de la surface effective qui prendrait cette quantité du faisceau. Cela ne signifie aucunement que cet oscillateur *possède* réellement une telle surface. S'il n'y avait rien d'autre qu'un électron libre oscillant verticalement, il n'y aurait pas physiquement de surface directement associée avec lui. C'est simplement une manière d'exprimer la réponse à un certain type de problème; cela nous dit quelle surface le faisceau incident devrait frapper afin de rendre compte de l'énergie sortante. Ainsi, pour notre cas

$$\sigma_d = \frac{8\pi r_0^2}{3} \cdot \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (32.19)$$

(l'indice d est pour « diffusion »).

Considérons quelques exemples. Premièrement, si nous choisissons une fréquence naturelle ω_0 très basse, ou des électrons complètement libres, pour lesquels $\omega_0 = 0$, la fréquence ω disparaît et la section efficace est une constante. Cette limite vers les basses fréquences, ou la section efficace des électrons libres, est connue sous le nom de *section efficace de diffusion de Thompson*. C'est une surface dont les dimensions sont approximativement 10^{-15} mètre de côté, c'est-à-dire 10^{-30} mètre carré, ce qui est plutôt faible!

D'un autre côté, si nous prenons le cas de la lumière dans l'air, nous nous souvenons que pour l'air les fréquences naturelles des oscillateurs sont plus élevées que les fréquences de la lumière que nous utilisons. Ceci signifie qu'en première approximation, nous pouvons négliger ω^2 au dénominateur, et nous trouvons que la diffusion est proportionnelle à la *quatrième puissance* de la fréquence. Cela revient à dire que la lumière qui a une fréquence plus élevée, par exemple,

d'un facteur deux, est diffusée avec *seize fois* plus d'intensité, ce qui est une différence de taille. Cela signifie que la lumière bleue, dont la fréquence est à peu près le double de la fréquence de l'extrémité rouge du spectre, est bien plus diffusée que la lumière rouge. C'est pourquoi lorsque nous regardons le ciel, apparaît ce bleu glorieux que nous voyons tout le temps!

On peut faire plusieurs remarques sur les résultats ci-dessus. Une question intéressante est : comment se fait-il que nous voyions les *nuages*? D'où proviennent les nuages? Chacun sait que c'est de la condensation de la vapeur d'eau. Mais, bien entendu, la vapeur d'eau est déjà dans l'atmosphère *avant* qu'elle ne se condense, aussi pourquoi ne la voyons-nous pas alors? Une fois condensée, c'est parfaitement évident. Elle n'était pas là, et maintenant elle *est* là. Ainsi le mystère de l'origine des nuages n'est pas simplement une devinette pour les enfants comme « D'où vient l'eau Papa? », mais il doit être éclairci.

Nous venons d'expliquer que chaque atome diffuse de la lumière, et bien sûr la vapeur d'eau diffuse de la lumière également. Le mystère est pourquoi, lorsque l'eau est condensée en nuage, diffuse-t-elle une *quantité tellement plus grande* de lumière?

Considérons ce qui se passerait si, au lieu d'un simple atome, nous avions un agglomérat d'atomes, par exemple deux atomes très proches en comparaison avec la longueur d'onde de la lumière. Souvenons-nous que les atomes n'ont qu'un angström ou à peu près de diamètre, tandis que la longueur d'onde de la lumière est de quelque cinq mille angströms, aussi lorsque quelques atomes se regroupent, ils peuvent *être* très rapprochés en comparaison avec la longueur d'onde de la lumière. Alors lorsque le champ électrique agit, *les deux atomes vont réagir ensemble*. Le champ électrique qui est diffusé sera alors la somme des deux champs électriques en phase, c'est-à-dire qu'il aura une amplitude double de celle en présence d'un seul atome, et l'*énergie* qui est diffusée sera de ce fait *quatre fois* ce qu'elle était avec un seul atome et non deux fois! Ainsi les atomes en groupe rayonnent ou diffusent davantage d'énergie que lorsqu'ils sont isolés. Notre argument disant que les phases sont indépendantes est basé sur l'hypothèse qu'il y a une grande différence de phase effective entre deux atomes au hasard, ce qui n'est vrai que s'il y a plusieurs longueurs d'ondes de distance entre eux et s'ils sont répartis au hasard ou s'ils sont en mouvement. Mais s'ils se trouvent les uns à côté des autres, ils diffusent nécessairement en phase et ils manifestent une interférence cohérente qui produit une augmentation de la diffusion.

Si nous avons N atomes dans un amas, ce qui forme une toute petite goutte d'eau, alors chacun sera piloté par le champ électrique à peu près de la même manière que précédemment (l'effet d'un atome sur l'autre n'est pas important; et de toute manière nous ne voulons que saisir l'idée fondamentale) et l'amplitude de diffusion de chacun d'eux est la même, ce qui fait que le champ total diffusé est augmenté N fois. L'*intensité* de la lumière diffusée est donc le carré, ou est augmentée N^2 fois. Nous nous serions attendu, si les atomes avaient été dispersés dans l'espace, à trouver N fois l'intensité de 1 atome, alors que nous obtenons N^2 fois plus que 1! Cela revient à dire que la diffusion de l'eau en paquets de N molécules chacun, est N fois plus intense que la diffusion des atomes seuls. Ainsi lorsque l'eau se condense, la diffusion augmente. Cela augmente-t-il à l'*infini*? Non! A quel moment cette analyse se trouve-t-elle en défaut? Combien d'atomes pouvons-nous mettre ensemble avant de ne plus pouvoir continuer d'appliquer ce raisonnement? *Réponse*: Si la goutte d'eau devient si grande que d'une extrémité à l'autre il y ait une longueur d'onde ou à peu près, alors les atomes ne sont plus en phase parce qu'ils sont trop éloignés. Ainsi, lorsque nous augmentons la dimension de la goutte, nous obtenons de plus en plus de diffusion jusqu'au moment où une telle goutte atteint à peu près la dimension d'une longueur d'onde et alors la diffusion n'augmente plus aussi rapidement

lorsque la goutte devient plus grande. De plus, le bleu disparaît, parce que pour de grandes longueurs d'ondes la goutte peut être plus grande avant que cette limite ne soit atteinte, qu'elle ne peut l'être pour de courtes longueurs d'ondes. Bien que par atome les courtes longueurs d'ondes diffusent davantage que les grandes longueurs d'ondes, l'augmentation est plus grande pour l'extrémité rouge du spectre que pour l'extrémité bleue lorsque les gouttes sont toutes plus grandes que la longueur d'onde, ainsi la couleur passe du bleu au rouge.

Nous pouvons maintenant faire une expérience qui démontre ceci. Nous pouvons fabriquer des particules qui sont toutes très petites au début et qui augmentent graduellement en taille. Nous utilisons une solution de thiosulfate de sodium (hypo) avec de l'acide sulfurique qui précipite des grains de soufre extrêmement fins. Lorsque le soufre précipite, les grains au début sont très petits et la diffusion est de teinte bleuâtre. Lorsqu'il précipite davantage, elle devient plus intense et finalement elle devient blanchâtre lorsque les particules augmentent encore. De plus, la lumière qui traverse perd sa composante bleue. C'est pourquoi, bien sûr, le coucher du soleil est rouge, c'est parce que la lumière qui traverse une grande masse d'air pour atteindre l'œil a perdu par diffusion une grande quantité de lumière bleue, elle est donc jaune-rouge.

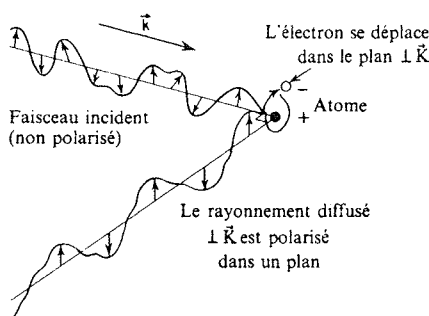


Fig. 32-3. Illustration de l'origine de la polarisation du rayonnement diffusé perpendiculairement au faisceau incident.

Il y a finalement un autre aspect important qui relève en fait du chapitre suivant sur la polarisation, mais il est si intéressant que nous en parlerons dès maintenant. Il réside dans le fait que le champ électrique de la lumière diffusée tend à vibrer dans une direction particulière. Le champ électrique de la lumière incidente oscille d'une certaine manière, l'oscillateur piloté va dans la même direction et si nous sommes à peu près situés à angle droit du faisceau, nous verrons de la lumière *polarisée*, c'est-à-dire de la lumière dans laquelle le champ électrique ne se déplace que d'une seule manière. En général, les atomes peuvent vibrer dans n'importe quelle direction perpendiculaire au faisceau, mais s'ils sont pilotés directement en s'écartant de nous ou vers nous, nous ne le voyons pas. Si donc la lumière incidente a un champ électrique qui change et oscille dans toutes les directions, ce que nous appelons une lumière non polarisée, alors la lumière qui sort à 90° du faisceau ne vibre que dans une seule direction! (Voir Fig. 32-3.)

Il existe une substance appelée « polaroid » qui a cette propriété que lorsque la lumière la traverse, seule la partie du champ électrique qui est parallèle à un axe particulier peut sortir. Nous pouvons utiliser ceci pour vérifier la polarisation et nous voyons en réalité que la lumière diffusée par la solution d'hyposulphite est fortement polarisée.

Polarisation

33-1 Le vecteur électrique de la lumière

33-2 Polarisation de la lumière diffusée

33-3 Biréfringence

33-4 Polariseurs

33-5 Activité optique

33-6 L'intensité de la lumière réfléchie

33-7 Réfraction anormale

33-1 Le vecteur électrique de la lumière

Dans ce chapitre nous allons considérer les phénomènes qui dépendent de la nature vectorielle du champ électrique qui décrit la lumière. Dans les chapitres précédents, nous ne nous sommes pas occupés de la direction de l'oscillation du champ électrique, sauf pour remarquer que le vecteur électrique se trouve dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation. La direction particulière dans ce plan ne nous intéressait pas. Nous considérons maintenant ces phénomènes dont l'aspect essentiel est lié à la direction particulière de l'oscillation du champ électrique.

Dans une lumière parfaitement monochromatique, le champ électrique doit osciller à une fréquence définie, mais puisque la composante x et la composante y peuvent osciller indépendamment à une fréquence définie, nous devons d'abord considérer l'effet résultant produit en superposant deux oscillations indépendantes perpendiculaires l'une à l'autre. Quel genre de champ électrique peut-on former avec une composante x et une composante y qui oscillent à la même fréquence? Si on ajoute à une vibration x une certaine quantité de vibration y de même phase, le résultat est une vibration dans une nouvelle direction dans le plan xy . La Figure (33-1) illustre la superposition d'amplitudes différentes de la

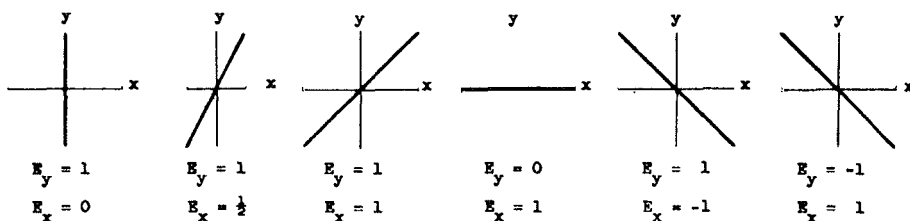


Fig. 33-1. Superposition de vibrations x et de vibrations y en phase.

vibration x et de la vibration y . Mais les résultats indiqués à la Figure 33-1 ne sont pas les seuls possibles; dans tous ces cas nous avons supposé que la vibration x et la vibration y sont *en phase*, mais il n'est pas nécessaire que ce soit toujours le cas. Il se peut que les vibrations x et y soient déphasées.

Lorsque la vibration x et la vibration y ne sont pas en phase, l'extrémité du vecteur champ électrique parcourt une ellipse, et nous pouvons illustrer ceci d'une manière simple. Si nous suspendons une balle au bout d'un long fil attaché à un support, de telle sorte qu'elle puisse se balancer librement dans un plan horizontal, elle exécutera des oscillations sinusoïdales. Si nous imaginons des coordonnées x et y horizontales avec leurs origines à la position au repos de la balle, la balle peut osciller dans les directions x ou y avec la même fréquence que celle du pendule. En choisissant un déplacement initial correct et une vitesse initiale adéquate, nous pouvons faire osciller la balle le long de l'axe des x ou de l'axe des y , ou le long de n'importe quelle ligne droite dans le plan xy . Ces mouvements de la balle sont analogues aux oscillations du vecteur champ électrique illustrées à la Figure 33-1. Dans chaque cas, puisque les vibrations x et les vibrations y atteignent leurs maxima et leurs minima au même moment, les oscillations x et y sont en phase. Mais nous savons que le mouvement le plus général de la balle s'effectue le long d'une ellipse, ce qui correspond à des oscillations pour lesquelles les directions x et y ne sont *pas* en phase. La superposition des vibrations x et y qui ne sont pas en phase est illustrée à la Figure 33-3 pour diverses valeurs d'angle entre les phases de la vibration x et de la vibration y . Le résultat général est que le vecteur électrique se déplace le long d'une ellipse. Le mouvement en ligne droite est un cas particulier correspondant à une différence de phase nulle (ou à un multiple entier de π); le mouvement sur un cercle correspond à des amplitudes égales avec une différence de phase de 90° (ou n'importe quel multiple impair de $\pi/2$).

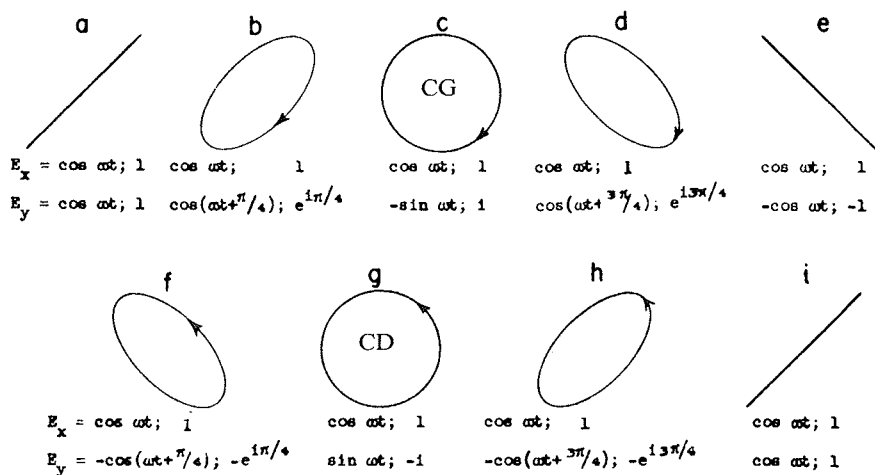


Fig. 33-2. Superposition de vibrations x et de vibrations y d'amplitudes égales mais de diverses phases relatives. Les composantes E_x et E_y sont exprimées à la fois en notations réelle et complexe.

Sur la Figure 33-2 nous avons affecté aux vecteurs champ électrique dans les directions x et y des nombres complexes, ce qui est une représentation commode pour exprimer la différence de phase. Ne confondez pas les composantes réelles et imaginaires du vecteur électrique complexe dans cette notation, avec les coordonnées x et y du champ. Les coordonnées x et y reportées à la Figure 33-1 et à la Figure 33-2 sont des champs électriques réels que nous pouvons mesurer. Les composantes réelles et imaginaires d'un vecteur champ électrique complexe sont simplement une commodité mathématique et n'ont pas de signification physique.

Voyons maintenant un peu de terminologie. La lumière est *polarisée linéairement* (on dit quelquefois polarisée dans un plan) lorsque le champ électrique oscille le long d'une ligne droite; la Figure 33-1 illustre la polarisation linéaire. Lorsque l'extrémité du vecteur champ électrique parcourt une ellipse, la lumière est *polarisée elliptiquement*. Lorsque l'extrémité du vecteur champ électrique parcourt un cercle, nous avons une *polarisation circulaire*. Si l'extrémité du vecteur électrique, quand nous le regardons lorsque la lumière vient vers nous, tourne d'une manière opposée aux aiguilles d'une montre, nous l'appelons une polarisation circulaire droite. La Figure 33-2 (g) illustre une polarisation circulaire droite et la Figure 33-2 (c) indique une polarisation circulaire gauche. Dans les deux cas, la lumière traverse vers nous la feuille de papier. Notre convention pour identifier des polarisations circulaires gauche et droite est en accord avec celle qui est utilisée aujourd'hui pour toutes les autres particules en physique qui présentent une polarisation (par exemple, les électrons). Cependant, dans certains livres d'optique des conventions opposées sont utilisées, on doit donc faire attention.

Nous venons de considérer de la lumière polarisée linéairement, circulairement et elliptiquement, ce qui couvre pratiquement tout sauf le cas de la lumière *non polarisée*. Mais comment peut-il se faire que la lumière soit non polarisée lorsque nous savons qu'elle doit vibrer selon l'une ou l'autre de ces ellipses? Si la lumière n'est pas complètement monochromatique, ou si les phases x et y ne sont pas parfaitement liées, de telle sorte que le vecteur électrique vibre d'abord dans une direction et ensuite dans une autre, la polarisation change constamment. Souvenez-vous qu'un atome émet durant 10^{-8} sec, et si un atome émet une certaine polarisation, un autre atome émet ensuite de la lumière avec une polarisation différente, la polarisation change toutes les 10^{-8} sec. Si la polarisation change plus rapidement que nous ne pouvons la détecter, alors nous disons que la lumière est une lumière non polarisée, parce que tous les effets de la polarisation disparaissent en moyenne. Aucun des effets d'interférence de la polarisation ne se manifesterait avec de la lumière non polarisée. Mais, comme nous le voyons à partir de la définition, la lumière n'est pas polarisée simplement lorsque nous ne sommes pas capables de vérifier si la lumière est polarisée ou non.

33-2 Polarisation de la lumière diffusée

Le premier exemple de l'effet de polarisation que nous avons déjà discuté est celui de la diffusion de la lumière. Considérons un faisceau de lumière, venant par exemple du soleil, envoyé dans l'air. Le champ électrique produira les oscillations des charges dans l'air, et le mouvement de ces charges va émettre une lumière dont l'intensité maximum sera située dans un plan normal à la direction de vibration de ces charges. Le faisceau venant du soleil n'est pas polarisé, ce qui fait que la direction de polarisation change constamment et la direction des vibrations des charges dans l'air change également constamment. Si nous considérons la lumière diffusée à 90° , la vibration des particules chargées n'émet vers l'observateur que lorsque la

vibration est perpendiculaire à la ligne de vue de l'observateur et la lumière sera alors polarisée le long de la direction de la vibration. Ainsi la diffusion est un exemple d'un moyen de produire de la polarisation.

33-3 Biréfringence

Un autre effet intéressant de polarisation est le fait qu'il y a des substances pour lesquelles l'indice de réfraction est différent pour la lumière linéairement polarisée dans une direction et pour celle linéairement polarisée dans une autre. Supposez que nous ayons un certain matériau qui soit constitué de molécules longues et non sphériques, plus longues que larges, et supposez que ces molécules soient orientées dans la substance avec leurs grands axes parallèles. Que se passe-t-il alors lorsque le champ électrique oscillant traverse cette substance? Supposez que à cause de la structure de la molécule, les électrons dans la substance répondent plus facilement aux oscillations dans la direction parallèle à l'axe des molécules qu'ils ne répondent si le champ électrique essaie de les déplacer perpendiculairement à l'axe moléculaire. De cette manière, nous nous attendons à un effet différent pour la polarisation dans une direction et pour la polarisation perpendiculaire à cette direction. Appelons *axe optique* la direction de l'axe des molécules. Lorsque la polarisation est dans la direction de l'axe d'optique, l'indice de réfraction est différent de ce qu'il serait si la direction de polarisation était perpendiculaire à celui-ci. On dit qu'une telle substance est *biréfringente*. Elle a deux possibilités de réfracter, c'est-à-dire deux indices de réfraction, dépendant de la direction de la polarisation à l'intérieur de la substance. Quel genre de substance peut être biréfringente? Dans une substance biréfringente, il doit y avoir un certain alignement, pour une raison ou pour une autre, de molécules non symétriques. Il est certain, par exemple, qu'un cristal cubique qui a la symétrie d'un cube, ne peut être biréfringent. Mais de longs cristaux en forme d'aiguille contiennent sans aucun doute des molécules qui sont asymétriques, et on observe cet effet très facilement.

Voyons quels sont les effets auxquels nous pouvons nous attendre si nous envoyons une lumière polarisée au travers d'une plaque de substance biréfringente. Si la polarisation est parallèle à l'axe optique, la lumière va traverser avec une certaine vitesse; si la polarisation est perpendiculaire à l'axe, la lumière est transmise avec une vitesse différente. Un cas intéressant se produit lorsque la lumière est par exemple linéairement polarisée à 45° de l'axe optique. Nous avons déjà remarqué qu'une polarisation à 45° peut être représentée par une superposition de polarisations x et y d'amplitudes égales et en phase, comme il est indiqué à la Figure 33-2 (a). Puisque les polarisations x et y se déplacent avec des vitesses différentes, leurs phases changent à une vitesse différente lorsque la lumière traverse la substance. Ainsi, bien qu'au départ les vibrations x et y soient en phase, la différence de phase entre les vibrations x et y à l'intérieur du matériau est proportionnelle à la profondeur dans la substance. Lorsque la lumière avance dans le matériau, la polarisation change comme il est indiqué dans la série de diagrammes de la Figure 33-2. Si l'épaisseur de la plaque est juste suffisante pour introduire un décalage de phase de 90° entre les polarisations x et y , comme sur la Figure 33-2 (c), la lumière sortira polarisée circulairement. Une plaque de cette épaisseur est appelée une plaque quart d'onde parce qu'elle introduit une différence de phase d'un quart de cycle entre les polarisations x et y . Si une lumière linéairement polarisée est envoyée au travers

de deux plaques quart d'onde, elle sortira à nouveau polarisée linéairement, mais perpendiculairement à la direction initiale, comme nous pouvons le voir à partir de la Figure 33-2 (c).

On peut facilement illustrer ce phénomène avec un morceau de cellophane. La cellophane est constituée de longues molécules fibreuses, elle n'est pas isotrope puisque les fibres s'orientent de préférence dans une certaine direction. Pour démontrer la biréfringence, il nous faut un faisceau de lumière linéairement polarisée et nous pouvons l'obtenir facilement en faisant passer la lumière non polarisée au travers d'une feuille de polaroïd. Le polaroïd, que nous étudierons plus tard plus en détail, a la propriété utile de transmettre une lumière linéairement polarisée parallèle à l'axe du polaroïd avec une très faible absorption, tandis que la lumière polarisée dans une direction perpendiculaire à l'axe du polaroïd est fortement absorbée. Lorsque nous envoyons une lumière non polarisée au travers d'une feuille de polaroïd, seule traverse la partie du faisceau non polarisée qui vibre parallèlement à l'axe du polaroïd, de telle sorte que le faisceau transmis est linéairement polarisé. Cette même propriété du polaroïd est également utile pour la détection de la direction de polarisation d'un faisceau linéairement polarisé ou pour déterminer si un faisceau est linéairement polarisé ou non. On fait simplement passer le faisceau de lumière au travers de la feuille de polaroïd et on tourne le polaroïd dans le plan normal au faisceau. Si le faisceau est linéairement polarisé, il ne traverse pas la feuille lorsque l'axe du polaroïd est perpendiculaire à la direction de polarisation. Le faisceau transmis est simplement légèrement atténué lorsque l'axe de la feuille de polaroïd est tourné de 90° . Si l'intensité transmise est indépendante de l'orientation du polaroïd, le faisceau n'est pas linéairement polarisé.

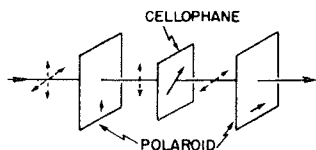


Fig. 33-3. Une démonstration expérimentale de la biréfringence de

la cellophane. Les vecteurs électriques de la lumière sont indiqués par des traits en pointillés. Les axes de passage des feuilles de polaroïd et les axes optiques de la cellophane sont indiqués par des flèches. Le faisceau incident n'est pas polarisé.

Pour démontrer la biréfringence de la cellophane, nous utilisons deux feuilles de polaroïd comme il est indiqué sur la Figure 33-3. La première nous donne un faisceau linéairement polarisé que nous faisons passer au travers de la cellophane et ensuite au travers de la deuxième feuille de polaroïd, qui sert à détecter un effet quelconque produit par la cellophane sur la lumière polarisée qui la traverse. Si nous rendons d'abord les deux feuilles de polaroïd perpendiculaires l'une à l'autre et enlevons la cellophane, aucune lumière ne traversera le deuxième polaroïd. Si maintenant nous introduisons la cellophane entre les deux feuilles de polaroïd et que nous tournions la feuille autour de l'axe du faisceau, nous observons qu'en général la cellophane permet à une partie de la lumière de traverser le deuxième polaroïd. Cependant, il y a deux orientations de la feuille de cellophane, perpendiculaires l'une de l'autre, qui interdisent à la lumière de traverser le second polaroïd. Ces orientations pour lesquelles la lumière linéairement polarisée est transmise au travers de la cellophane sans effet sur la direction de polarisation, doivent être les directions parallèles et perpendiculaires à l'axe optique de la feuille de cellophane.

Nous supposons que la lumière traverse la cellophane avec deux vitesses différentes dans ces deux orientations différentes, mais qu'elle est transmise sans changement de direction de polarisation. Lorsque la cellophane est tournée à mi-chemin entre ces deux orientations, comme il est indiqué sur la Figure 33-3, nous voyons que la lumière transmise au travers du second polaroïd est brillante.

Il se trouve que la cellophane ordinaire utilisée dans les emballages commerciaux a une épaisseur très proche d'une épaisseur demi-onde pour la plupart des couleurs de la lumière blanche. Une telle feuille tournera les axes de la lumière polarisée linéairement de 90° si le faisceau incident polarisé linéairement fait un angle de 45° avec l'axe optique, ce qui fait que le faisceau émergent de la cellophane vibre alors dans la direction correcte pour traverser la seconde feuille de polaroïd.

Si nous utilisons de la lumière blanche dans notre démonstration, la couche de cellophane n'aura une épaisseur demi-onde que pour une composante particulière de la lumière blanche et le faisceau transmis aura la couleur de cette composante. La couleur transmise dépend de l'épaisseur de la feuille de cellophane et nous pouvons varier l'épaisseur effective de la cellophane en l'inclinant de telle sorte que la lumière passe au travers de la cellophane en oblique et en conséquence parcourt une plus grande longueur dans la cellophane. Lorsque l'inclinaison de la feuille varie la couleur transmise change. Avec des cellophanes de différentes épaisseurs, on peut construire des filtres qui transmettent des couleurs différentes. Ces filtres ont la propriété intéressante qu'ils transmettent une couleur lorsque les deux feuilles de polaroïd ont leurs axes perpendiculaires, et la couleur complémentaire lorsque les axes des deux feuilles polaroïd sont parallèles.

Une autre application intéressante des molécules alignées est tout à fait pratique. Certains plastiques sont constitués de molécules très longues et compliquées toutes enchevêtrées. Lorsque le plastique est solidifié avec grand soin, les molécules sont toutes emmêlées dans la masse, de telle sorte qu'il y en a autant alignées dans une direction que dans une autre et le plastique n'est pas particulièrement biréfringent. Habituellement des tensions et des déformations s'introduisent lorsque le matériau est solidifié, ce qui fait que le matériau n'est pas parfaitement homogène. Cependant, si nous appliquons une tension à un morceau de ce matériau plastique, c'est comme si nous tirions tout un enchevêtrement de ressorts, il y aura davantage de ressorts alignés parallèlement à la tension que dans toute autre direction. Ainsi, lorsqu'une tension est appliquée à un certain plastique, il devient biréfringent et on peut voir les effets de la biréfringence en envoyant de la lumière polarisée au travers du plastique. Si nous examinons la lumière transmise au travers d'une feuille de polaroïd, on observe des dessins de franges lumineuses et sombres (en couleur, si on utilise de la lumière blanche). Les dessins se déplacent lorsque la tension est appliquée à l'échantillon et en comptant les franges et en voyant où sont situées la plupart d'entre elles, on peut déterminer quelle est la valeur de la tension. Les ingénieurs utilisent ce phénomène comme moyen pour trouver la tension dans des pièces de formes bizarres qui sont difficiles à calculer.

Un autre exemple intéressant d'une manière d'obtenir la biréfringence est l'utilisation d'une substance liquide. Considérez un liquide composé de longues molécules asymétriques qui portent une charge moyenne près de leurs extrémités, de telle sorte que la molécule soit un dipôle électrique. Dans les collisions du liquide les molécules s'orientent ordinairement au hasard, avec autant de molécules pointant dans une direction que dans une autre. Si nous appliquons un champ électrique, les molécules vont tendre à s'aligner et au moment où elles s'alignent le liquide devient biréfringent. Avec deux feuilles

de polaroïd et une cellule transparente contenant un tel liquide polaire, nous pouvons mettre au point un système ne transmettant la lumière que lorsque le champ électrique est appliqué. Nous avons ainsi un interrupteur électrique pour la lumière qui est appelé une *cellule de Kerr*. Cet effet, qu'un champ électrique peut produire de la biréfringence dans certains liquides, est appelé l'effet Kerr.

33-4 Polariseurs

Jusqu'à présent nous avons considéré des substances dans lesquelles l'indice de réfraction est différent lorsque la lumière est polarisée dans différentes directions. Les cristaux et autres substances dans lesquels non seulement l'indice, mais également le coefficient d'absorption, est différent pour la lumière polarisée dans différentes directions, sont d'un très grand intérêt pratique. Par les mêmes arguments qui ont éclairé l'idée de biréfringence, il est possible de comprendre que l'absorption peut varier avec la direction dans laquelle les charges sont forcées de vibrer dans une substance anisotrope. La tourmaline est un vieil exemple très connu et le polaroïd en est un autre. Le polaroïd est une fine feuille de petits cristaux d'héraphathite (un sel d'iode et de quinine), tous alignés avec leurs axes parallèles. Ces cristaux absorbent la lumière lorsque les oscillateurs sont dans une direction, et ils ne l'absorbent pas appréciablement lorsque les oscillations sont dans l'autre direction.

Supposez que nous envoyons sur une feuille de polaroïd de la lumière linéairement polarisée faisant un angle θ avec la direction de passage. Quelle intensité va passer? Cette lumière incidente peut être décomposée en une composante perpendiculaire à la direction de passage qui est proportionnelle à $\sin \theta$, et une composante le long de la direction de passage qui est proportionnelle à $\cos \theta$. L'amplitude qui sort du polaroïd n'est que la partie en $\cos \theta$; la composante en $\sin \theta$ est absorbée. L'amplitude qui sort du polaroïd est plus petite que l'amplitude qui entre d'un facteur $\cos \theta$. L'énergie qui traverse le polaroïd, c'est-à-dire l'intensité de la lumière, est proportionnelle au carré de $\cos \theta$. $\cos^2 \theta$ est alors l'intensité transmise lorsque la lumière pénètre dans le polariseur faisant un angle θ avec la direction de passage. L'intensité absorbée est, bien sûr, $\sin^2 \theta$.

Un paradoxe intéressant se manifeste dans le cas suivant. Nous savons qu'il n'est pas possible d'envoyer un faisceau de lumière au travers de deux feuilles de polaroïd avec leurs axes croisés perpendiculairement. Mais si nous plaçons un troisième polaroïd *entre* les deux premiers, avec son axe de passage à 45° des axes croisés, de la lumière est transmise. Nous savons que le polaroïd absorbe de la lumière, il ne crée rien de nouveau. Néanmoins l'addition d'un troisième polaroïd à 45° permet à davantage de lumière de passer au travers. L'analyse de ce phénomène est laissée sous forme d'exercice à l'étudiant.

Un des exemples les plus intéressants de la polarisation ne se trouve pas dans des cristaux compliqués ou des substances difficiles mais se manifeste dans l'un des phénomènes les simples et familiers – la réflexion de la lumière sur une surface. Croyez-le ou non, lorsque la lumière est réfléchiée sur une surface de verre, elle peut être polarisée et l'explication physique de ceci est très simple. Brewster découvrit empiriquement que la lumière réfléchiée sur une surface est complètement polarisée si le faisceau réfléchi et le faisceau réfracté dans le matériau forment un angle droit. Cette disposition est illustrée sur la Figure 33-4. Si le faisceau incident est polarisé dans le plan d'incidence, il n'y aura pas du tout de

réflexion. Ce n'est que si le faisceau incident est polarisé perpendiculairement au plan d'incidence qu'il sera réfléchi. La raison est très facile à comprendre. Dans le matériau réfléchissant, la lumière est polarisée transversalement et nous savons que c'est le mouvement des charges dans le matériau, qui crée le faisceau émergent, que nous appelons le faisceau réfléchi. La source de cette lumière réfléchie n'est pas simplement la réflexion du rayon incident; notre compréhension plus profonde de ce phénomène nous dit que le faisceau incident fait osciller des charges dans le matériau, qui à leur tour engendrent le faisceau réfléchi. Sur la Figure 33-4, il est clair que seules les oscillations normales au papier peuvent émettre dans la direction de réflexion, et en conséquence le faisceau réfléchi sera polarisé normalement au plan d'incidence. Si le faisceau incident est polarisé dans le plan d'incidence, il n'aura pas de lumière réfléchie.

Ce phénomène est immédiatement démontré en réfléchissant un faisceau de lumière linéairement polarisée sur un morceau de verre plat. Si le verre est tourné afin de présenter différents angles d'incidence au faisceau polarisé, on observe une forte atténuation de l'intensité réfléchie lorsque l'angle d'incidence passe par l'angle de Brewster. Cette atténuation n'est observée que si le plan de polarisation se trouve dans le plan d'incidence. Si le plan de polarisation est normal au plan d'incidence, l'intensité réfléchie habituelle est observée pour tous les angles.

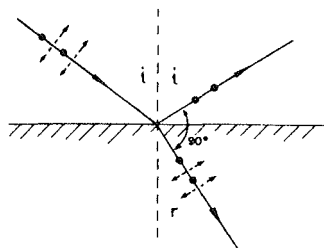


Fig. 33-4. Réflexion de lumière linéairement polarisée sous un angle de Brewster. La direction de polarisation est indiquée par les flèches en pointillé; les points noirs indiquent une polarisation perpendiculaire au papier.

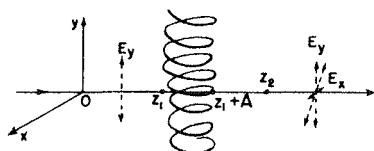


Fig. 33-5. Une molécule dont la forme n'est pas symétrique dans une réflexion par un miroir. Un faisceau de lumière, polarisé linéairement dans la direction y , tombe sur la molécule.

33-5 Activité optique

Un autre effet tout à fait remarquable de la polarisation est observé dans les matériaux composés de molécules qui n'ont pas de symétrie par réflexion: des molécules ayant une forme analogue à un tire-bouchon ou à une main gantée, ou n'importe quelle forme qui, si elle est vue dans un miroir, sera renversée de la même manière qu'un gant de la main gauche se réfléchit en un gant de la main droite. Supposez que toutes les molécules dans les substances soient les mêmes, c'est-à-dire qu'aucune ne soit l'image dans un miroir d'aucune autre. Une telle substance peut manifester un effet intéressant appelé l'activité optique, par lequel lorsque la lumière linéairement polarisée traverse la substance, la direction de polarisation tourne autour de l'axe du faisceau.

Pour comprendre le phénomène de l'activité optique, il faut faire un petit peu de calcul, mais nous pouvons voir qualitativement comment l'effet se justifie sans pour autant faire les calculs. Considérez une molécule asymétrique ayant la forme d'une spirale comme il est indiqué sur la Figure 33-5. Les molécules n'ont pas en réalité besoin d'avoir la forme d'un tire-bouchon pour manifester de l'activité optique, mais ceci est une forme simple que nous prendrons comme un exemple typique de ceux où il n'y a pas de symétrie de réflexion. Lorsqu'un faisceau de lumière linéairement polarisée le long de la direction y tombe sur cette molécule, le champ électrique va faire osciller les charges verticalement dans l'hélice créant ainsi un courant dans la direction y et émettant un champ électrique E_y polarisé dans la direction y . Cependant, si les électrons sont obligés de se déplacer le long de la spirale, ils doivent également se déplacer dans la direction x lorsqu'ils sont conduits verticalement. Lorsqu'un courant se déplace vers le haut de la spirale, il est également en train de se déplacer vers l'arrière du papier en $z = z_1$ et vers l'avant en $z = z_1 + A$, si A est le diamètre de notre spirale moléculaire. On peut supposer que le courant dans la direction x ne produira pas de rayonnement résultant, puisque les courants sont dans des directions opposées sur les côtés opposés de la spirale. Cependant, si nous considérons les composantes x du champ électrique arrivant en $z = z_2$, nous voyons que le champ émis par le courant en $z = z_1 + A$ et le champ émis en $z = z_1$ arrivent en z_2 séparés en temps d'une quantité A/c , et donc séparés en phase par $\pi + \omega A/c$. Puisque la différence de phase n'est pas exactement π les deux champs ne se détruisent pas exactement, et il nous reste une petite composante x du champ électrique engendré par le mouvement des électrons dans la molécule, tandis que le champ électrique conducteur n'a qu'une composante y . Cette petite composante x additionnée à la grande composante y produit un champ résultant qui est légèrement tourné par rapport à l'axe y de la direction originale de polarisation. Lorsque la lumière avance au travers du matériau, la direction de polarisation tourne autour de l'axe du faisceau. En dessinant quelques exemples et en considérant les courants mis en mouvement par le champ électrique incident, on peut se convaincre que l'existence d'une activité optique et le signe de la rotation sont indépendants de l'orientation des molécules.

Le sirop de céréales est une substance ordinaire qui possède une activité optique. Ce phénomène est facilement démontré avec une feuille de polaroïd pour produire un faisceau linéairement polarisé, une cellule de transmission contenant du sirop de céréales, et une seconde plaque de polaroïd pour détecter la rotation de la direction de polarisation au fur et à mesure que la lumière passe au travers du sirop de céréales.

33-6 L'intensité de la lumière réfléchie

Considérons maintenant quantitativement le coefficient de réflexion en fonction de l'angle. La Figure 33-6 (a) montre un faisceau de lumière frappant une surface de verre où il est partiellement réfléchi et partiellement réfracté dans le verre. Supposons que le faisceau incident d'amplitude unité soit linéairement polarisé normalement au plan du papier. Nous appellerons b l'amplitude de l'onde réfléchie, a l'amplitude de l'onde réfractée. Les ondes réfractées et réfléchies seront bien sûr linéairement polarisées, et les vecteurs champ électrique des ondes incidentes, réfléchies et réfractées sont tous parallèles les uns aux autres. La Figure 33-6 (b) montre la même disposition, mais

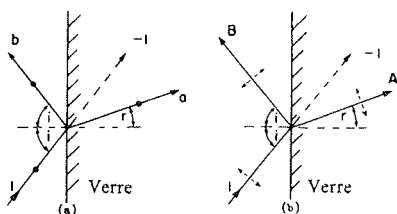


Fig. 33-6. Une onde incidente d'amplitude unité, est réfléchiée et réfractée sur une surface de verre. En (a) l'onde incidente est linéairement polarisée perpendiculairement au plan de papier. En (b) l'onde incidente est linéairement polarisée dans la direction indiquée par le vecteur électrique en pointillé.

cette fois-ci nous supposons que l'onde incidente d'amplitude unité est polarisée dans le plan du papier. Appelons alors respectivement B et A les amplitudes de l'onde réfléchiée et réfractée.

Nous voulons calculer quelle est l'intensité de la réflexion dans les deux cas illustrés sur les Figures 33-6 (a) et 33-6 (b). Nous savons déjà que lorsque l'angle entre le rayon réfléchi et le rayon réfracté est un angle droit, il n'y aura pas d'onde réfléchiée dans la Figure 33-6 (b), mais voyons si nous pouvons obtenir une réponse quantitative – une formule exacte pour B et b en fonction de l'angle d'incidence, i .

Le principe que nous devons comprendre est celui-ci. Les courants qui sont créés dans le verre produisent deux ondes. Premièrement, ils produisent l'onde réfléchiée. De plus, nous savons que s'il n'y avait pas de courants engendrés dans le verre, l'onde incidente continuerait tout droit dans le verre. Souvenez-vous que ce sont toutes les sources du monde qui produisent le champ résultant. La source du faisceau de lumière incident produit un champ d'amplitude unité qui se déplacerait dans le verre le long de la ligne en pointillé sur la figure. Le champ n'est pas observé, et donc les courants créés dans le verre doivent produire un champ d'amplitude -1 qui se déplace le long de la ligne en pointillé. Utilisant cela, nous allons calculer l'amplitude des ondes réfractées a et A .

Sur la Figure 33-6 (a) nous voyons que le champ d'amplitude b est émis par le mouvement des charges à l'intérieur du verre qui répondent au champ a à l'intérieur du verre, et donc que b est proportionnel à a . Nous pourrions supposer que puisque nos deux figures sont exactement les mêmes, à l'exception de la direction de polarisation, le rapport B/A est le même que le rapport b/a . Ceci n'est pas vrai, cependant, parce que sur la Figure 33-6(b) les directions de polarisation ne sont pas toutes parallèles les unes aux autres, comme elles le sont sur la Figure 33-6(a). Ce n'est que la composante de A qui est perpendiculaire à B , $A \cos(i + r)$, qui peut effectivement produire B . L'expression correcte pour la proportionnalité est alors

$$\frac{b}{a} = \frac{B}{A \cos(i + r)}. \quad (33.1)$$

Nous allons maintenant utiliser une astuce. Nous savons que, dans les deux cas, (a) et (b) sur la Figure 33-6, le champ électrique dans le verre doit produire des oscillations des charges qui créent un champ d'amplitude -1 , polarisé parallèlement au faisceau incident et se déplaçant dans la direction de la ligne pointillée. Mais nous voyons à la partie (b) de la figure que seule la composante de A , normale à la ligne en pointillé, a la polarisation correcte pour produire ce champ, tandis qu'à la Figure 33-6(a) toute l'amplitude peut agir, puisque la polarisation de l'onde a est parallèle à la polarisation de l'onde d'amplitude -1 . Ainsi

nous pouvons écrire

$$\frac{A \cos(i - r)}{a} = \frac{-1}{-1}, \quad (33.2)$$

puis que les deux amplitudes du côté gauche de l'équation (33.2) produisent chacune l'onde d'amplitude -1 .

Divisant l'équation (33.1) par l'équation (33.2) nous obtenons

$$\frac{B}{b} = \frac{\cos(i + r)}{\cos(i - r)}, \quad (33.3)$$

un résultat que nous pouvons vérifier à nouveau par rapport à ce que nous savons déjà. Si nous faisons $(i + r) = 90^\circ$, l'équation (33.3) donne $B = 0$, comme Brewster l'avait affirmé et ainsi nos résultats ne sont pas manifestement faux jusqu'à présent.

Nous avons supposé des amplitudes unité pour les ondes incidentes, de telle sorte que $|B|^2/1^2$ est le coefficient de réflexion pour les ondes polarisées dans le plan d'incidence, et $|b|^2/1^2$ est le coefficient de réflexion pour les ondes polarisées normalement au plan d'incidence. Le rapport de ces deux coefficients de réflexion est déterminé par l'équation (33.3).

Nous allons maintenant réaliser un miracle et calculer non seulement le rapport, mais chacun des coefficients $|B|^2$ et $|b|^2$ individuellement! Nous savons de par la conservation de l'énergie, que l'énergie dans l'onde réfractée doit être égale à l'énergie incidente moins l'énergie dans l'onde réfléchie, $1 - |B|^2$ dans un cas et $1 - |b|^2$ dans l'autre. De plus l'énergie qui passe dans le verre sur la Figure 33-6(b) est par rapport à l'énergie qui passe dans le verre sur la Figure 33-6(a) comme le rapport des carrés des amplitudes réfractées $|A|^2/|a|^2$. On peut se demander si nous savons effectivement calculer l'énergie à l'intérieur du verre parce que, après tout, il y a aussi les énergies de mouvement des atomes en plus de l'énergie du champ électrique. Mais il est évident que toutes les diverses contributions à l'énergie totale seront proportionnelles au carré de l'amplitude du champ électrique. Ainsi nous pouvons écrire

$$\frac{1 - |B|^2}{1 - |b|^2} = \frac{|A|^2}{|a|^2}. \quad (33.4)$$

Nous substituons maintenant l'équation (33.2) pour éliminer A/a de l'expression ci-dessus, et nous exprimons B en fonction de b par l'équation (33.3):

$$\frac{1 - |b|^2 \frac{\cos^2(i + r)}{\cos^2(i - r)}}{1 - |b|^2} = \frac{1}{\cos^2(i - r)}. \quad (33.5)$$

Cette équation ne contient qu'une seule amplitude inconnue, b . Pour $|b|^2$, nous obtenons donc

$$|b|^2 = \frac{\sin^2(i - r)}{\sin^2(i + r)} \quad (33.6)$$

et avec l'aide de (33.3)

$$|B|^2 = \frac{\tan^2(i - r)}{\tan^2(i + r)}. \quad (33.7)$$

Ainsi nous avons trouvé le coefficient de réflexion $|b|^2$ pour une onde incidente polarisée

perpendiculairement au plan d'incidence, de même que le coefficient de réflexion $|B|^2$ pour une onde incidente polarisée dans le plan d'incidence.

Il est possible de continuer avec des arguments de cette nature et de montrer que b est réel. Pour prouver ceci, on doit considérer un cas où la lumière arrive sur deux côtés du verre à la fois, un cas qui n'est pas facile à réaliser expérimentalement, mais qui est amusant à étudier théoriquement. Si nous analysons ce cas général, nous pouvons prouver que b doit être réel et donc, en fait, que $b = \pm \sin(i-r)/\sin(i+r)$. Il est même possible de déterminer le signe en considérant le cas d'une couche très très fine dans lequel il y a une réflexion sur la surface avant et sur la surface arrière et en calculant quelle quantité de lumière est réfléchie. Nous savons combien de lumière doit être réfléchie par une fine couche, parce que nous savons quels courants sont créés et nous avons même calculé les champs produits par de tels courants.

On peut montrer par ces arguments que

$$b = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}, \quad B = -\frac{\tan(i-r)}{\tan(i+r)}. \quad (33.8)$$

Ces expressions pour les coefficients de réflexion en fonction des angles d'incidence et de réfraction sont appelées les formules de réflexion de Fresnel.

Si nous considérons la limite lorsque les angles i et r tendent vers zéro, nous trouvons, pour le cas de l'incidence normale que $B^2 \approx b^2 \approx (i-r)^2/(i+r)^2$ pour les deux polarisations, puisque les sinus sont pratiquement égaux aux angles, comme le sont également les tangentes. Mais nous savons que $\sin i/\sin r = n$, et lorsque les angles sont petits, $i/r \approx n$. Il est donc facile de montrer que le coefficient de réflexion pour une incidence normale est

$$B^2 = b^2 = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}.$$

Il est intéressant de calculer quelle quantité de lumière est réfléchie à l'incidence normale sur la surface de l'eau, par exemple. Pour l'eau, n vaut $4/3$, de telle sorte que le coefficient de réflexion est $(1/7)^2 \approx 2\%$. A incidence normale, deux pour cent de la lumière seulement se réfléchit à la surface de l'eau.

33-7 Réfraction anormale

Le dernier effet de polarisation que nous allons considérer fut en réalité l'un de ceux qui fut découvert le premier: la réfraction anormale. Les marins visitant l'Islande ont rapporté en Europe des cristaux de spath d'Islande (CaCO_3) qui avaient la propriété amusante de faire en sorte que tout ce qui était vu au travers du cristal apparaissait double, c'est-à-dire avec deux images. Ceci parvint jusqu'à Huygens, et joua un rôle important dans la découverte de la polarisation. Comme c'est souvent le cas, les phénomènes qui sont découverts en premier sont les plus difficiles, en définitive, à expliquer. Ce n'est qu'après avoir compris complètement un concept physique que nous pouvons choisir avec soin ces phénomènes qui démontrent ce concept le plus clairement et le plus simplement possible.

La réfraction anormale est un cas particulier de la même biréfringence que nous avons considérée précédemment. La réfraction anormale apparaît lorsque l'axe optique, le grand axe de nos molécules asymétriques, n'est *pas* parallèle à la surface du cristal.

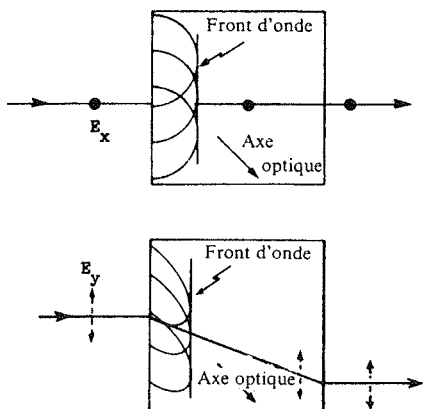


Fig. 33-7. Le diagramme du haut montre la trajectoire d'un rayon ordinaire traversant un cristal doublement réfringent. Le rayon extraordinaire est montré sur le diagramme inférieur. L'axe optique est situé dans le plan du papier.

Sur la Figure 33-7 sont dessinés deux morceaux d'un matériau biréfringent, avec l'axe optique comme indiqué. Sur la figure de dessus, le faisceau incident tombant sur le matériau est polarisé linéairement dans une direction perpendiculaire à l'axe optique du matériau. Lorsque ce faisceau frappe la surface du matériau, chaque point sur la surface agit comme source d'une onde qui traverse le cristal à une vitesse $v_{\perp}$, la vitesse de la lumière dans le cristal lorsque le plan de polarisation est perpendiculaire à l'axe optique. Le front d'onde est simplement l'enveloppe ou le lieu de toutes ces petites ondes sphériques et ce front d'onde se déplace en ligne droite dans le cristal et en sort de même de l'autre côté. C'est simplement le comportement ordinaire que nous attendons, et ce rayon est appelé le *rayon ordinaire*.

Sur la figure du bas, la lumière polarisée linéairement tombant sur le cristal a sa direction de polarisation tournée de 90° , de telle sorte que l'axe optique se trouve dans le plan de polarisation. Lorsque nous considérons maintenant les petites ondes engendrées en chaque point à la surface du cristal, nous voyons qu'elles ne se propagent pas comme des ondes sphériques. La lumière se déplaçant le long de l'axe optique avance avec une vitesse $v_{\perp}$ parce que la polarisation est perpendiculaire à l'axe optique, tandis que la lumière avançant perpendiculairement à l'axe optique se déplace avec une vitesse $v_{\parallel}$ parce que la polarisation est parallèle à l'axe optique. Dans un matériau biréfringent $v_{\parallel} \neq v_{\perp}$, et sur la figure $v_{\parallel} < v_{\perp}$. Une analyse plus complète montre que les ondes avancent sur la surface d'un ellipsoïde, avec l'axe optique comme axe principal. L'enveloppe de toutes ces ondes elliptiques est le front d'onde qui avance dans le cristal dans la direction indiquée. A nouveau, à la surface arrière, le faisceau sera dévié exactement de la même manière qu'à la surface avant, de telle sorte que la lumière émergera parallèlement au faisceau incident, mais déplacée par rapport à celui-ci. Manifestement, ce faisceau ne suit pas la loi de Snell mais suit une direction extraordinaire. Il est donc appelé le *rayon extraordinaire*.

Lorsqu'un faisceau de lumière non polarisée frappe un cristal de réfringence anormale, il est décomposé en un rayon ordinaire, qui traverse d'une manière normale et un rayon extraordinaire qui est déplacé lorsqu'il traverse le cristal. Ces rayons émergents sont polarisés linéairement à angle droit l'un de l'autre. On peut le démontrer directement avec une feuille de polaroid qui analyse la

polarisation des rayons émergents. Nous pouvons également démontrer que notre interprétation de ce phénomène est correcte en envoyant sur le cristal une lumière linéairement polarisée. En orientant correctement la direction de polarisation du faisceau incident, nous pouvons faire en sorte que cette lumière traverse directement sans se décomposer en deux, ou nous pouvons la faire traverser sans décomposition mais avec un déplacement.

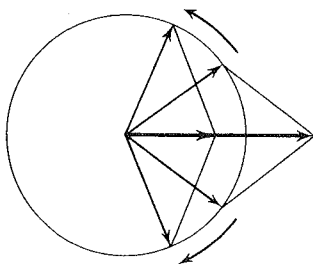


Fig. 33-8. Deux vecteurs d'amplitudes égales tournant en sens opposé s'ajoutent pour produire un vecteur de direction fixe, mais d'amplitude oscillante.

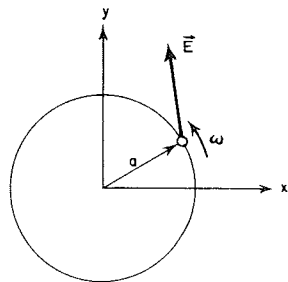


Fig. 33-9. Une charge se déplaçant sur un cercle en réponse à une lumière polarisée circulairement.

Nous avons représenté tous les divers cas de polarisation sur la Figure (33-1) et (33-2) comme superpositions de deux cas spéciaux de polarisation, à savoir x et y avec des intensités des phases diverses. D'autres paires peuvent aussi bien être utilisées. La polarisation le long de tout couple d'axes perpendiculaires x' , y' inclinés par rapport à x et y peut aussi bien servir [par exemple, toute polarisation peut être formée par les superpositions des cas (a) et (e) de la Figure 33-2]. Il est intéressant, cependant, que cette idée puisse être étendue à d'autres cas également. Par exemple, toute polarisation *linéaire* peut être obtenue en superposant des quantités convenables avec des phases adéquates de polarisations *circulaires* droite et gauche [cas (c) et (g) de la Figure 33-2], puisque deux vecteurs égaux tournant en sens opposé s'additionnent pour donner un seul vecteur oscillant le long d'une ligne droite (Fig. 33-8). Si la phase de l'un est décalée relativement à l'autre, la droite est inclinée. Ainsi tous les dessins de la Figure 33-1 peuvent être considérés comme «des superpositions de quantités égales de lumière circulairement polarisées droite et gauche avec des phases relatives variables». Lorsque la gauche prend du retard par rapport à la droite, la direction de la polarisation linéaire change. Ainsi les matériaux optiquement actifs sont, en un sens, biréfringents. Leurs propriétés peuvent être décrites en disant qu'ils ont des indices différents pour des lumières circulairement polarisées droite et gauche. La superposition des lumières circulairement polarisées droite et gauche de différentes intensités produit une lumière polarisée elliptiquement.

La lumière polarisée circulairement a une autre propriété intéressante – elle transporte un *moment cinétique* (autour de la direction de propagation). Pour illustrer ceci, supposez qu'une telle lumière tombe sur un atome représenté par un oscillateur harmonique qui peut être déplacé avec la même facilité dans n'importe quelle direction dans le plan xy . Alors le déplacement x de l'électron répond à la composante E_x du champ, tandis que la composante y répond également à la composante E_y du champ mais avec 90° de retard de phase.

L'électron va donc parcourir un cercle avec une vitesse angulaire ω , en réponse au champ électrique tournant de la lumière (Fig. 33-9). Dépendant des caractéristiques d'amortissement de la réponse de l'oscillateur, la direction du déplacement $\mathbf{a}$ de l'électron, et la direction de la force $q_e \mathbf{E}$ sur lui, n'ont pas besoin d'être confondues mais elles tournent ensemble. Le $\mathbf{E}$ peut avoir une composante à angle droit de $\mathbf{a}$, du travail est réalisé sur le système et un couple τ est exercé. Le travail réalisé par seconde est $\tau\omega$. Sur une période de temps T l'énergie absorbée est $\tau\omega T$, tandis que τT est le moment cinétique communiqué à la matière absorbant l'énergie. Nous voyons ainsi qu'un *faisceau de lumière polarisée circulairement à droite contenant une énergie totale $\mathcal{E}$, transporte un moment cinétique (le vecteur étant dirigé le long de la direction de propagation) $\mathcal{E}/\omega$* . Car lorsque le faisceau est absorbé, ce moment cinétique est communiqué au corps qui absorbe. La lumière polarisée circulairement à gauche transporte un moment cinétique de signe opposé — $\mathcal{E}/\omega$.

Effets relativistes dans le rayonnement

34-1 Sources en mouvement	34-5 Rayonnement de freinage (Bremsstrahlung)
34-2 Trouver le mouvement « apparent »	34-6 L'effet Doppler
34-3 Rayonnement de synchrotron	34-7 Le quadri-vecteur $\omega, \mathbf{k}$
34-4 Rayonnement de synchrotron cosmique	34-8 Aberration
	34-9 La quantité de mouvement de la lumière

34-1 Sources en mouvement

Dans le présent chapitre, nous allons décrire divers effets qui se rapportent au rayonnement, et nous en aurons ainsi terminé avec la théorie classique de la propagation de la lumière. Dans notre étude de la lumière, nous avons été assez loin sans ménager les détails. Le seul phénomène associé avec le rayonnement électromagnétique que nous n'ayons pas traité est ce qui se passe si des ondes de radio sont contenues dans une boîte avec des parois réfléchissantes, la dimension de la boîte étant comparable à la longueur d'onde, ou lorsqu'elles sont envoyées le long d'un long tube. Nous discuterons plus tard les phénomènes associés à ce qu'on appelle les *cavités résonantes* et les *guides d'ondes*; nous commencerons d'abord par utiliser un autre exemple physique – le son – et nous retournerons ensuite à ce sujet. À l'exception de ceci, le présent chapitre sera notre dernière étude sur la théorie classique de la lumière.

Nous pouvons résumer tous les effets que nous allons maintenant traiter en remarquant qu'ils sont en relation avec les effets de *sources en mouvement*. Nous ne supposons plus que la source est localisée et que tout son mouvement s'effectue à une vitesse relativement lente au voisinage d'un point fixe.

Nous rappelons que les lois fondamentales de l'électrodynamique disent qu'à grande distance d'une charge en mouvement, le champ électrique est donné par la formule

$$\mathbf{E} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d^2 \mathbf{e}_{R'}}{dt^2}. \quad (34.1)$$

La dérivée seconde du vecteur unité $\mathbf{e}_{R'}$ qui pointe dans la direction apparente de la charge est la caractéristique essentielle du champ électrique. Ce vecteur unité ne pointe pas bien sûr, vers la position *présente* de la charge, mais plutôt dans la direction que la charge semblerait avoir, à supposer que l'information ne se déplace qu'à une vitesse finie c depuis la charge jusqu'à l'observateur.

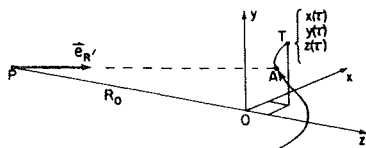


Fig. 34-1. La trajectoire d'une charge en mouvement. La vraie position au temps τ est en T , mais la position retardée est en A .

Associé au champ électrique, il y a un champ magnétique toujours perpendiculaire au champ électrique et à angle droit de la direction apparente de la source, donné par la formule

$$\mathbf{B} = -\mathbf{e}_{R'} \times \mathbf{E}/c. \quad (34.2)$$

Jusqu'à maintenant nous avons uniquement considéré le cas dans lequel les mouvements n'ont pas une vitesse relativiste; il était donc inutile de considérer un déplacement appréciable dans la direction de la source. Nous adopterons maintenant un point de vue plus général et étudierons le cas où le mouvement s'effectue à une vitesse arbitraire et envisagerons quels sont les aspects différents auxquels on peut s'attendre dans de telles circonstances. Nous supposons que la vitesse du mouvement est arbitraire mais, bien sûr, nous supposons toujours également que le détecteur est très éloigné de la source.

Nous savons déjà à partir de notre discussion du Chapitre 28 que les seules choses qui comptent dans $d^2\mathbf{e}_{R'}/dt^2$ sont les changements de la direction de $\mathbf{e}_{R'}$. Soient (x, y, z) les coordonnées de la charge, z étant mesuré le long de la direction d'observation (Fig. 34-1). A un moment donné, par exemple, au temps τ , les trois composantes de la position sont $x(\tau)$, $y(\tau)$, et $z(\tau)$. La distance R est pratiquement égale à $R(\tau) = R_0 + z(\tau)$. La direction du vecteur $\mathbf{e}_{R'}$ dépend essentiellement de x et y , mais à peine de z : les composantes transversales du vecteur unité sont x/R et y/R , et lorsque nous dérivons ces composantes, nous obtenons des termes en R^2 dans le dénominateur:

$$\frac{d(x/R)}{dt} = \frac{dx/dt}{R} - \frac{dz}{dt} \frac{x}{R^2}.$$

Ainsi, lorsque nous sommes suffisamment éloignés, les seuls termes dont il nous faut nous préoccuper sont les variations de x et y . Ainsi nous sortons le facteur R_0 et nous obtenons

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0} \frac{d^2 x'}{dt'^2}, \\ E_y &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0} \frac{d^2 y'}{dt'^2}, \end{aligned} \quad (34.3)$$

où R_0 est, plus ou moins, la distance à q ; prenons-la comme étant la distance OP à l'origine des coordonnées (x, y, z) . Ainsi le champ électrique est une constante multipliée par une chose très simple, les dérivés secondes des coordonnées x et y . (Nous aurions pu l'exprimer d'une manière mathématique en appelant x et y les composantes transversales du vecteur position $\mathbf{r}$ de la charge, mais ceci n'aurait rien ajouté à la clarté.)

Bien sûr, nous réalisons que les coordonnées doivent être mesurées avec le temps retardé. Nous trouvons ici que $z(\tau)$ affecte le retard. Quel est le temps retardé? Si le temps d'observation est appelé t (le temps en P) alors le temps τ , qui

lui correspond en A n'est pas le temps t , mais est retardé de la distance totale que la lumière doit parcourir, divisée par la vitesse de la lumière. En première approximation, ce retard est R_0/c , une constante (une caractéristique sans intérêt), mais à l'approximation suivante nous devons inclure les effets de la position dans la direction z au temps (τ) , car si q est un petit peu en arrière, le retard est un petit peu plus grand. C'est un effet que nous avons négligé précédemment, et c'est le seul changement nécessaire pour rendre les résultats valables pour toutes les vitesses.

Nous devons maintenant choisir une certaine valeur de t et calculer la valeur de τ à partir d'elle et puis trouver où x et y se trouvent à cette valeur de τ . Ce sont alors les valeurs de x et y retardés que nous appelons x' et y' , dont les dérivées secondes déterminent le champ. Ainsi τ est déterminé par

$$t = \tau + \frac{R_0}{c} + \frac{z(\tau)}{c}$$

et

$$x'(t) = x(\tau), \quad y'(t) = y(\tau). \quad (34.4)$$

Ce sont des équations compliquées, mais il est assez facile de faire une construction géométrique pour décrire leurs solutions. Ce dessin va nous donner une bonne intuition qualitative de la manière dont tout cela fonctionne, mais il faudra toujours beaucoup de calculs mathématiques détaillés pour déduire les résultats précis d'un problème compliqué.

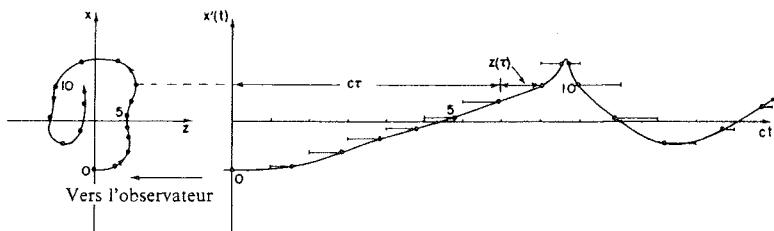


Fig. 34-2. Une solution géométrique de l'Équation (34.5) pour trouver $x'(t)$.

34-2 Trouver le mouvement « apparent »

L'équation ci-dessus possède une simplification intéressante. Si nous oublions la constante de retard R_0/c sans intérêt, qui signifie simplement que nous devons changer l'origine de t par une constante, alors l'équation dit que

$$ct = c\tau + z(\tau), \quad x' = x(\tau), \quad y' = y(\tau). \quad (34.5)$$

Nous devons maintenant trouver x' et y' en fonction de t et non de τ , et nous pouvons le faire de la manière suivante: l'équation (34.5) dit que nous devons prendre le mouvement réel et additionner une constante (la vitesse de la lumière) que multiplie τ . Ce que cela signifie est indiqué sur la Figure 34-2. Nous prenons le mouvement réel de la charge (montré à gauche) et imaginons que lorsqu'elle tourne, elle est écartée du point P à la vitesse c (il n'y a pas de contractions dues à la relativité ou quoi que ce soit de ce genre; ce n'est qu'une addition purement mathématique de $c\tau$). De cette manière, nous obtenons un nouveau mouvement dans lequel la coordonnée

de la direction d'observation est ct , comme il est montré à droite. (La figure montre le résultat pour le mouvement assez compliqué dans un plan, mais bien entendu le mouvement peut ne pas être dans un plan – il peut même être plus compliqué que le mouvement dans un plan.) Le point important est que la distance horizontale (c'est-à-dire la direction d'observation) n'est plus maintenant le z ancien, mais est $z - ct$ et donc vaut ct . Ainsi nous avons trouvé une description de la courbe x' (et y') en fonction de t ! Tout ce que nous devons faire pour trouver le champ est de considérer l'accélération de cette courbe, c'est-à-dire de la dériver deux fois. Ainsi la réponse finale est : afin de trouver le champ électrique d'une charge en mouvement, prenez le mouvement de la charge et déplacez-le vers l'arrière à la vitesse c pour «l'ouvrir»; la courbe ainsi tracée est la courbe des positions x' et y' en fonction de t . L'accélération de cette courbe donne le champ électrique en fonction de t . Ou, si nous voulons, nous pouvons maintenant imaginer que toute cette courbe «rigide» se déplace vers l'avant à la vitesse c coupant le plan d'observation de telle sorte que l'intersection avec le plan d'observation ait les coordonnées x' et y' . L'accélération de ce point produit le champ électrique. Cette solution est tout aussi exacte que la formule dont nous sommes partis – ce n'est qu'une représentation géométrique.

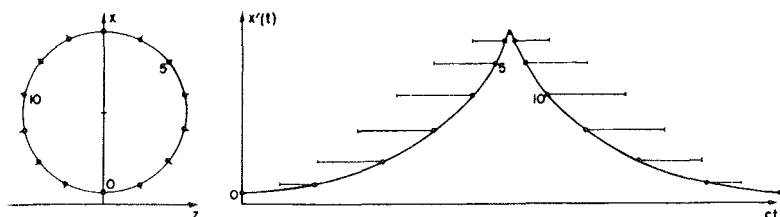


Fig. 34-3. La courbe $x'(t)$ pour une particule se déplaçant à vitesse constante $v = 0,94 c$, sur un cercle.

Si le mouvement est relativement lent, par exemple si nous avons un oscillateur qui ne fait que monter et descendre lentement, alors lorsque nous lançons ce mouvement à la vitesse de la lumière, nous obtiendrons, bien sûr, une simple courbe sinusoïdale, et cela donnera une formule que nous avons déjà considérée depuis longtemps : cela donne le champ produit par une charge oscillante. Un exemple plus intéressant est celui d'un électron se déplaçant rapidement, pratiquement à la vitesse de la lumière, sur un cercle. Si nous regardons dans le plan du cercle, le $x'(t)$ retardé apparaît comme indiqué sur la Figure 34-3. Qu'est-ce que cette courbe? Si nous imaginons un vecteur radial allant du centre du cercle à la charge, et si nous prolongeons cette droite radiale, un petit peu au-delà de la charge, de très peu si la charge va très vite, alors nous arrivons à un point sur la droite qui se déplace à la vitesse de la lumière. C'est pourquoi, lorsque nous translatons le mouvement vers l'arrière à la vitesse de la lumière, cela revient au même que d'avoir une roue avec une charge sur elle roulant vers l'arrière (sans glisser) à la vitesse c ; ainsi nous trouvons une courbe qui est très proche d'une cycloïde – elle est appelée une *hypocycloïde*. Si la charge se déplace presque exactement à la vitesse de la lumière, les «pointes» sont très étroites; si elle va exactement à la vitesse de la lumière, ces maxima seront effectivement des pointes, infiniment aiguës. «Infiniment aiguës», c'est intéressant; cela signifie que près d'une pointe la dérivée seconde est énorme. Une fois dans chaque cycle nous obtenons une impulsion étroite du champ électrique. Ce n'est pas du tout ce que nous obtiendrions d'un mouvement non relativiste, où chaque fois que la charge parcourt un cycle, on obtient

une oscillation qui est à peu près de la même « intensité » tout le temps. Au lieu de cela, on obtient ici des impulsions extrêmement aiguës du champ électrique espacées par des intervalles de temps $1/T_0$ où T_0 est la période de révolution. Ces champs électriques intenses sont émis dans un cône étroit dans la direction du mouvement de la charge. Lorsque la charge s'écarte de P , la courbure est très faible et il y a très peu de champ émis dans la direction P .

34-3 Rayonnement de synchrotron

Dans un synchrotron, nous avons des électrons extrêmement rapides se déplaçant sur des trajectoires circulaires; ils avancent à une vitesse presque égale à la vitesse de la lumière c , et il est possible de voir le rayonnement ci-dessus sous forme de *lumière effective*! Voyons ceci un petit peu plus en détail.

Dans le synchrotron nous avons des électrons qui tournent en cercles dans un champ magnétique uniforme. Voyons d'abord pourquoi ils décrivent des cercles. Par l'équation (12.10), nous savons que la force sur une particule dans un champ magnétique est donnée par

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (34.6)$$

et elle est perpendiculaire à la fois au champ et à la vitesse. Comme d'habitude, la force est égale au taux de changement de la quantité de mouvement avec le temps. Si le champ est dirigé vers nous, sortant hors du papier, la quantité de mouvement de la particule et la force qui s'exerce sur elle sont comme indiquées sur la Figure 34-4. Puisque la force est perpendiculaire à la vitesse, l'énergie cinétique, et donc la vitesse, reste *constante*. Le champ magnétique ne fait que changer la *direction du mouvement*. Dans un temps court Δt , le vecteur quantité de mouvement varie perpendiculairement à lui-même d'une quantité $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F}\Delta t$, et de ce fait $\mathbf{p}$ tourne d'un angle $\Delta\theta = \Delta p/p = qvB\Delta t/p$, puisque $|\mathbf{F}| = qvB$. Mais en même temps la particule a parcouru une distance $\Delta s = v\Delta t$. Évidemment, les deux droites AB et CD vont se couper en un point O tel que $OA = OC = R$, où $\Delta s = R\Delta\theta$. Combinant ceci avec les expressions précédentes, nous trouvons que $R\Delta\theta/\Delta t = R\omega = v = qvBR/p$ et de là nous trouvons

$$p = qBR \quad (34.7)$$

et

$$\omega = qvB/p. \quad (34.8)$$

Puisque ce même argument peut s'appliquer durant l'instant suivant, puis celui d'après, etc., nous concluons que la particule doit se déplacer sur un *cercle* de rayon R , avec une vitesse angulaire ω .

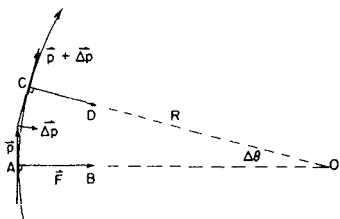


Fig. 34-4. Une particule chargée se déplace sur une trajectoire circulaire (ou en hélice) dans un champ magnétique uniforme.

Le résultat que la quantité de mouvement de la particule est égale à la charge que multiplie le rayon, que multiplie le champ magnétique est une loi extrêmement importante qui est utilisée très souvent. Elle est importante dans des cas pratiques, parce que si nous avons des particules élémentaires qui ont toutes la même charge et que nous les observons dans un champ magnétique, nous pourrions mesurer les rayons de courbure de leurs orbites et connaissant le champ magnétique nous pourrions ainsi déterminer les quantités de mouvement des particules. Si nous multiplions les deux côtés de l'équation (34.7) par c , et exprimons q en fonction de la charge électronique, nous pouvons mesurer la quantité de mouvement en unités d'électron volts. Avec ces unités notre formule est

$$pc(\text{ev}) = 3 \times 10^8 (q/q_e) BR, \quad (34.9)$$

où B , R , et la vitesse de la lumière sont tous exprimés dans le système mks, cette dernière étant égale numériquement à 3×10^8 .

L'unité mks de champ magnétique est appelée le *weber par mètre carré*. Il existe une unité plus ancienne qui est toujours d'usage courant, appelée le *gauss*. Un *weber/m²* est égal à 10^4 gauss. Pour donner l'idée de l'importance des champs magnétiques, disons que le champ magnétique le plus élevé que l'on puisse produire habituellement dans le fer est d'environ $1,5 \times 10^4$ gauss; au-delà l'avantage d'utiliser le fer disparaît. Aujourd'hui, des électro-aimants bobinés avec des fils superconducteurs sont capables de produire des champs statiques d'environ 10^5 gauss – c'est-à-dire 10 Unités mks. Le champ de la terre est de quelques dixièmes de gauss à l'équateur.

Revenant à l'équation (34.9), nous pouvons imaginer un synchrotron fonctionnant à un milliard d'électrons volts, ainsi pc vaudra 10^9 pour un milliard d'électrons volt. (Nous reviendrons à l'énergie dans quelques instants.) Si nous disposons alors d'un champ correspondant à par exemple 10.000 gauss, ce qui est un champ assez substantiel, une unité mks, nous voyons alors que R doit être environ de 3,3 mètres. Le rayon effectif du synchrotron de Caltech est de 3,7 mètres, le champ est un petit peu plus fort, et l'énergie vaut 1,5 milliard, mais l'idée est la même. Ainsi nous avons maintenant une idée de la raison pour laquelle le synchrotron a cette dimension.

Nous avons calculé la quantité de mouvement, mais nous savons que l'énergie totale, y compris l'énergie du repos, est donnée par $W = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$, et pour un électron l'énergie au repos correspondant à mc^2 est $0,511 \times 10^6$ ev, ainsi lorsque pc vaut 10^9 électron volts nous pouvons négliger mc^2 , et ainsi pour toute application pratique $W = pc$ lorsque la vitesse est relativiste. C'est pratiquement la même chose de dire que l'énergie d'un électron est un milliard d'électron volts que de dire que la quantité de mouvement que multiplie c vaut un milliard d'électron volts. Si $W = 10^9$ électron volts, il est facile de montrer que la vitesse ne diffère de la vitesse de la lumière que d'une part dans huit millions!

Voyons maintenant le rayonnement émis par une telle particule. Une particule en mouvement sur un cercle de rayon 3,3 mètres, ou de 20 mètres de circonférence, tourne une fois pendant à peu près le temps qu'il faut à la lumière pour faire 20 mètres. Ainsi la longueur d'onde qui doit être émise par une telle particule doit être de 20 mètres – ce qui est la région des ondes courtes de radio. Mais à cause de l'effet d'empilement que nous avons vu (Fig. 34-3) et parce que la distance dont nous devons étendre le rayon pour atteindre la vitesse c n'est qu'une part pour huit millions du rayon, les pointes de l'hypocycloïde sont extrêmement étroites, en comparaison de leur écartement. L'accélération, qui s'exprime par une dérivée seconde en fonction du temps, est multipliée deux fois par le «facteur» de compression de 8×10^6 parce que l'échelle des temps est réduite deux fois de huit millions au

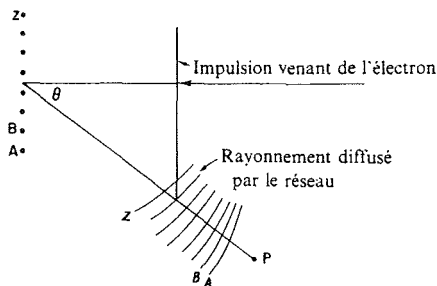


Fig. 34-5. La lumière sous forme d'une seule impulsion qui frappe le réseau est diffusée dans différentes directions sous forme de différentes couleurs.

voisinage de la pointe. Ainsi nous pouvons nous attendre à ce que la longueur d'onde effective soit beaucoup plus courte, jusqu'à $64 \cdot 10^{12}$ fois plus petite que 20 mètres et ceci correspond à la région des rayons x . (En réalité, la pointe elle-même n'est pas le seul facteur déterminant; on doit également inclure une certaine région autour de la pointe. Ceci fait passer de la puissance 2 à la puissance $3/2$, mais cela nous laisse encore au-dessus de la région optique.) Ainsi, bien qu'un électron se déplaçant lentement émette des ondes de radio de 20 mètres, l'effet relativiste diminue tellement la longueur d'onde qu'on peut la voir! Manifestement la lumière doit être *polarisée*, avec le champ électrique perpendiculaire au champ magnétique uniforme.



Fig. 34-6. Le champ électrique total dû à une suite (a) d'impulsions étroites et (b) d'impulsions arrondies.

Pour mieux apprécier ce que nous pourrions observer, supposez que nous prenions une telle lumière (comme ces impulsions sont si éloignées dans le temps, nous n'en prendrons qu'une pour simplifier les choses) la dirigeant sur un réseau de diffraction constitué d'un ensemble de fils diffusants. Lorsque cette impulsion quitte le réseau, que voyons-nous? (Nous devrions voir de la lumière rouge, de la lumière bleue, etc., si jamais nous voyons de la lumière.) Que voyons-nous? Les impulsions frappent le réseau de plein fouet et tous les oscillateurs du réseau, ensemble, sont violemment excités une seule fois. Ils produisent donc des effets dans diverses directions, comme indiqué sur la Figure 34-5. Mais le point P est plus proche de l'une des extrémités du réseau que de l'autre, ce qui fait qu'en ce point le champ électrique provient d'abord du fil A , ensuite du fil B , etc.; finalement arrive l'impulsion du dernier fil. En bref, la somme des réflexions sur tous les fils successifs est montrée sur la Figure 34-6(a); c'est un champ électrique constitué d'une série d'impulsions et il est très semblable à une onde sinusoïdale dont la longueur d'onde est égale à la distance entre les impulsions, exactement comme pour une lumière monochromatique frappant le réseau! Ainsi nous obtenons une lumière colorée. Mais, par le même argument, n'allons-nous pas obtenir une lumière à partir de n'importe quel type «d'impulsion»? Non. Supposez que la courbe soit beaucoup plus arrondie; alors nous additionnerons toutes les ondes diffusées ensemble, séparées par un petit intervalle de temps entre elles (Figure 34-6b). Nous voyons alors que le champ n'oscillera pas du tout, car chaque impulsion ne varie pratiquement pas dans l'intervalle de temps entre deux impulsions.



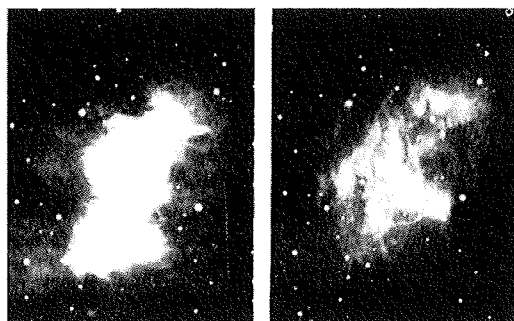
Fig. 34-7. La nébuleuse du crabe observée avec toutes ses couleurs (sans filtre).

Le rayonnement électromagnétique émis par des particules chargées relativistes circulant dans un champ magnétique est appelé *rayonnement de synchrotron*. On le nomme ainsi pour des raisons évidentes, mais il n'est pas propre particulièrement aux synchrotrons, ou même à des laboratoires liés à la terre; il est passionnant et intéressant de voir que cela se produit également dans la nature!

34-4 Rayonnement de synchrotron cosmique

En 1054 les civilisations Chinoises et Japonaises étaient parmi les plus développées du monde; elles étaient conscientes de l'univers extérieur et on a enregistré cette année-là tout à fait remarquablement une étoile brillante explosive. (Il est étonnant qu'aucun de ces moines Européens, qui écrivirent tous les livres du Moyen Age, ne se préoccupa d'écrire qu'une étoile avait explosé dans le ciel – personne ne le fit.) Aujourd'hui nous pouvons prendre une photo de cette étoile et ce que nous voyons est montré sur la Figure 34-7. Sur la périphérie on voit une grande masse de filaments rouges produite par des atomes d'un gaz peu dense oscillant à leurs fréquences naturelles; ceci produit un spectre de raies brillantes avec différentes fréquences. Le rouge apparaît dans ce cas lié à l'azote. D'autre part, dans la région centrale on voit une mystérieuse tache de lumière diffuse avec une distribution *continue* de fréquence, c'est-à-dire pour laquelle on ne peut pas discerner de fréquences particulières associées avec des atomes bien définis. Cependant ceci n'est pas un nuage de poussière «éclairée» par des étoiles proches – ce qui serait une manière d'obtenir un spectre continu. Nous pouvons voir les étoiles au travers, c'est donc transparent, mais en même temps cela *émet* de la lumière.

A la Figure 34-8 nous considérons le même objet en utilisant une lumière dans une région du spectre qui ne contient pas de raie spectrale brillante, ce qui fait que nous voyons simplement la région centrale. Mais dans ce cas, on a placé les polariseurs sur le télescope et les deux vues correspondent à



(a)

(b)

Fig. 34-8. La nébuleuse du crabe observée au travers d'un filtre bleu et d'un polaroïd.
(a) Vecteur électrique vertical.
(b) Vecteur électrique horizontal.

deux orientations perpendiculaires. Nous voyons que les figures sont différentes! Cela revient à dire que la lumière est polarisée. La raison probablement en est qu'il y a un champ magnétique local et beaucoup d'électrons très énergiques tournent dans ce champ magnétique.

Nous venons justement de montrer comment les électrons peuvent tourner dans un champ sur un cercle. Nous pouvons ajouter à cela bien sûr, n'importe quel mouvement uniforme dans la direction du champ puisque la force $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, n'a pas de composantes dans cette direction et comme nous l'avons déjà remarqué, le rayonnement synchrotron est évidemment polarisé dans une direction perpendiculaire à la projection du champ magnétique sur le plan d'observation.

En comparant ces deux faits, nous voyons que dans une région pour laquelle une photo est brillante et l'autre sombre, la lumière doit avoir son champ électrique complètement polarisé dans une direction. Ceci signifie qu'il y a un champ magnétique perpendiculaire à cette direction, tandis que dans les autres régions pour lesquelles il y a une émission intense sur l'autre photographie, le champ magnétique doit être dans l'autre direction. Si nous regardons avec attention la Figure 34-8, nous pouvons remarquer qu'il y a grossièrement parlant, un ensemble général de « lignes » qui vont dans un sens dans une photo et perpendiculairement à cette direction dans l'autre. Les photos montrent une sorte de structure fibreuse. Il est probable que les lignes de champ magnétique ont tendance à s'étendre relativement sur de longues distances dans leurs propres directions et il y a ainsi probablement de longues régions de champ magnétique avec tous les électrons tournant en spirale dans un sens, tandis que dans une autre région le champ est dans une autre direction et les électrons tournent également en spirale dans l'autre sens.

Qu'est-ce qui maintient les énergies des électrons aussi élevées pendant un temps aussi long? Après tout, 900 ans se sont écoulés depuis l'explosion – comment peuvent-ils continuer d'aller aussi vite? On ne comprend pas encore très bien comment ils conservent leurs énergies et comment tout cela se maintient.

34-5 Rayonnement de freinage (Bremsstrahlung)

Nous allons maintenant faire une brève remarque sur un autre effet intéressant produit par une particule en mouvement très rapide qui émet de l'énergie; l'idée est très voisine de celle que nous venons de discuter. Supposez qu'il y ait des particules chargées dans un morceau de matière et que par exemple un électron très rapide passe non loin (Fig. 34-9). Alors, à cause du champ électrique autour du noyau atomique, l'électron est attiré et accéléré de telle sorte que la courbe de son mouvement est légèrement incurvée et déviée. Si l'électron se déplace à une vitesse

très proche de la vitesse de la lumière, quel est le champ électrique produit dans la direction c ? Souvenons-nous de notre règle: nous prenons le mouvement réel, le translatons vers l'arrière à la vitesse c et ceci nous donne une courbe dont la courbure est une mesure du champ électrique. L'électron vient vers nous à la vitesse v , ainsi nous obtenons un mouvement vers l'arrière avec toute la figure comprimée sur une plus petite distance dans le rapport de $c-v$ à c . Si $1 - v/c \ll 1$ la courbure est très forte et très rapide en B , et lorsque nous en prenons la dérivée seconde nous obtenons un champ très élevé dans la direction du mouvement. Ainsi lorsque les électrons énergiques se déplacent dans de la matière, ils émettent un rayonnement vers l'avant. Ceci est appelé le *rayonnement de freinage*. En fait, le synchrotron est utilisé, non pas tellement pour produire des électrons de hautes énergies (en réalité, si nous pouvions les faire sortir de la machine d'une manière plus commode nous ne dirions pas cela) mais surtout pour fabriquer des photons extrêmement énergiques – les rayons gamma – en faisant passer les électrons énergiques au travers d'une «cible» solide de tungstène et en les laissant émettre des photons à partir de cet effet de rayonnement de freinage.

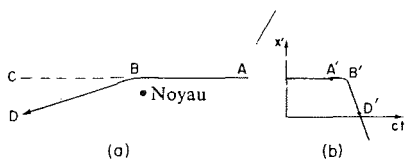


Fig. 34-9. Un électron rapide passant près d'un noyau émet de l'énergie dans la direction de son mouvement.

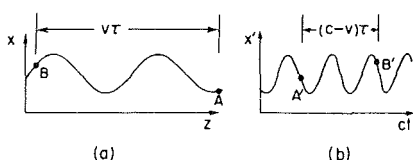


Fig. 34-10. Les courbes $x-z$ et $x'-t$ d'un oscillateur en mouvement.

34-6 L'effet Doppler

Nous allons maintenant considérer d'autres exemples d'effets produits par des sources en mouvement. Supposons que la source soit un atome stationnaire qui oscille à l'une de ses fréquences naturelles ω_0 . Nous savons alors que la fréquence de la lumière que nous allons observer est ω_0 . Considérons maintenant un autre exemple avec un oscillateur semblable oscillant à la fréquence ω_1 , mais en même temps l'atome dans son ensemble, l'oscillateur complet, se déplace dans la direction de l'observateur à la vitesse v . Le mouvement réel dans l'espace est alors celui indiqué sur la Figure 34-10(a). Nous jouons à notre jeu habituel et additionnons ct ; c'est-à-dire que nous translatons toute la courbe vers l'arrière et nous trouvons qu'elle oscille comme à la Figure 34-10(b). Dans un intervalle de temps donné, τ , lorsque l'oscillateur aura parcouru une distance $v\tau$, sur le diagramme de x' en fonction de ct il parcourt une distance $(c-v)\tau$. Ainsi toutes les oscillations de fréquence ω_1 dans le temps $\Delta\tau$ sont maintenant contenues dans l'intervalle $\Delta\tau' = (1 - v/c)\Delta\tau$; elles se sont rapprochées les unes des autres, et lorsque cette courbe passe près de nous à la vitesse c , nous voyons une lumière de *fréquence plus élevée*, plus élevée d'une quantité égale au facteur de compression $(1 - v/c)$. Ainsi nous observons

$$\omega = \frac{\omega_1}{1 - v/c} \quad (34.10)$$

Nous pouvons, bien sûr, analyser ce phénomène de diverses autres manières. Supposez que l'atome émette, au lieu d'ondes sinusoïdales une série d'impulsions, «pip, pip, pip», à une certaine fréquence ω_1 . A quelle fréquence les recevrons-nous? La

première arrive avec un certain retard, mais la suivante est moins retardée parce qu'entre-temps l'atome s'est davantage rapproché du récepteur. De ce fait l'intervalle de temps entre les « pip » est diminué par le mouvement. Par une analyse géométrique du phénomène, nous trouvons que la fréquence des « pips » est augmentée du facteur $1/(1 - v/c)$.

$\omega = \omega_0(1 - v/c)$, est-elle alors la fréquence que nous observerions en prenant un atome ordinaire de fréquence naturelle ω_0 et qui se déplace vers le récepteur à la vitesse v ? Non; comme nous le savons bien, la fréquence naturelle ω_1 d'un atome en mouvement n'est pas la même que celle mesurée lorsqu'il se trouve au repos, à cause de la dilatation relativiste de la vitesse d'écoulement du temps. Si donc ω_0 est la véritable fréquence naturelle, alors la fréquence naturelle modifiée ω_1 sera

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (34.11)$$

Ainsi la fréquence observée ω est égale à

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c}. \quad (34.12)$$

Le décalage de fréquence observé dans la situation ci-dessus est appelé l'*effet Doppler*: si un objet se déplace vers nous, la lumière qu'il émet paraît plus violette et s'il s'écarte de nous elle paraît décalée vers le rouge.

Nous allons maintenant donner deux démonstrations supplémentaires de ce même résultat intéressant et important. Supposez, maintenant, que la *source* se trouve au repos et émette des ondes à la fréquence ω_0 , tandis que l'*observateur* se déplace avec une vitesse v vers la source. Après une certaine période de temps t l'observateur se sera déplacé d'une distance vt de l'endroit où il était à $t = 0$. Combien de radians de phase aura-t-il vu passer pendant ce temps? Un certain nombre, $\omega_0 t$, sont passés devant n'importe quel point fixe et de plus l'observateur est passé devant certains autres de par son propre mouvement, à savoir un nombre $vt k_0$ (le nombre de radians par mètre que multiplie la distance). Ainsi le nombre total de radians dans le temps t , ou encore la fréquence observée sera $\omega_1 = \omega_0 + k_0 v$. Nous avons fait cette analyse du point de vue d'un homme au repos. Nous aimerions savoir ce qu'elle est pour un homme en mouvement; ici nous devons nous préoccuper à nouveau de la différence de vitesse des pendules pour les deux observateurs et cette fois cela signifie que nous devons *diviser* par $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Si donc k_0 est un nombre d'onde, le nombre de radians par mètre dans la direction du mouvement, et ω_0 est la fréquence, alors la fréquence observée pour un homme en mouvement est

$$\omega = \frac{\omega_0 + k_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (34.13)$$

Dans le cas de la lumière nous savons que $k_0 = \omega_0/c$. Ainsi dans ce problème particulier l'équation sera

$$\omega = \frac{\omega_0(1 + v/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (34.14)$$

ce qui paraît tout à fait différent de la formule (34.12)! La fréquence que nous observons si nous nous déplaçons vers une source est-elle différente de la fréquence que nous verrions si la source se déplaçait vers nous? Bien sûr que non! La théorie de la relativité dit que les deux doivent être *exactement égales*. Si nous étions des mathématiciens suffisamment experts, nous

reconnâtrions probablement que ces deux expressions mathématiques *sont* exactement égales! En fait, l'égalité *nécessaire* des deux expressions est une des manières par laquelle certaines personnes aiment démontrer que la relativité nécessite une dilatation du temps, parce que si nous ne plaçons pas ces facteurs en racine carrée dans ces équations, elles ne sont plus du tout égales.

Puisque nous connaissons la relativité, essayons de faire l'étude d'une troisième manière, qui peut sembler un petit peu plus générale. (C'est en réalité la même chose, puisque la manière *dont* nous opérons n'a pas d'importance!) Selon la théorie de la relativité, il existe une relation entre la position et le temps observés par un premier individu et la position et le temps observés par un autre qui est en mouvement relatif par rapport au premier. Nous avons écrit ces deux relations il y a longtemps (Chapitre 16). C'est la transformation de Lorentz et son inverse:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & x &= \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\t' &= \frac{t + vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & t &= \frac{t' - vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.\end{aligned}\quad (34.15)$$

Si nous étions au repos sur le sol, la forme d'une onde serait $\cos(\omega t - kx)$; tous les nœuds, les maxima et les minima suivraient cette forme. Mais qu'est-ce que verrait un homme en mouvement, observant la même onde physique? Là où le champ est nul, les positions de tous les nœuds sont les mêmes (lorsque le champ est nul, *n'importe qui* mesure que le champ est nul); c'est un invariant relativiste. Ainsi la forme est la même pour l'autre homme également, à ceci près que nous devons la transformer dans son système de référence:

$$\cos(\omega t - kx) = \cos\left[\omega \frac{t' - vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - k \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right].$$

Si nous regroupons les termes à l'intérieur des parenthèses, nous obtenons

$$\begin{aligned}\cos(\omega t - kx) &= \cos\left[\underbrace{\frac{\omega + kv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}_{\omega'} t' - \underbrace{\frac{k + v\omega/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}_{k'} x'\right] \\&= \cos\left[\omega' t' - k' x'\right].\end{aligned}\quad (34.16)$$

Ceci, de nouveau, est une onde, une onde sinusoïdale dans laquelle il y a une certaine fréquence ω' , une constante multipliant t' et une autre constante k' , multipliant x' . Nous appelons k' le nombre d'onde ou le nombre d'onde par mètre, pour l'autre individu. L'autre homme verra donc une nouvelle fréquence et un nouveau nombre d'onde donné par

$$\omega' = \frac{\omega + kv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (34.17)$$

$$k' = \frac{k + \omega v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (34.18)$$

Si nous regardons (34.17), nous voyons que ceci est la même formule que (34.13) que nous avons obtenue grâce à une démonstration plus physique.

34-7 Le quadri-vecteur ω, k

Les relations indiquées dans les équations (34.17) et (34.18) sont très intéressantes parce qu'elles disent que la nouvelle fréquence ω' est une combinaison de l'ancienne fréquence ω et de l'ancien nombre d'onde k , et le nouveau nombre d'onde est une combinaison de l'ancien nombre d'onde et de la fréquence. Or le nombre d'onde est le taux de changement de la phase avec la distance et la fréquence est le taux de changement de la phase avec le temps et dans ces expressions nous découvrons une étroite analogie avec la transformation de Lorentz de la position et du temps: si ω est considéré comme étant semblable à t , et k est considéré comme étant semblable à x divisé par c^2 alors le nouvel ω' ressemblera à t' et le nouveau k' ressemblera à x'/c^2 . C'est-à-dire que *par la transformation de Lorentz ω et k se transforment de la même manière que t et x* . Ils constituent ce que nous appelons un *quadri-vecteur*; quand une quantité a quatre composantes qui se transforment comme le temps et l'espace, c'est un quadri-vecteur. Tout semble alors correct, à l'exception d'une petite chose: nous avons dit qu'un quadri-vecteur doit avoir *quatre composantes*; où sont les deux autres composantes? Nous avons vu que ω et k sont semblables au temps et à l'espace dans une direction de l'espace mais pas dans toutes les directions; nous devons donc étudier le problème de la propagation de la lumière dans les trois dimensions de l'espace et pas simplement dans une seule direction, comme nous l'avons fait jusqu'à présent.

Supposez que nous ayons un système de coordonnées x, y, z , et une onde qui avance et dont les fronts d'onde sont indiqués sur la Figure (34-11). La longueur d'onde de l'onde est λ , mais la direction du mouvement de l'onde n'est pas la direction de l'un des axes. Quelle est l'équation d'une telle onde? La réponse est manifestement $\cos(\omega t - ks)$ où $k = 2\pi/\lambda$ et s est la distance le long de la direction du mouvement – la composante de la position dans la direction du mouvement. Écrivons-la de cette manière: si $\mathbf{r}$ est le vecteur position d'un point dans l'espace, alors s vaut $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k$, où $\mathbf{e}_k$ est un vecteur unité dans la direction du mouvement. C'est-à-dire, s vaut simplement $r \cos(\mathbf{r}, \mathbf{e}_k)$, la composante de la distance dans la direction du mouvement. De ce fait, notre onde est $\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$.

Il se trouve qu'il est très commode de définir un vecteur $\mathbf{k}$, qui est appelé le *vecteur d'onde*, de grandeur égale au nombre d'onde $2\pi/\lambda$, et qui est pointé dans la direction de propagation des ondes:

$$\mathbf{k} = 2\pi\mathbf{e}_k/\lambda = k\mathbf{e}_k. \quad (34.19)$$

Utilisant ce vecteur, notre onde peut être écrite $\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ ou $\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$. Quelle est la signification d'une composante de k , disons k_x ? K_x est manifestement le taux de changement de phase par rapport à x . Se reportant à la Figure 34-11, nous voyons que la phase change lorsque nous changeons x , comme s'il y avait une onde le long de x , *mais d'une longueur d'onde plus grande*. La «longueur d'onde dans la direction x » est plus grande que la véritable longueur d'onde naturelle d'un facteur égal à l'inverse du cosinus de l'angle α entre la direction effective de propagation et l'axe x :

$$\lambda_x = \lambda/\cos \alpha. \quad (34.20)$$

Ainsi le taux de changement de phase qui est proportionnel à l'inverse de λ_x est le *plus petit* du facteur $\cos \alpha$; c'est exactement ainsi que k_x va varier – ce sera donné par la grandeur de $\mathbf{k}$, que multiplie le cosinus de l'angle entre $\mathbf{k}$ et l'axe x !

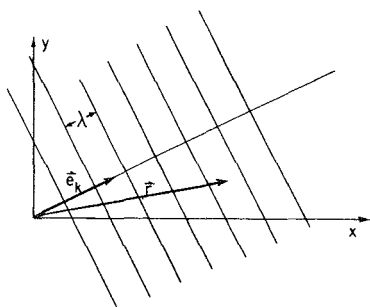


Fig. 34-11. Une onde plane se déplaçant en oblique.

Telle est donc la nature de ce vecteur d'onde que nous utilisons pour représenter une onde à trois dimensions. Les quatre quantités ω , k_x , k_y , k_z se transforment en relativité comme un quadri-vecteur où ω correspond au temps et k_x , k_y , k_z correspondent aux composantes x , y et z de ce quadri-vecteur.

Dans notre précédente étude de la relativité restreinte (Chapitre 17), nous avons appris qu'il y a moyen d'effectuer des produits scalaires relativistes avec des quadri-vecteurs. Si nous utilisons le vecteur position x_μ où μ indique les quatre composantes (le temps et les trois composantes spatiales) et si nous appelons k_μ le vecteur d'onde, où l'indice μ possède à nouveau quatre valeurs, le temps et les trois composantes spatiales, alors le produit scalaire de x_μ de k_μ s'écrit $\Sigma' k_\mu x_\mu$ (voir Chapitre 17). Ce produit scalaire est un invariant indépendant du système de coordonnées; à quoi est-il égal? Par la définition de ce produit scalaire à quatre dimensions, c'est

$$\Sigma' k_\mu x_\mu = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z. \quad (34.21)$$

Nous savons à partir de notre étude des vecteurs $\Sigma' k_\mu x_\mu$ est invariant dans la transformation de Lorentz, puisque k_μ est un quadri-vecteur. Mais cette quantité est précisément ce qui apparaît à l'intérieur du cosinus pour une onde plane, et elle *doit* être invariante dans une transformation de Lorentz. Nous ne pouvons pas avoir une formule avec quelque chose qui change à l'intérieur du cosinus, puisque nous savons que la phase de l'onde ne peut pas changer lorsque nous changeons le système de coordonnées.

34-8 Aberration

En établissant les équations (34.17) et (34.18) nous avons pris un exemple simple où $\mathbf{k}$ se trouvait être dans la direction du mouvement, mais bien sûr nous pouvons généraliser cela à d'autres cas. Par exemple, supposez qu'il y ait une source envoyant de la lumière dans une certaine direction du point de vue d'un homme au repos, mais que nous soyons en mouvement avec la terre, par exemple (Fig. 34-12). De quelle direction la lumière semble-t-elle provenir? Pour le trouver, nous devons écrire les quatre composantes de k_μ et appliquer la transformation de Lorentz. La réponse, cependant, peut être trouvée par le raisonnement suivant: nous devons pointer notre télescope en oblique pour voir la lumière. Pourquoi? Parce que la lumière vient vers le bas à la vitesse c et que nous sommes en train de nous déplacer sur le côté à la vitesse v , ainsi le télescope doit être tourné vers l'avant de telle sorte que lorsque la lumière descend

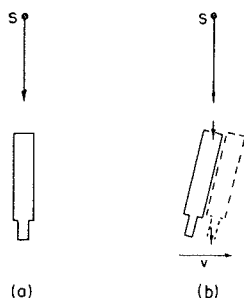


Fig. 34-12. Une source éloignée S est observée par (a) un télescope stationnaire et (b) par un télescope en mouvement latéral.

elle tombe droit dans le tube. Il est très facile de voir que la distance horizontale est vt lorsque la distance verticale vaut ct et donc si l'angle θ' est l'angle de rotation, $\tan \theta' = v/c$. Que c'est bien! Que c'est bien en effet – à l'exception d'une petite chose: θ' n'est pas l'angle duquel nous devrions incliner le télescope *relativement à la terre*, parce que nous avons fait notre analyse du point de vue d'un observateur « fixe ». Lorsque nous avons dit que la distance horizontale était vt , l'homme sur la terre aurait trouvé une distance différente puisqu'il mesure avec une règle « comprimée ». Il apparaît que à cause de l'effet de contraction

$$\tan \theta = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (34.22)$$

ce qui est équivalent à

$$\sin \theta = v/c. \quad (34.23)$$

Il sera instructif pour l'étudiant de déduire ce résultat en utilisant la transformation de Lorentz.

Cet effet – le télescope doit être tourné – est appelé *aberration*, et il a été observé. *Comment* pouvons-nous l'observer? Qui peut dire où *doit* se trouver une étoile donnée? Supposez que nous *devions* regarder dans la fausse direction pour voir une étoile; comment savons-nous que c'est une fausse direction? Parce que la terre tourne autour du soleil. Aujourd'hui nous devons pointer le télescope d'une certaine manière; six mois après nous devons tourner le télescope dans l'autre sens. C'est ainsi que nous pouvons reconnaître l'existence d'un tel effet.

34-9 La quantité de mouvement de la lumière

Nous allons maintenant aborder un sujet différent. Nous n'avons jamais, dans toutes nos discussions des quelques chapitres précédents, dit quelque chose sur les effets du champ *magnétique* associé à la lumière. D'habitude, les effets de ce champ magnétique sont très petits, mais il y a un effet important et intéressant qui est une conséquence du champ magnétique. Supposez que la lumière vienne d'une source et agisse sur une charge et fasse osciller cette charge verticalement. Nous supposons que le champ électrique est dans la direction x , le mouvement de la charge sera donc également dans la direction x : elle a une position x et une vitesse v comme indiquée sur la Figure 34-13. Le champ magnétique est perpendiculaire au champ électrique. Tandis que le champ électrique agit sur la charge et

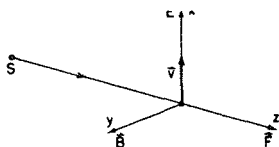


Fig. 34-13. La force magnétique sur une charge qui est excitée par le champ électrique est exercée dans la direction du faisceau lumineux.

la déplace vers le haut et vers le bas, que fait le champ magnétique? Le champ magnétique n'agit sur la charge (par exemple un électron) que lorsqu'elle est en mouvement : mais l'électron *est* en mouvement, il est piloté par le champ électrique, ainsi les deux travaillent ensemble : Lorsque l'électron se déplace vers le haut et vers le bas, il a une vitesse et donc une force agit sur lui, B que multiplie v que multiplie q ; mais quelle est la *direction* de cette force? Elle est dans la direction de propagation de la lumière. De ce fait, lorsqu'une lumière est envoyée sur une charge et que celle-ci oscille en réponse à cette lumière, il y a une force exercée dans la direction du faisceau lumineux. Ceci est appelé la *pression* de rayonnement ou pression lumineuse.

Déterminons quelle est l'importance de la pression de radiation. Évidemment, c'est $F = qvB$ ou, puisque tout oscille, c'est la *moyenne temporelle* de ceci, $\langle F \rangle$. De (34-2) on tire que l'intensité du champ magnétique est la même que l'intensité du champ électrique divisée par c , ainsi il nous faut trouver la valeur moyenne du champ électrique que multiplie la vitesse, que multiplie la charge, que multiplie $1/c$: $\langle F \rangle = q\langle vE \rangle/c$. Mais la charge q que multiplie le champ E est la force électrique sur une charge et la force sur la charge que multiplie la vitesse est le travail dW/dt réalisé sur la charge! De ce fait la force, la « quantité de mouvement exerçant une pression » qui est donnée par seconde par la lumière est égale à $1/c$ que multiplie l'énergie absorbée de la lumière par seconde! C'est une règle générale, puisque nous n'avons pas dit quelle était l'intensité de l'oscillateur ou si certaines des charges s'équilibrent. Dans toute circonstance où la lumière est en train d'être absorbée, il existe une pression. La quantité de mouvement que la lumière transfère est toujours égale à l'énergie qui est absorbée, divisée par c :

$$\langle F \rangle = \frac{dW/dt}{c} . \quad (34.24)$$

Que la lumière transporte de l'énergie, nous le savions déjà. Nous comprenons maintenant qu'elle transporte également de la *quantité de mouvement* et de plus que la quantité de mouvement transportée est toujours égale à $1/c$ que multiplie l'énergie.

Lorsque la lumière est émise par une source, il y a un effet de recul : la même chose en sens inverse. Lorsqu'un atome émet une énergie W dans une direction, il y a alors une quantité de mouvement de recul $p = W/c$. Si la lumière est *réfléchi* normalement sur un miroir, nous obtenons deux fois cette force.

Nous arrêtons là notre étude faite à l'aide de la théorie classique de la lumière. Bien sûr, nous savons qu'il y a une théorie quantique et que à plus d'un égard la lumière agit comme une particule. L'énergie d'une particule de lumière est une constante que multiplie la fréquence :

$$W = h\nu = \hbar\omega \quad (34.25)$$

Nous saisissons maintenant le fait que la lumière transporte également une quantité de mouvement égale à l'énergie divisée

par c , ce qui fait que ces particules effectives, ces *photons* transportent une quantité de mouvement

$$p = W/c = \hbar\omega/c = \hbar k. \quad (34.26)$$

La *direction* de la quantité de mouvement est, bien sûr, la direction de propagation de lumière. Ainsi, pour l'écrire sous forme vectorielle,

$$W = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \quad (34.27)$$

Nous savons également bien sûr que l'énergie et la quantité de mouvement d'une particule doivent former un quadri-vecteur. Nous venons juste de découvrir que ω et $\mathbf{k}$ forment un quadri-vecteur. Ainsi, c'est une bonne chose que (34.27) ait la même constante dans les deux cas; cela signifie que la théorie quantique et la théorie de la relativité sont mutuellement cohérentes.

L'équation (34.27) peut être écrite d'une manière plus élégante sous la forme de $p_\mu = \hbar k_\mu$ une équation relativiste pour une particule associée à une onde. Bien que nous n'ayons discuté ceci que pour les photons pour lesquels k (la grandeur de $\mathbf{k}$) est égale à ω/c et $p = W/c$, la relation est tout à fait générale. En mécanique quantique, *toutes* les particules, non seulement les photons, manifestent des propriétés ondulatoires, mais la fréquence et le nombre d'onde de ces ondes sont reliés à l'énergie et à la quantité de mouvement de la particule par (34.27) (appelée les relations de de Broglie) même lorsque p n'est pas égal à W/c .

Au chapitre précédent, nous avons vu qu'un faisceau de lumière polarisée circulairement à droite ou à gauche transporte également un certain *moment cinétique*, proportionnel à l'énergie ε de l'onde. Dans la description quantique, un faisceau de lumière circulairement polarisé est considéré comme un faisceau de photon, chacun transportant un moment cinétique $\pm \hbar$ le long de la direction de la propagation. C'est ce que devient la polarisation du point de vue corpusculaire – les photons transportent un moment cinétique comme des balles de fusil tournant sur elles-mêmes. Mais cette description par des « balles » est en réalité aussi incomplète que la description « ondulatoire », et nous devons approfondir ces sujets dans un chapitre ultérieur sur le Comportement Quantique.

La vision en couleur

35-1 L'œil humain

35-2 La couleur dépend de l'intensité

35-3 Mesurer la sensation de couleur

35-4 Le diagramme de chromaticité

35-5 Le mécanisme de la vision en couleur

35-6 La physiochimie de la vision en couleur

35-1 L'œil humain

Le phénomène des couleurs dépend partiellement du monde physique. Nous disons des couleurs sur les pellicules de savon qu'elles sont produites par des interférences. Mais cela dépend aussi, bien sûr, de l'œil ou de ce qui se passe derrière l'œil dans le cerveau. La physique permet de caractériser la lumière qui pénètre dans l'œil, mais après cela nos sensations sont les résultats de processus neuro-photochimiques et de réponses psychologiques.

On trouve de nombreux phénomènes intéressants associés avec la vision qui comportent un mélange de phénomènes physiques et de processus physiologiques, et la pleine compréhension des phénomènes naturels, comme nous les *voyons*, doit dépasser la physique au sens habituel. Nous ne nous excusons pas de faire ces excursions dans d'autres domaines, parce que la séparation des domaines, comme nous l'avons déjà dit avec insistance, ne relève que de la commodité humaine et n'est pas une chose naturelle. La nature n'est pas intéressée par nos séparations et nombreux sont les phénomènes intéressants qui sont à cheval sur divers domaines.

Au Chapitre 3 nous avons déjà discuté en termes généraux la relation entre la physique et les autres sciences, mais maintenant nous allons regarder avec quelques détails, un domaine particulier dans lequel la physique et d'autres sciences sont très étroitement liées. Ce domaine c'est la *vision*. En particulier nous allons examiner la *vision en couleur*. Dans ce chapitre nous considérons essentiellement les phénomènes observables de la vision humaine, et au chapitre suivant nous considérerons les aspects physiologiques de la vision, à la fois dans l'homme et dans d'autres animaux.

Tout commence avec l'œil; aussi, afin de comprendre quels phénomènes nous voyons, nous devons un peu savoir ce qu'est l'œil. Au chapitre suivant nous envisagerons dans les détails comment les diverses parties de l'œil fonctionnent et comment elles sont reliées avec le système nerveux. Pour le présent, nous ne décrirons que brièvement comment l'œil fonctionne (Fig. 35-1).

La lumière pénètre dans l'œil au travers de la *cornée*; nous avons déjà vu comment elle est déviée et comment elle vient former une image sur une couche, appelée la *rétine* à l'arrière de l'œil, de telle sorte que les différentes parties de la rétine reçoivent la lumière des différentes parties du champ visuel externe. La rétine n'est pas absolument uniforme: il y a un endroit, une tache au centre de notre champ

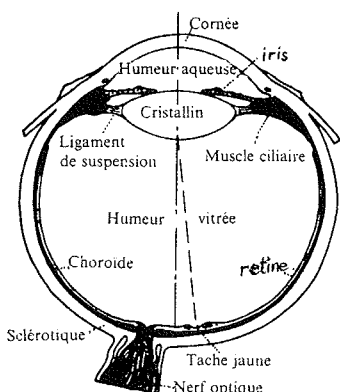


Fig. 35-1. L'œil.

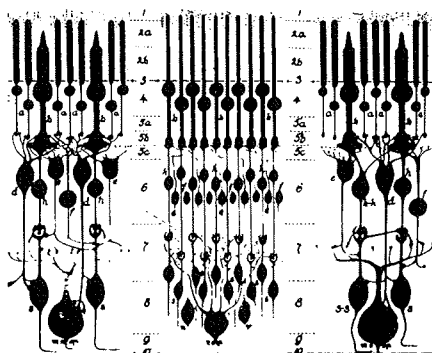


Fig. 35-2. La structure de la rétine.
(La lumière entre par le bas.)

de vision que nous utilisons lorsque nous essayons de voir les choses avec beaucoup de soin et pour lequel nous avons la plus grande acuité de vision. Cet endroit est appelé la *tache jaune* ou *macula*. Comme nous pouvons immédiatement nous en rendre compte à partir de l'expérience en observant des objets, les parties latérales de l'œil ne permettent pas une vision aussi détaillée que le centre. Il existe également un endroit sur la rétine d'où partent les nerfs transportant toute l'information; c'est un point aveugle. Il n'y a pas de région sensible de la rétine à cet endroit, et il est possible de démontrer que si nous fermons par exemple l'œil gauche, que nous regardions directement quelque chose, et qu'ensuite nous déplaçons un doigt ou un autre petit objet lentement hors du champ de vision, il disparaît soudainement quelque part. La seule utilité pratique de ce fait, que nous connaissons, est qu'un certain physiologue devint un grand favori à la cour d'un roi de France en lui indiquant ce phénomène; dans les séances ennuyeuses qu'il devait tenir avec ses courtisans, le roi pouvait s'amuser en «coupant leurs têtes», en regardant l'un tout en observant la tête de l'autre en train de disparaître.

La Figure 35-2 montre une vue agrandie de l'intérieur de la rétine sous une forme quelque peu schématique. En différents endroits de la rétine, il y a différents types de structures. Les objets qui apparaissent avec plus de densité près de la périphérie de la rétine sont appelés des *bâtonnets*. Plus près de la tache jaune, nous trouvons à côté de ces cellules à bâtonnet, des cellules en *cônes*. Nous décrirons la structure de ces cellules plus tard. Lorsque nous nous rapprochons de la tache jaune, le nombre de cônes augmente et dans la tache jaune elle-même il n'y a rien d'autre en fait, que des cellules en cône, étroitement serrées, si étroitement que les cellules en cône sont beaucoup plus fines et beaucoup plus étroites à cet endroit que n'importe où ailleurs. Nous devons donc comprendre que nous voyons au milieu du champ de vision grâce aux cônes, mais que pour les bords nous utilisons les autres cellules, les bâtonnets. Il est maintenant intéressant de remarquer que dans la rétine chaque cellule qui est sensible à la lumière n'est pas directement reliée par une fibre au nerf optique, mais est reliée à beaucoup d'autres cellules qui elles-mêmes sont reliées les unes aux autres. On trouve différents types de cellules: il y a les cellules qui transportent l'information vers le nerf optique, mais il y a les autres qui sont essentiellement reliées « horizontalement ». On trouve essentiellement quatre types de cellules, mais nous n'entrerons pas dans ces détails maintenant.

La chose importante sur laquelle nous insistons est que le signal de la lumière a déjà subi un premier « traitement réfléchi ». C'est-à-dire que l'information venant des diverses

cellules ne va pas immédiatement vers le cerveau, endroit pour endroit, mais que dans la rétine cette quantité d'information a déjà été digérée par une combinaison de l'information venant de plusieurs récepteurs visuels. Il est important de comprendre que certains phénomènes du type de ceux qui se passent dans le cerveau apparaissent dans l'œil lui-même.

35-2 La couleur dépend de l'intensité

Un des phénomènes les plus frappants de la vision est celui de l'adaptation de l'œil à l'obscurité. Si nous pénétrons dans l'obscurité sortant d'une chambre brillamment éclairée, il ne nous est pas possible de très bien voir pendant un certain temps et puis, petit à petit, les choses deviennent de plus en plus apparentes et éventuellement nous pouvons discerner quelque chose là où précédemment nous ne voyions rien. Si l'intensité de la lumière est très basse, les objets que nous voyons n'ont *pas de couleurs*. Il est reconnu que cette vision adaptée à l'obscurité est presque entièrement due aux bâtonnets, tandis que la vision à la lumière brillante est due aux cônes. Comme résultat, un certain nombre de phénomènes peuvent aisément se comprendre à cause du transfert de fonctions des cônes et des bâtonnets ensemble aux seuls bâtonnets.

On trouve de nombreux cas pour lesquels si l'intensité de la lumière avait été plus forte, nous aurions pu voir la couleur et nous trouverions ces choses magnifiques. Par exemple, au travers d'un télescope nous voyons presque toujours en « noir et blanc » des images de nébuleuses faibles, mais W. C. Miller des Observatoires du Mt. Wilson et de Palomar a eu la patience de faire des photographies en *couleur* de certains de ces objets. Personne n'a jamais en réalité vu ces couleurs avec son œil, mais ce ne sont pas des couleurs artificielles, cela est dû simplement au fait que l'intensité de la lumière n'est pas suffisamment grande pour que les cônes de notre œil puissent les voir. Parmi les plus spectaculaires de ces objets on trouve la nébuleuse en anneau et la nébuleuse Crabe. La première manifeste une partie interne d'un beau bleu, avec un anneau externe d'un rouge brillant et la dernière manifeste un brouillard bleuâtre traversé par des filaments d'un rouge orangé brillant.

En lumière brillante, les bâtonnets ont en apparence une très faible sensibilité mais, dans l'obscurité, lorsque le temps passe, ils récupèrent alors leur capacité de voir la lumière. Les variations de l'intensité de la lumière pour lesquelles on peut s'adapter dépassent le rapport de un million à un. La nature ne réalise pas tout cela avec un seul type de cellule, mais elle fait effectuer son travail tantôt par des cellules capables de voir la lumière brillante – les cellules voyant en couleur, les cônes – tantôt par des cellules de basse intensité adaptées à l'obscurité, les bâtonnets. Parmi les conséquences intéressantes de ce transfert, on trouve en premier lieu que, à cette occasion, les couleurs disparaissent et deuxièmement qu'il y a une différence dans la luminosité relative des objets colorés différemment. Il se trouve que les bâtonnets voient mieux dans le bleu que ne le font les cônes et les cônes peuvent voir par exemple une lumière d'un rouge profond, tandis que les bâtonnets se trouvent dans l'incapacité totale de la voir. Ainsi la lumière rouge est noire en ce qui concerne les bâtonnets. Ainsi deux morceaux de papier coloré, par exemple du bleu et du rouge, pour lesquels le rouge peut même être plus brillant que le bleu éclairé par une bonne lumière vont, dans l'obscurité, apparaître complètement renversés. C'est un effet extrêmement frappant. Si nous sommes dans l'obscurité et que nous trouvons un magazine ou quelque chose de coloré, nous classons les surfaces sombres et claires avant d'être sûr de savoir quelles sont ces couleurs et lorsque nous éclairons le magazine, nous pouvons observer ce transfert tout à fait remarquable entre celle qui était la couleur brillante et celle qui ne l'était pas. Ce phénomène est appelé *l'effet Purkinje*.

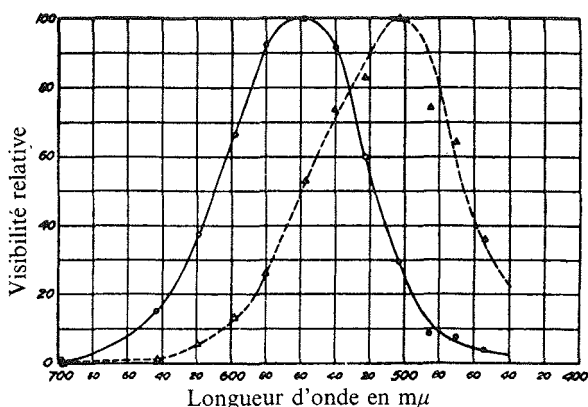


Fig. 35-3. La sensibilité spectrale de l'œil. Courbe en pointillé, les bâtonnets; courbe en trait plein, les cônes.

Sur la Figure 35-3, la courbe en pointillé représente la sensibilité de l'œil dans l'obscurité, c'est-à-dire en utilisant les bâtonnets, tandis que la courbe en trait plein représente la sensibilité à la lumière. Nous voyons que la sensibilité maximum des bâtonnets se trouve dans la région verte et que celle des cônes se trouve davantage dans la région jaune. Si vous regardez une page colorée en rouge (le rouge est aux environs de 650 mμ) nous pouvons la voir si elle est brillamment éclairée, mais dans l'obscurité elle est pratiquement invisible.

Un autre effet provenant du fait que les bâtonnets deviennent prééminents dans le noir et du fait de l'absence de bâtonnets dans la tache jaune, est que lorsque nous observons directement quelque chose dans l'obscurité, notre vision n'est pas aussi précise que lorsque nous le regardons de côté. Une étoile faible ou une nébuleuse peuvent être quelquefois mieux aperçues en regardant un petit peu de côté plutôt que de les regarder droit en face parce que nous n'avons pas de bâtonnets sensibles au milieu de la tache jaune.

Un autre effet intéressant dû au fait que le nombre de cônes diminue lorsque nous nous éloignons sur le côté du champ de vision est que même en lumière brillante la couleur disparaît, lorsque l'objet s'éloigne de côté. La manière de le vérifier consiste à regarder dans une certaine direction fixe, à demander à un ami de se rapprocher latéralement en tenant des cartes colorées et d'essayer de préciser de quelles couleurs elles sont avant qu'elles ne soient directement en face de vous. On trouve qu'on peut déterminer que les cartes sont là bien avant que l'on puisse en déterminer la couleur. Quand on fait cela, il vaut mieux venir du côté opposé au point aveugle, sinon c'est assez troublant de percevoir la couleur, puis de ne plus rien voir, puis de la revoir.

Un autre phénomène intéressant est que la périphérie de la rétine est très sensible au mouvement. Bien que nous ne puissions voir très correctement depuis le coin de notre œil, si un quelconque insecte se déplace et que nous ne nous attendions pas à ce que quelque chose d'autre se déplace à cet endroit, nous y sommes immédiatement sensibles. Nous sommes tous « fabriqués » de telle sorte que nous puissions voir quelque chose s'agiter sur le côté de notre champ de vision.

35-3 Mesurer la sensation de couleur

Nous nous intéressons maintenant à la vision des cônes, à la vision la plus brillante et nous en venons à la question qui est la plus caractéristique de la vision par les cônes, c'est-à-dire la couleur. Comme nous le savons, la lumière blanche peut être décomposée

par un prisme en tout un spectre de longueurs d'onde qui nous apparaissent comme ayant des couleurs différentes; c'est exactement ce que sont les couleurs, bien entendu: des apparences. N'importe quelle source de lumière peut être analysée par un réseau ou un prisme et on peut déterminer la distribution spectrale, c'est-à-dire la « quantité » de chaque longueur d'onde. Une certaine lumière peut avoir beaucoup de bleu, un rouge en quantité, très peu de jaune, etc. Tout cela est extrêmement précis du point de vue de la physique, mais la question est de savoir de quelle *couleur* cela apparaîtra-t-il? Il est évident que les différentes couleurs dépendent d'une manière ou d'une autre de la distribution spectrale de la lumière, mais le problème est de trouver quelles caractéristiques de la distribution spectrale produisent les diverses sensations. Par exemple, que devons-nous faire pour obtenir une couleur verte? Nous savons tous que nous pouvons prendre simplement une partie du spectre qui est verte. Mais est-ce le *seul* moyen d'obtenir du vert ou de l'orange, ou n'importe quelle autre couleur?

Y a-t-il plus d'une distribution spectrale qui produise le même effet visuel apparent? La réponse est certainement *oui*. Il y a un nombre très limité d'effets visuels, en fait une multiplicité à trois dimensions comme nous allons le voir très bientôt, mais on peut tracer un nombre infini de courbes différentes pour représenter la lumière provenant de différentes sources. La question maintenant que nous devons discuter est: sous quelles conditions des contributions différentes de la lumière apparaissent à l'œil comme étant exactement de la même couleur?

La technique psychophysique la plus puissante dans le jugement des couleurs consiste à utiliser l'œil comme un *instrument de zéro*. C'est-à-dire: nous n'essayons pas de définir ce qui constitue une sensation verte ou de mesurer dans quelles circonstances nous obtenons une sensation verte, parce qu'il se trouve que ceci est extrêmement compliqué. Au lieu de cela, nous étudions les conditions dans lesquelles deux stimuli ne *peuvent être distingués*. Alors il n'est pas nécessaire de décider si deux personnes ont la même sensation dans des circonstances différentes, mais seulement si lorsque pour une personne deux sensations sont les mêmes, elles le restent pour une autre. Nous n'avons pas à dire si, lorsque quelqu'un voit du vert, ce qu'il ressent est la même chose que ce que ressent quelqu'un d'autre lorsqu'il voit quelque chose de vert; de cela nous ne savons rien.

Pour illustrer ces possibilités, nous pouvons utiliser une série de quatre lampes projecteurs, montées avec des filtres et dont les luminosités sont ajustables continûment dans un grand domaine: l'une dispose d'un filtre rouge et envoie une tache rouge sur l'écran, la suivante dispose d'un filtre vert et forme une tache verte, la troisième a un filtre bleu et la quatrième est un cercle blanc avec une tache noire en son centre. Si maintenant nous mettons un petit peu de lumière rouge et qu'à côté d'elle nous mettons un petit peu de vert, nous voyons que sur la surface de recouvrement cela produit une sensation qui n'est pas ce que nous appelons un vert rougeâtre, mais une nouvelle couleur, le jaune dans ce cas particulier. En modifiant les proportions de rouge et de vert, nous pouvons passer par diverses teintes d'orange, etc. Si nous avons obtenu un certain jaune, nous pouvons également obtenir le même jaune non pas en mélangeant ces deux couleurs mais en en mélangeant certaines autres, peut-être un filtre jaune avec de la lumière blanche ou quelque chose de ce genre, pour obtenir la même sensation. En d'autres termes, il est possible d'obtenir les diverses couleurs de plus d'une seule manière, en mélangeant les lumières venant des divers filtres.

Ce que nous venons de découvrir peut être exprimé analytiquement comme suit. Un jaune particulier, par exemple, peut être représenté par un certain symbole **J**, qui est la « somme » de certaines quantités de lumière rouge filtrée (**R**) et de lumière verte filtrée (**V**).

En utilisant deux nombres, par exemple r et v , pour décrire la luminosité de (R) et de (V) nous pouvons écrire une formule pour ce jaune :

$$J = rR + vV \quad (35.1)$$

La question est alors : pouvons-nous former *toutes* les différentes couleurs en ajoutant deux ou trois lumières de couleurs différentes mais fixes ? Voyons ce qui peut être fait dans ce sens. Nous ne pouvons certainement pas obtenir toutes les différentes couleurs en ne mélangeant que le rouge et le vert, parce que, par exemple, le bleu n'apparaît jamais dans un tel mélange. Cependant, en ajoutant un peu de bleu dans la région centrale où les trois taches se chevauchent, on peut obtenir quelque chose qui apparaît comme un très joli blanc. En mélangeant les diverses couleurs et en observant cette région centrale, nous voyons que nous pouvons obtenir un vaste domaine de couleurs dans cette région en changeant les proportions, et ainsi il n'est pas impossible que *toutes* les couleurs puissent être formées en mélangeant ces trois lumières colorées. Nous allons discuter jusqu'à quel point ceci est vrai ; c'est en fait essentiellement correct et nous verrons bientôt comment mieux définir cette proposition.

Afin d'illustrer ce point, nous déplaçons les taches sur l'écran de telle sorte qu'elles tombent toutes les unes sur les autres et ensuite nous essayons d'obtenir l'équivalence avec une couleur particulière qui apparaît dans l'anneau formé par la quatrième lampe. Ce que nous avons pensé un moment être du « blanc », provenant de la quatrième lampe apparaît maintenant comme jaunâtre. Nous pouvons essayer de chercher l'équivalence de ceci en ajustant le rouge, le vert et le bleu aussi bien que nous pouvons par des essais successifs, et nous trouvons que nous pouvons approcher d'assez près cette teinte particulière de couleur « crème ». Il n'est donc pas difficile de penser que nous pouvons former toutes les couleurs. Nous allons essayer de faire du jaune dans un moment, mais avant de le faire, remarquons qu'il y a une couleur qui peut être extrêmement difficile à obtenir. Les gens qui font des cours sur la couleur, fabriquent toutes les couleurs « brillantes », mais ils ne font jamais du *brun* et il est difficile de se rappeler avoir même jamais vu une lumière brune. En fait cette couleur n'est jamais utilisée pour un effet de scène, on ne voit jamais de projecteur avec une lumière brune ; aussi nous pouvons penser qu'il est impossible de fabriquer du brun. Afin de savoir s'il est possible de fabriquer du brun, remarquons que la lumière brune est simplement quelque chose que nous n'avons pas l'habitude de voir sans son environnement. En fait, nous pouvons l'obtenir en mélangeant un peu de rouge et de jaune. Pour prouver que nous regardons une lumière brune, nous augmentons simplement la luminosité de l'environnement par rapport auquel nous observons très exactement la même lumière, et nous voyons que ceci est en fait ce que nous appelons du brun ! Le brun est toujours une couleur sombre sur un fond plus lumineux. Nous pouvons facilement changer le caractère du brun. Par exemple, si nous enlevons un petit peu de vert, nous obtenons du brun rougeâtre, apparemment un brun rougeâtre de teinte chocolat, et si nous augmentons la proportion de vert, nous obtenons cette couleur horrible qui recouvre tous les uniformes militaires, mais la lumière de cette couleur n'est pas si horrible en elle-même ; elle est d'un vert jaunâtre, mais vue sur un fond clair.

Nous plaçons maintenant un filtre jaune devant notre quatrième lampe et essayons d'obtenir l'équivalence. (L'intensité bien entendu doit être dans le domaine des diverses lampes ; nous ne pouvons pas trouver l'équivalent de quelque chose de trop brillant parce que nous n'avons pas assez de puissance dans la lampe.) Mais nous *pouvons* trouver l'équivalence du jaune ; nous utilisons un mélange de vert et de rouge et y introduisons une touche de bleu pour le rendre plus parfait. Peut-être sommes-nous prêts de croire que dans de bonnes conditions nous pouvons réaliser une adaptation parfaite pour n'importe quelle couleur donnée.

Parlons maintenant des lois de mélange des couleurs. En premier lieu, nous avons trouvé que des distributions spectrales différentes peuvent produire la même couleur; ensuite nous avons vu que « n'importe quelle » couleur peut être formée en ajoutant trois couleurs spéciales, le rouge, le bleu et le vert. La caractéristique la plus intéressante du mélange des couleurs est celle-ci: si nous avons une certaine couleur que nous pouvons appeler X et si on ne peut la distinguer à l'œil de Y (cela peut être une distribution spectrale différente, mais elle *semble* identique), nous disons que ces couleurs sont « égales » au sens où l'œil les voit comme étant égales, et nous écrivons

$$X = Y. \quad (35.2)$$

Voici alors une des grandes lois de la couleur: si deux distributions spectrales ne peuvent être distinguées et que nous *ajoutons à chacune d'elles* une certaine lumière, par exemple Z (si nous écrivons $X + Z$, cela signifie que nous envoyons les deux lumières au même endroit), et puis que nous prenions J et ajoutons la même quantité de la même lumière Z , *les nouveaux mélanges ne peuvent également pas être distingués*:

$$X + Z = Y + Z. \quad (35.3)$$

Nous venons tout juste de trouver l'équivalent de notre jaune; si maintenant nous envoyons une lumière rosée sur l'ensemble, l'équivalence subsistera. Ainsi le fait d'ajouter n'importe quelle lumière à deux lumières équivalentes conserve l'équivalence. En d'autres termes, nous pouvons résumer tous ces phénomènes de couleurs en disant qu'une fois que nous avons obtenu l'équivalence entre deux lumières colorées observées l'une à côté de l'autre dans les mêmes circonstances, cette équivalence subsistera et une des lumières peut être substituée à l'autre dans n'importe quelle autre cas de mélange de couleur. En fait, il se trouve, et c'est très important et intéressant, que cette équivalence des couleurs de lumière n'est pas dépendante des caractéristiques de l'œil au moment de l'observation: nous savons que si nous regardons un long moment une surface rouge brillante ou une lumière rouge brillante et puis que nous regardions un papier blanc, il nous paraît verdâtre et que les autres couleurs sont également déformées par le fait d'avoir regardé aussi longtemps la lumière rouge. Si maintenant nous avons obtenu l'équivalence entre, par exemple, deux jaunes, que nous les regardions et qu'ils soient équivalents, et puis que nous regardions une surface rouge brillante pendant un long moment et que nous revenions au jaune, il se peut qu'il n'apparaisse plus jaune; je ne sais pas de quelle couleur il apparaîtra, mais il n'apparaîtra plus jaune. Néanmoins, *les deux jaunes apparaîtront toujours équivalents* et ainsi, lorsque l'œil s'adapte à différents niveaux d'intensité, l'équivalence des couleurs se conserve encore avec l'exception évidente du moment où nous atteignons la région dans laquelle l'intensité de la lumière devient si faible que nous sommes alors passés des cônes aux bâtonnets; alors l'équivalence des couleurs n'est plus une équivalence de couleur parce que nous utilisons un système différent.

Le second principe de mélange des couleurs de lumières est celui-ci: *n'importe quelle couleur peut être formée à partir de trois couleurs différentes*, dans notre cas, les lumières rouges, vertes et bleues. En mélangeant convenablement les trois nous pouvons fabriquer n'importe quelle couleur, comme nous l'avons démontré avec nos deux exemples. De plus, ces lois sont très intéressantes d'un point de vue mathématique. Pour ceux qui sont intéressés par les mathématiques de la chose, voilà ce qu'il en est. Supposez que nous prenions nos trois couleurs qui soient le rouge, le vert et le bleu, mais que nous les indiquions par A , B et C , et que nous les appelions nos couleurs *primitives*. Alors une couleur quelconque peut être formée à partir de certaines quantités de ces trois: par exemple une quantité a de la couleur A ; une quantité b de la couleur B et une quantité c de la couleur C forment X :

$$X = aA + bB + cC. \quad (35.4)$$

Supposez maintenant qu'une autre couleur Y soit formée des trois mêmes couleurs :

$$Y = a'A + b'B + c'C. \quad (35.5)$$

Il se trouve alors que le mélange des deux lumières (c'est une des conséquences des lois que nous avons déjà mentionnées) est obtenue en prenant la somme des composantes de X et Y :

$$Z = X + Y = (a + a')A + (b + b')B + (c + c')C. \quad (35.6)$$

C'est tout à fait semblable aux mathématiques de l'addition des vecteurs, où (a, b, c) sont les composantes d'un vecteur, et (a', b', c') sont celles d'un autre vecteur et où la nouvelle lumière Z est alors la « somme » des vecteurs. Ce sujet a toujours plu aux physiciens et aux mathématiciens. En fait, Schrödinger a écrit un article magnifique sur la vision en couleur dans lequel il a développé cette théorie d'analyse vectorielle appliquée au mélange des couleurs.

La question maintenant se pose de savoir quelles sont les bonnes couleurs primitives à utiliser. Il n'y a rien qu'on puisse considérer comme étant « les » bonnes couleurs primitives pour les mélanges de lumières. Il peut y avoir, pour des applications pratiques, trois peintures qui soient plus utiles que d'autres pour obtenir une plus grande variété de pigments mélangés, mais nous ne discuterons pas ce problème maintenant. *Trois lumières quelconques de couleurs différentes** peuvent toujours être mélangées dans les proportions correctes pour produire *n'importe quelle couleur*. Pouvons-nous démontrer ce fait fantastique? Au lieu d'utiliser du rouge, du vert et du bleu, utilisons du rouge, du bleu et du jaune dans notre projecteur. Pouvons-nous utiliser du rouge, du bleu et du jaune pour fabriquer par exemple du vert?

En mélangeant ces trois couleurs dans des proportions diverses, nous obtenons tout un ensemble de couleurs différentes s'étalant sur tout un spectre. Mais en fait, après beaucoup d'essais nous trouvons que rien ne ressemble à du vert. La question est: *pouvons-nous faire du vert?* La réponse est oui. Comment? *En projetant un peu de rouge sur le vert*, nous pouvons alors obtenir une certaine équivalence avec un certain mélange de jaune et de bleu! Ainsi nous les avons rendus équivalents à ceci près que nous avons dû tricher en mettant le rouge de l'autre côté. Mais puisque nous recherchons à tout exprimer mathématiquement nous pouvons comprendre que ce que nous avons montré en réalité n'était pas que X pouvait toujours être obtenu, par exemple, avec du rouge, du bleu et du jaune, mais en mettant le rouge de l'autre côté nous avons trouvé que le rouge plus X pouvait être équivalent à du bleu plus du jaune. En les mettant de l'autre côté de l'équation, nous pouvons l'interpréter comme étant une *quantité négative*, si donc nous permettons aux coefficients des équations comme (35.4) d'être à la fois positifs ou négatifs, et si nous interprétons les quantités négatives comme indiquant que nous devons *ajouter* quelque chose de *l'autre côté*, alors n'importe quelle couleur peut être rendue équivalente à n'importe laquelle des trois autres, et il n'y a rien qui ressemble à trois couleurs primitives fondamentales.

Nous pouvons nous demander s'il existe trois couleurs qui ne s'introduisent que par quantités positives dans tous les mélanges. La réponse est non. N'importe quel ensemble arbitraire de trois primitives nécessite toujours des quantités négatives pour certaines couleurs, et ainsi il n'y a pas de manière unique de définir une primitive. Dans les livres élémentaires on dit que ce sont le rouge, le vert et le bleu, mais cela vient du fait simplement qu'avec elle un *plus large domaine* de couleurs peut être obtenu sans utiliser les signes moins dans certaines des combinaisons.

* A l'exception, bien, sûr du cas où l'une d'entre elles peut être rendue équivalente par un mélange des deux autres.

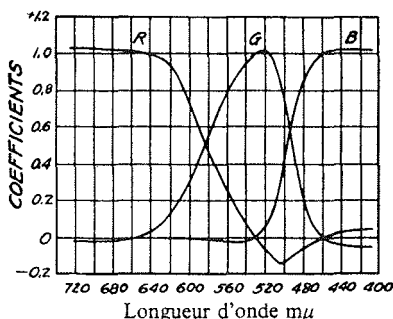


Fig. 35-5. Les coefficients de couleur des couleurs spectrales pures en fonction d'un certain ensemble de référence de couleurs primitives.

Ainsi, si nous déterminons quels sont les *coefficients de couleur* de toutes les couleurs spectrales pour un groupe arbitraire de trois couleurs primitives, alors nous pouvons établir toute la table des mélanges de couleurs:

Un exemple de tels résultats expérimentaux, obtenus en mélangeant trois lumières, est donné sur la Figure 35-5. Cette figure montre la quantité de chacune des trois primitives particulières le rouge, le vert et le bleu, qui est nécessaire pour former chacune des couleurs spectrales. Le rouge est à la gauche du spectre, le jaune suit, etc., et ainsi jusqu'au bleu. Remarquez qu'en certains points apparaissent des signes moins. C'est à partir de telles données qu'il est possible de situer la position de toutes les couleurs sur une carte où les coordonnées x et y sont reliées aux quantités des différentes primitives qui sont utilisées. C'est ainsi que la ligne courbe faisant frontière a été trouvée. C'est le lieu des couleurs spectrales pures. N'importe quelle autre couleur peut être formée en additionnant des raies spectrales, bien sûr, et ainsi nous trouvons que n'importe quoi qui peut être produit en reliant une partie de cette courbe à une autre est une couleur que l'on peut rencontrer dans la nature. La ligne droite relie l'extrémité violette du spectre à son extrémité rouge. C'est le lieu des pourpres. A l'intérieur de la frontière, on trouve des couleurs qui peuvent être obtenues avec des lumières, et à l'extérieur on trouve des couleurs qui ne peuvent pas être obtenues avec des lumières et personne ne les a jamais vues (sauf peut-être dans les images rémanentes).

35-5 Le mécanisme de la vision en couleur

L'aspect suivant de notre problème est la question de savoir *pourquoi* les couleurs se comportent-elles ainsi? La théorie la plus simple proposée par Young et Helmholtz, suppose que dans l'œil se trouvent trois différents pigments qui reçoivent la lumière et qu'ils ont différents spectres d'absorption, de telle sorte qu'un pigment absorbe fortement par exemple dans le rouge, un autre absorbe fortement dans le bleu et un autre absorbe dans le vert. Lorsque nous envoyons de la lumière sur eux, la lumière sera absorbée en quantités différentes dans les trois régions et ces trois informations sont utilisées d'une manière ou d'une autre dans le cerveau ou dans l'œil, ou ailleurs encore pour décider quelle en est la couleur. Il est facile de démontrer que toutes les règles de mélange de couleurs sont des conséquences de cette proposition. Le débat autour de cette affirmation a été considérable parce que le problème suivant, bien sûr, consiste à trouver les caractéristiques d'absorption de chacun des trois pigments. Il se trouve, malheureusement, que parce que nous pouvons transformer les coordonnées de couleurs d'une manière arbitraire, nous ne pouvons, par les expériences de mélange de couleurs, que trouver toutes sortes de

combinaisons linéaires de courbes d'absorption, mais pas les courbes des pigments individuels. On a essayé de différentes manières d'obtenir une courbe particulière qui décrirait certaines propriétés physiques particulières de l'œil. Une telle courbe est appelée une *courbe de luminosité*, montrée sur la Figure 35-3. Sur cette figure on trouve deux courbes, l'une pour les yeux dans l'obscurité, l'autre pour les yeux à la lumière; la dernière est la courbe de luminosité des cônes. Elle est trouvée en mesurant quelle est la plus petite quantité de lumière colorée que nous puissions voir. Ceci mesure quelle est la sensibilité de l'œil dans différentes régions spectrales. Il y a une autre manière très intéressante de mesurer ceci. Si nous prenons deux couleurs et les faisons apparaître en un endroit, en passant rapidement de l'une à l'autre, nous voyons une oscillation si la fréquence est trop basse. Cependant, lorsque la fréquence augmente, l'oscillation disparaît définitivement à une certaine fréquence, qui dépend de la luminosité de la lumière, par exemple à 16 répétitions par seconde. Si maintenant nous ajustons la luminosité ou l'intensité d'une couleur par rapport à l'autre, on trouve une intensité où l'oscillation à 16 cycles disparaît. Pour voir l'oscillation avec les luminosités ainsi ajustées, il faut descendre à une fréquence beaucoup plus faible, afin de voir un va-et-vient des couleurs. Nous obtenons ainsi ce que nous appelons une oscillation de la luminosité à une fréquence plus grande et, à une fréquence plus faible, un va-et-vient de la couleur. Il est possible par cette technique d'oscillation de rendre équivalentes deux couleurs sur la base de « luminosités égales ». Les résultats sont presque, mais pas exactement, les mêmes que ceux obtenus en mesurant le seuil de sensibilité de l'œil pour l'observation, par les cônes, d'une lumière faible. La plupart des spécialistes utilisent le système d'oscillation comme une définition de la courbe de luminosité.

Si, dans l'œil, il y a trois pigments sensibles à la couleur, le problème est de déterminer la forme du spectre d'absorption de chacun d'eux. Comment? Nous savons qu'il y a des gens qui sont daltoniens – huit pour cent de la population masculine et un demi pour cent de la population féminine. La plupart des gens qui sont daltoniens ou qui ont une vision colorée anormale ont un degré différent de sensibilité de celui des

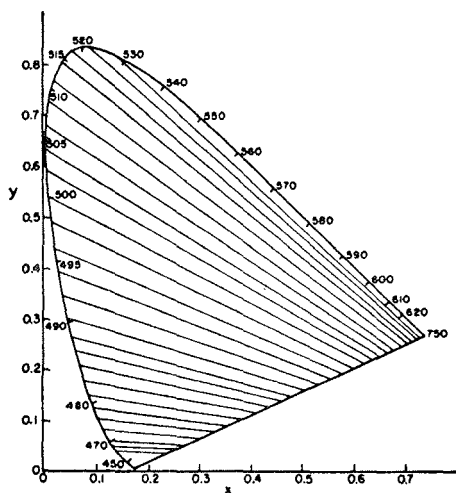


Fig. 35-6. Lieux des couleurs confondues par les deutranopes.

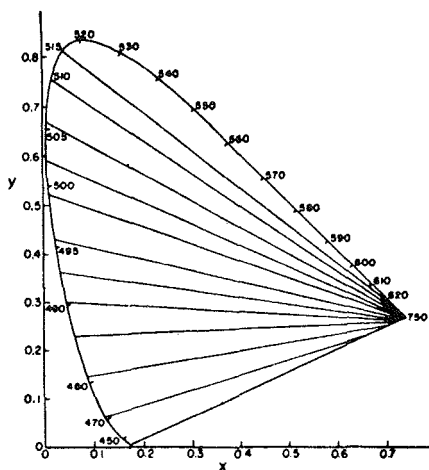


Fig. 35-7. Lieux des couleurs confondues par les protanopes.

autres à une variation de couleur, mais il leur faut toujours trois couleurs pour réaliser l'équivalence. Cependant il y en a certains qui sont appelés *dichromates*, pour lesquels une couleur quelconque peut être rendue équivalente en n'utilisant que *deux* couleurs primitives. La suggestion évidente, alors, est de dire qu'il leur manque un des trois pigments. Si nous pouvons trouver trois types différents de *dichromates* daltoniens, qui ont des règles différentes de mélange de couleurs, ce sera la pigmentation *rouge* qui fera défaut pour l'un, la *verte* pour un autre et la *bleue* pour le troisième. En mesurant tous ces types, nous pouvons déterminer les trois courbes! Il se trouve qu'il y a trois types de daltonisme de type dichromatique; il y en a deux très ordinaires et un troisième extrêmement rare, et à partir de ces trois il a été possible de déduire les spectres d'absorption du pigment.

La Figure 35-6 montre le mélange de couleurs d'un type particulier de personne daltonienne appelée un deutéranope. Pour lui, le lieu des couleurs constantes, ce ne sont pas des points, mais certaines droites le long de chacune desquelles les couleurs lui apparaissent les mêmes. Si la théorie selon laquelle il lui manque une des trois informations est exacte, toutes ces droites doivent se couper en un point. Si nous faisons la mesure avec soin sur ce graphique, nous voyons qu'elles se rencontrent parfaitement bien. Évidemment, ceci a été tracé par un mathématicien et ne représente pas les données réelles! En fait, si nous considérons la dernière publication contenant des données réelles, il se trouve que dans le graphique de la Figure 35-6, le point de focalisation de toutes les droites ne se trouve pas exactement à la bonne place. En utilisant les droites de la figure ci-dessus, nous ne pouvons pas trouver un spectre raisonnable; il nous faut des absorptions positives et négatives dans des régions différentes. Mais en utilisant les nouvelles données de Yustova, il se trouve que chacune des courbes d'absorption est alors partout positive.

La Figure 35-7 montre un type différent de daltonisme, celui d'un protanope, qui possède un point de convergence près de l'extrémité rouge de la courbe limite. Yustova obtient approximativement la même position dans ce cas. Utilisant les trois différentes sortes de daltonisme, les courbes de réponse des trois pigments ont finalement été déterminées et sont montrées sur la Figure 35-8. En est-ce fini? Peut-être. On peut se demander si

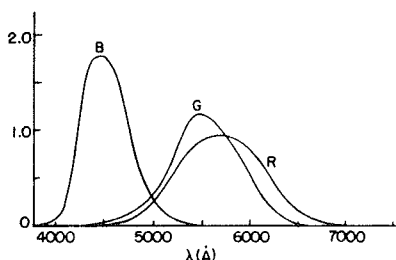


Fig. 35-8. Les courbes de sensibilité spectrales d'un récepteur normal trichromate.

l'idée de trois pigments est correcte, si le daltonisme résulte de l'absence d'un des pigments et même si les données des mélanges de couleurs sur les daltonismes sont correctes. Des expérimentateurs différents obtiennent des résultats différents. Ce domaine est encore en train de beaucoup se développer.

35-6 La physiochimie de la vision en couleur

Qu'en est-il maintenant de la vérification de ces courbes à l'aide des pigments réels dans l'œil? Les pigments qui peuvent être extraits d'une rétine sont formés essentiellement d'un pigment appelé *pourpre visuel*. Les caractéristiques les plus remarquables de celui-ci sont, premièrement, qu'il se trouve dans l'œil de pratiquement tous les vertébrés, et deuxièmement, que sa courbe de réponse s'adapte magnifiquement à la sensibilité de l'œil, comme on le voit à la Figure 35-9, dans laquelle sont tracées à la même échelle l'absorption du pourpre visuel et la sensibilité de l'œil adapté à l'obscurité. Ce pigment est manifestement le pigment avec lequel nous voyons dans l'obscurité: le pourpre visuel est le pigment des bâtonnets, et il n'a rien à voir avec la vision en couleur. Ce fait fut découvert en 1877. Même aujourd'hui on peut dire que les pigments colorés des cônes n'ont jamais été obtenus en tube à essais. En 1958, on pouvait dire que les pigments colorés n'avaient jamais encore été vus. Mais depuis ce temps-là, deux d'entre eux ont été détectés par Rushton à l'aide d'une technique extrêmement simple et élégante.

La difficulté est, probablement, que puisque l'œil est si faiblement sensible à la lumière brillante en comparaison de la lumière de faible intensité, qu'il faut, pour voir, une grande quantité de pourpre visuel, mais qu'il faut beaucoup moins de pigments colorés pour voir les couleurs. L'idée de Rushton est de *laisser le pigment dans l'œil* et de le mesurer malgré tout. Ce qu'il a fait revient à ceci. Il existe un instrument appelé un ophtalmoscope pour envoyer la lumière dans l'œil au travers du cristallin et puis pour focaliser la lumière qui revient. On peut, avec cet appareil, mesurer quelle quantité

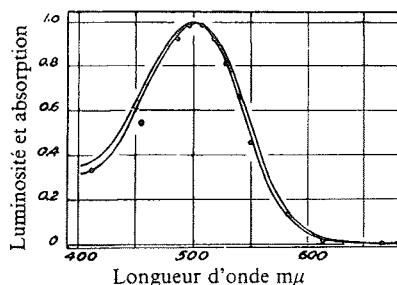


Fig. 35-9. La courbe de sensibilité de l'œil adapté à l'obscurité, en comparaison avec la courbe d'absorption du pourpre visuel.

de lumière est réfléchi. Ainsi on mesure le coefficient de réflexion de la lumière qui a traversé *deux fois* le pigment (réfléchi par une couche à l'arrière du globe oculaire, et passant au travers du pigment du cône une deuxième fois). La nature n'est pas toujours conçue aussi magnifiquement. Il est intéressant de remarquer que les cônes sont conçus de manière que la lumière qui entre dans le cône rebondit dans tous les sens et se fraye un chemin jusqu'aux petits points sensibles, aux sommets. La lumière descend directement vers le point sensible, rebondit au fond et ressort en ayant traversé une quantité considérable du pigment de la vision en couleur; de même en regardant la tache jaune, où il n'y a pas de bâtonnets, on ne risque pas de confusion avec le pourpre visuel. Mais la couleur de la rétine a été observée il y a longtemps: c'est une sorte de rose orangé; et puis il y a tous les vaisseaux sanguins et la couleur du fond de l'œil, etc. Comment savons-nous que nous observons le pigment? *Réponse*: nous prenons d'abord un daltonien qui a moins de pigments différents et pour lequel l'étude est plus facile à faire. Deuxièmement, les divers pigments tel que le pourpre visuel ont un changement d'intensité lorsqu'ils sont blanchis par la lumière; lorsque nous projetons de la lumière sur eux, ils modifient leurs concentrations. Ainsi, tandis qu'il observait le spectre d'absorption de l'œil, Rushton envoya *un autre* faisceau dans l'œil tout entier qui changeait la concentration du pigment et mesura la *variation* du spectre et la différence bien sûr, n'a rien à voir avec la quantité de sang ou la couleur des couches réfléchissantes, etc., mais est liée au seul pigment, et de cette manière Rushton obtint une courbe du pigment dans l'œil protanope, qui est donnée sur la Figure 35-10.

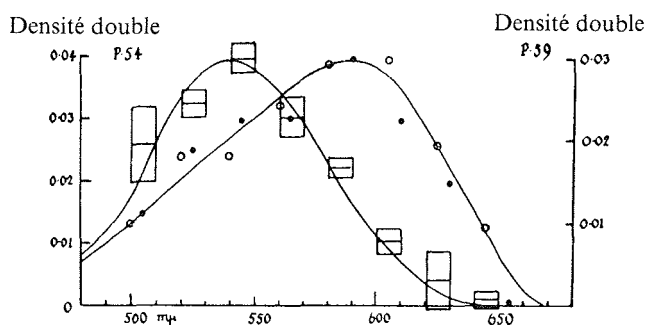


Fig. 35-10. Spectre d'absorption du pigment coloré de l'œil d'un daltonien protanope (carrés) et d'un œil normal (points).

La deuxième courbe de la Figure 35-10 est une courbe obtenue avec un œil normal. Elle fut obtenue en prenant un œil normal et, ayant déjà déterminé ce qu'était un pigment, en «blanchissant» l'autre dans le rouge où le premier est insensible. La lumière rouge n'a pas d'effet sur l'œil protanope, mais en a sur l'œil normal et ainsi on peut obtenir la courbe du pigment absent. La forme d'une des courbes s'adapte magnifiquement avec la courbe verte de Yustova, mais la courbe rouge est un petit peu déplacée. Ainsi, peut-être, sommes-nous sur la bonne voie. Ou peut-être pas – le dernier travail avec des deutéranopes ne semble pas montrer une absence définitive du pigment.

La couleur n'est pas une question liée à la physique de la lumière elle-même. La couleur est une *sensation* et la sensation de différentes couleurs est différente dans différentes circonstances. Par exemple, si nous avons une lumière rose, formée en superposant des faisceaux croisés de lumière

blanche et de lumière rouge (nous ne pouvons manifestement faire, que du rose avec du blanc et du rouge), nous pouvons montrer que la lumière blanche peut apparaître bleue. Si nous plaçons un objet dans les faisceaux, il projette deux ombres – l'une illuminée par la lumière blanche seule, et l'autre par le rouge. Pour la plupart des gens, l'ombre « blanche » d'un objet apparaît bleue, mais si nous continuons d'augmenter cette ombre jusqu'à ce qu'elle couvre l'écran tout entier, nous voyons que soudainement elle apparaît blanche et non bleue! Nous pouvons obtenir d'autres effets de même nature en mélangeant le rouge, le jaune et la lumière blanche. Les lumières rouge, jaune et la lumière orange ne peuvent produire que des jaune-orange, etc. Si donc nous mélangeons de telles lumières en quantité à peu près égales, nous n'obtenons que de la lumière orange. Néanmoins, en projetant différents types d'ombre dans cette lumière, avec différents recouvrements de couleurs, on obtient toute une série de belles couleurs qui ne se trouvent pas dans la lumière elle-même (elle n'est qu'orange), mais dans nos *sensations*. Manifestement nous *voyons* plusieurs couleurs différentes qui sont tout à fait différentes des couleurs « physiques » dans le faisceau. Il est très important de saisir qu'une rétine est déjà en train de « penser » la lumière; elle compare, bien que ce ne soit pas conscient, ce qu'elle voit dans une région, avec ce qu'elle voit dans une autre. Ce que nous savons sur la manière dont elle le fait est l'objet du chapitre suivant.

Mécanismes de la vision

36-1 La sensation de couleur

36-2 La physiologie de l'œil

36-3 Les cellules à bâtonnet

36-4 L'œil composé (insecte)

36-5 D'autres yeux

36-6 Neurologie de la vision

36-1 La sensation de couleur

En discutant le sens de la vision, il nous faut réaliser que (à l'extérieur d'une galerie d'art moderne!) nous ne voyons pas de taches de couleurs disposées au hasard ni de taches de lumière. Lorsqu'on regarde un objet, on voit un *homme* ou une *chose*; en d'autres termes, le cerveau interprète ce qu'il voit. Comment le fait-il, personne ne le sait et il le fait, bien sûr, à un très haut niveau. Bien que, évidemment, nous n'apprenions à reconnaître ce à quoi un homme ressemble qu'après beaucoup d'expériences, de nombreuses caractéristiques de la vision sont plus élémentaires, mais elles comportent également une combinaison d'informations venant des différentes régions de ce que nous voyons. Pour nous aider à comprendre comment nous interprétons une image entière, il vaut la peine d'étudier les étapes primitives du rassemblement de l'information venant de différentes cellules de la rétine. Dans le chapitre présent, nous concentrerons essentiellement notre attention sur cet aspect de la vision, bien que nous mentionnions également un certain nombre de questions annexes au fur et à mesure de notre progression.

Un exemple du fait que nous avons, à un niveau très élémentaire, une accumulation d'informations venant de différentes parties de l'œil en même temps, au-delà de notre contrôle volontaire ou de notre capacité d'apprendre, était cette ombre bleue qui était produite par la lumière blanche, lorsque de la lumière rouge et de la lumière blanche étaient simultanément envoyées sur le même écran. Cet effet implique au moins la connaissance que le fond de l'écran est rose, même si lorsque nous regardons l'ombre bleue, nous n'avons affaire qu'à de la lumière « blanche » se rendant en un point particulier de l'œil; quelque part, des parcelles d'information ont été rassemblées. Plus le contexte est complet et habituel, plus l'œil fera de corrections pour des particularités. En fait, Land a montré que si nous mélangeons ce bleu apparent et ce rouge dans des proportions diverses en utilisant deux diapositives avec absorption devant le rouge et le blanc en différentes proportions, cela peut représenter assez fidèlement une scène réelle avec des objets réels. Dans ce cas, nous obtenons également un ensemble de couleurs apparentes intermédiaires, analogue à ce que nous obtiendrions en mélangeant du rouge et du bleu-vert; il semble que ce soit un ensemble presque complet de couleurs, mais si nous les regardons avec beaucoup d'attention, elles ne sont pas aussi bonnes qu'il y paraît. Même ainsi, il est

surprenant de voir tout ce qu'on peut obtenir simplement à partir du rouge et du blanc. Plus la scène ressemble à une situation réelle, plus on est capable de compenser le fait que toute la lumière n'est en réalité pas autre chose que du rose!

Un autre exemple est l'apparition de «couleurs» dans un disque noir et blanc qui tourne, dont les surfaces blanches et noires sont comme indiqué sur la Figure 36-1. Lorsque le disque tourne, les alternances de lumière et d'obscurité sont exactement les mêmes à n'importe quel rayon; ce n'est que l'environnement qui est différent pour les deux types de «bandes». Cependant un des «anneaux» apparaîtra coloré selon une couleur et l'autre selon une autre*. Personne ne comprend encore la raison de ces couleurs, mais il est clair que l'information est rassemblée à un niveau extrêmement élémentaire, dans l'œil lui-même, le plus probablement.

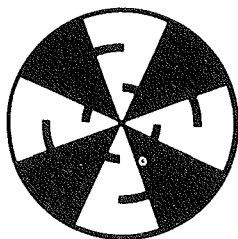


Fig. 36-1. Lorsqu'un disque comme celui-ci est mis en rotation, les couleurs n'apparaissent que dans un des deux «anneaux» sombres. Si la direction de rotation est retournée, les couleurs apparaissent dans l'autre anneau.

Pratiquement toutes les théories actuelles de la vision en couleur s'accordent pour dire que les données de mélanges de couleurs indiquent qu'il y a seulement trois pigments dans les cônes de l'œil, et que ce sont les absorptions spectrales dans ces trois pigments qui produisent fondamentalement la sensation de la couleur. Mais la sensation totale qui est associée avec les caractéristiques d'absorption des trois pigments agissant ensemble n'est pas nécessairement la somme des sensations séparées. Nous sommes tous d'accord pour dire que le jaune *ne* semble *pas* être du vert rougeâtre; en fait, cela peut causer une surprise énorme que de découvrir que la lumière est un mélange de couleurs, parce que probablement la sensation de lumière est due à un processus différent d'un simple mélange comme dans le cas d'un accord en musique, où les trois notes sont là en même temps et où si nous écoutons avec une grande attention nous pouvons entendre chacune d'elles individuellement. Nous ne pouvons pas regarder avec beaucoup d'attention et distinguer le rouge et le vert.

Les premières théories de la vision disaient qu'il y a trois pigments et trois types de cônes, chacun contenant un pigment; qu'un nerf part de chaque cône vers le cerveau, de telle sorte que les trois parcelles d'information sont transportées au cerveau; et puis que tout se passe dans le cerveau. Ceci, bien sûr, est une idée incomplète: il ne sert à rien de découvrir que l'information est transportée le long du nerf optique au cerveau, parce que nous n'avons même pas commencé de résoudre le problème. Nous devons nous poser des questions plus fondamentales: L'endroit où les informations sont rassemblées a-t-il une importance? Est-il important qu'elles soient transportées directement dans le cerveau par le nerf optique ou bien la rétine peut-elle faire d'abord un peu de mise en ordre? Nous avons vu une représentation de la rétine où il apparaissait que c'était une chose extrêmement compliquée avec beaucoup de connexions internes (Fig. 35-2) et où pouvaient déjà débiter quelques analyses.

* Les couleurs dépendent de la vitesse de rotation, de l'intensité de l'éclairement, et pour une part de la personne qui regarde les disques et du degré d'attention qu'elle y prête.

En fait les gens qui étudient l'anatomie et le développement de l'œil ont montré que la rétine est, en réalité, le cerveau: dans le développement de l'embryon, un morceau de cerveau sort vers l'avant et de longues fibres poussent vers l'arrière reliant les yeux au cerveau. La rétine est organisée exactement de la même manière que le cerveau et, comme quelqu'un l'a dit d'une manière très jolie, « Le cerveau a développé un moyen qui lui permet de regarder le monde ». L'œil est une partie du cerveau qui rencontre pour ainsi dire la lumière. Ainsi, il n'est pas du tout improbable qu'une partie de l'analyse de la couleur ait déjà été réalisée dans la rétine.

Ceci nous donne une possibilité extrêmement intéressante. Aucun des autres sens ne comporte une aussi grande quantité de calculs, pour ainsi dire, avant que le signal ne pénètre dans un nerf sur lequel on puisse faire des mesures. Les calculs pour tous les autres sens se passent d'habitude dans le cerveau, et il est très difficile de se rendre en des endroits particuliers du cerveau pour y faire des mesures parce qu'il y a trop d'interconnexions. Ici, avec la sensation visuelle, nous avons la lumière, trois couches de cellules opérant des calculs, et les résultats de ces calculs sont transmis par le nerf optique. Ainsi nous avons la première occasion d'observer physiologiquement comment, peut-être, les premières couches du cerveau fonctionnent dans leurs premières étapes. Cela présente donc un double intérêt, n'intéressant pas simplement la vision, mais intéressant l'ensemble de la physiologie.

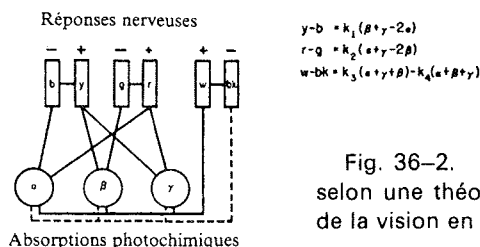


Fig. 36-2. Connexions nerveuses selon une théorie « d'effets opposés » de la vision en couleur.

Le fait qu'il y ait trois pigments ne signifie pas qu'il doive y avoir trois types de sensations. Une des autres théories de la vision en couleur dit qu'il y a en réalité des systèmes de couleurs opposées (Fig. 36-2). C'est-à-dire qu'une des fibres nerveuses transporte beaucoup d'impulsions si on voit du jaune, et moins que d'habitude pour le bleu. Une autre fibre nerveuse transporte des informations vert et rouge de la même manière, et une autre le blanc et le noir. En d'autres termes, dans cette théorie quelqu'un a déjà commencé de faire une hypothèse sur le système de connexions et sur la méthode de calcul.

Les problèmes que nous essayons de résoudre en faisant des hypothèses sur ces premiers calculs sont des questions sur les couleurs apparentes observées sur un fond rose, sur ce qui se passe lorsque l'œil est adapté à des couleurs différentes, et également sur ce que l'on appelle les phénomènes psychologiques. Les phénomènes psychologiques sont du genre suivant: le blanc n'est pas « ressenti » comme du rouge, du jaune et du bleu, et cette théorie fut proposée parce que les psychologues disent qu'il y a quatre couleurs apparemment pures: « Il y a quatre stimuli qui ont une capacité remarquable d'évoquer psychologiquement, respectivement les teintes bleu, jaune, vert et rouge. A la différence de la terre de sienne, du magenta, du pourpre ou de la plupart des couleurs séparables, ces couleurs simples ne sont pas mélangées en ce sens

qu'aucune ne participe à la nature des autres; précisément le bleu n'est pas jaunâtre, rougeâtre ou verdâtre, etc.; ce sont psychologiquement des teintes primaires.» C'est ce qu'on appelle un fait psychologique. Pour trouver à partir de quelle expérience ce fait psychologique fut établi, nous devons chercher avec beaucoup d'attention dans toute la littérature. Dans la littérature moderne nous ne trouvons sur le sujet que des répétitions de la même affirmation, ou d'un énoncé d'un psychologue allemand, qui se réfère, comme à une de ses autorités, à Léonard de Vinci, qui, bien sûr, nous le savons tous, était un grand artiste. Il dit, « Léonard pensait qu'il y avait cinq couleurs ». Puis cherchant encore, nous trouvons dans un livre plus ancien une indication sur le sujet. Le livre dit quelque chose comme ceci: « Le pourpre est bleu rougeâtre, l'orange est jaune rougeâtre, mais le rouge peut-il être orange-pourpre? Le rouge et le jaune ne sont-ils pas davantage primaires que le pourpre et l'orange? Une personne quelconque à qui on pose la question de définir quelles sont les couleurs qui sont primaires nomme le rouge, le jaune et le bleu, et certains observateurs en ajoutent une quatrième, le vert. Les psychologues sont habitués à accepter les quatre comme étant des couleurs importantes.» Voilà donc quel est l'état actuel de l'analyse psychologique de ce problème: si tout le monde dit qu'il y en a trois et quelqu'un dit qu'il y en a quatre et qu'ils veulent qu'il y en ait quatre, il y en aura quatre. Cela montre les difficultés liées aux recherches psychologiques. Il est clair que nous avons ce genre d'intuition, mais il est très difficile d'obtenir beaucoup de précision là-dessus.

Ainsi l'autre direction qu'il faut suivre est la direction physiologique; cela consiste à trouver expérimentalement ce qui se passe effectivement dans le cerveau, dans l'œil, la rétine ou ailleurs, et peut-être à découvrir que certaines combinaisons d'impulsions venant de diverses cellules se propagent le long de certaines fibres nerveuses. Incidemment, il n'est pas nécessaire que les pigments primaires se trouvent dans des cellules séparées; il peut y avoir des cellules dans lesquelles se trouvent des mélanges des divers pigments, des cellules avec des pigments rouges et verts, des cellules avec tous les trois (l'information venant de toutes les trois est alors une information blanche), etc. Il y a plusieurs manières d'aménager le système et il nous faut trouver quelle manière la nature a choisi. Nous espérons en définitive que lorsque nous comprendrons les relations physiologiques, nous comprendrons un peu mieux certains des aspects de la psychologie, aussi regardons dans cette direction.

36-2 La physiologie de l'œil

Nous commencerons par parler non seulement de la vision en couleur, mais de la vision en général, simplement pour nous rappeler les interconnexions au sein de la rétine, et qui sont indiquées sur la Figure 35-2. La rétine est, en fait, semblable à la surface du cerveau. Bien que l'image effective, vue au travers d'un microscope, soit un petit peu plus compliquée que ce dessin quelque peu schématisé, par une analyse soignée on peut voir toutes ces interconnexions. Il n'y a pas de doute sur le fait que toute partie de la rétine est reliée à d'autres parties et que l'information qui en sort portée sur les longs axones, qui forment le nerf optique, sont des combinaisons de l'information venant de nombreuses cellules. Il y a trois couches de cellules avec une succession de fonctions: il y a les cellules de la rétine, qui sont celles que la lumière impressionne, une cellule intermédiaire qui prend l'information venant d'une seule ou de quelques cellules de la rétine et qui la transfère à nouveau à diverses cellules d'une troisième couche et qui la transporte au cerveau. Il y a toutes sortes de liaisons croisées entre les cellules d'une même couche.

Nous en arrivons maintenant à certains aspects de la structure et des performances de l'œil (voir Fig. 35-1). La focalisation de la lumière est accomplie essentiellement par la cornée, par le fait qu'elle a une surface courbe qui « dévie » la lumière. C'est pourquoi nous ne pouvons voir clairement sous l'eau, parce qu'alors la différence entre l'indice de la cornée, qui est 1,37, et celui de l'eau qui est 1,33, est insuffisante. Derrière la cornée il y a de l'eau, avec pratiquement un indice de 1,33 et derrière encore se trouve une lentille de structure extrêmement intéressante: c'est une série de couches empilées comme dans un oignon, à ceci près qu'elle est entièrement transparente et qu'elle a un indice de 1,40 au centre et de 1,38 à l'extérieur. (Ce serait pratique de pouvoir fabriquer un verre optique dans lequel nous pourrions ajuster l'indice en tout point, car alors nous n'aurions pas à le courber autant que nous le faisons lorsque nous avons un indice uniforme.) De plus, la forme de la cornée n'est pas celle d'une sphère. Une lentille sphérique est toujours affligée d'aberration sphérique. La cornée est plus « plate » à l'extérieur que ne l'est une sphère, de telle sorte que les aberrations sphériques sont plus faibles pour la cornée qu'elles ne le seraient pour une lentille sphérique placée en cet endroit. La lumière est focalisée sur la rétine par le système lentille-cornée. Lorsque nous regardons des objets qui sont plus ou moins éloignés, la lentille se resserre ou se détend et modifie le foyer pour s'adapter aux distances différentes. Pour ajuster la quantité totale de lumière, il y a l'iris qui est ce que nous appelons la couleur de l'œil, un œil brun ou bleu, selon la personne; lorsque la quantité de lumière augmente et diminue, l'iris se referme et s'écarte.

Considérons maintenant le mécanisme nerveux pour contrôler l'accommodation de la lentille, le mouvement de l'œil, les muscles qui tournent l'œil dans sa cavité et l'iris, montrés schématiquement sur la Figure 36-3. De toutes les informations qui sortent du nerf optique *A*, la grande majorité divisée en deux paquets (dont nous reparlerons plus tard) est ensuite envoyée au cerveau. Mais il y a quelques fibres, qui vont vous intéresser maintenant, qui ne vont pas directement au cortex visuel du cerveau où nous « voyons » les images, mais qui vont dans le cerveau intermédiaire *H*. Ce sont les fibres qui mesurent la lumière moyenne et réalisent l'ajustement de l'iris; ou si l'image paraît floue, elles essayent de corriger la lentille, ou s'il y a une double image elles essayent d'ajuster l'œil à la vision binoculaire. En tous les cas, elles vont vers le cerveau intermédiaire et reviennent dans l'œil. En *K* il y a les muscles qui commandent l'accommodation de la lentille et en *L* un autre qui pénètre dans l'iris. L'iris dispose de deux systèmes musculaires. L'un est un muscle circulaire *L*, qui lorsqu'il est excité, se contracte et ferme l'iris; il agit très rapidement et les nerfs sont directement reliés au cerveau par le biais d'axones courts allant jusque dans l'iris. Les muscles opposés sont des muscles radiaux, de telle sorte que lorsque l'extérieur devient sombre et que le muscle circulaire se détend, ces muscles radiaux tirent dans l'autre sens. Nous avons ici, comme dans de nombreux endroits dans le corps, un ensemble de muscles qui fonctionnent dans des directions opposées et dans chacun de ces cas, le système nerveux qui contrôle les deux est très délicatement ajusté, de telle sorte que lorsque des signaux sont envoyés afin de raidir le premier, des signaux sont automatiquement envoyés pour détendre l'autre. L'iris est une exception particulière: les nerfs qui font se contracter l'iris sont ceux que nous avons déjà décrits, mais les nerfs qui font se dilater l'iris sortent d'un endroit que personne ne connaît exactement, descendent dans la moelle dans le dos, atteignent les sections thoraciques, sortent de la moelle, passent par les ganglions du cou et retournent vers la tête afin de faire fonctionner l'autre extrémité de l'iris.

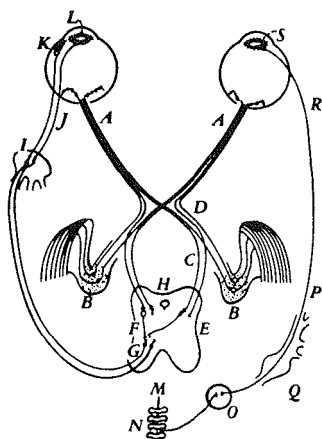


Fig. 36-3. Les connexions nerveuses pour le fonctionnement mécanique des yeux.

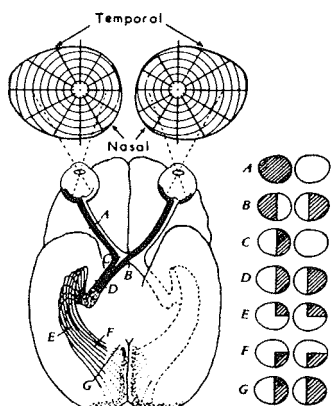


Fig. 36-4. Les connexions nerveuses entre les yeux et le cortex visuel.

En fait, le signal passe au travers d'un système nerveux complètement différent, qui n'est pas du tout le système nerveux central, mais le système nerveux sympathique, c'est donc une manière très étrange de faire fonctionner le système.

Nous avons déjà insisté sur une autre chose étrange à propos de l'œil, qui est que les cellules sensibles à la lumière sont du mauvais côté, de sorte que la lumière doit traverser de nombreuses couches d'autres cellules avant qu'elle n'atteigne ces récepteurs – elle est construite avec le dedans à l'extérieur! Ainsi certaines caractéristiques sont splendides et d'autres sont en apparence stupides.

La Figure 36-4 montre les connexions de l'œil avec la partie du cerveau qui est la plus directement concernée par le processus visuel. Les fibres du nerf optique pénètrent dans une certaine région, juste en dessous de *D*, appelée le géniculate latéral, d'où elles sortent vers une section de cerveau appelée le cortex visuel. Remarquez que certaines des fibres venant de chaque œil sont envoyées de l'autre côté du cerveau, en sorte que le dessin donné est incomplet. Les nerfs optiques du côté gauche de l'œil droit passent au travers du chiasme optique *B*, tandis que ceux du côté gauche de l'œil gauche passent à côté et se déplacent de la même manière. Ainsi la partie gauche du cerveau reçoit toutes les informations qui viennent du côté gauche des globes de chaque œil, c'est-à-dire concernant le côté droit du champ visuel, tandis que le côté droit du cerveau voit le côté gauche du champ visuel. C'est ainsi que l'information de chacun des deux yeux est rassemblée afin de pouvoir dire à quelle distance se trouvent les objets. C'est le système de vision binoculaire.

Les connexions entre la rétine et le cortex visuel sont intéressantes. Si une zone de la rétine est enlevée ou détruite d'une manière ou d'une autre, alors toute la fibre va mourir, et nous pouvons donc trouver avec quelle zone elle est reliée. Il apparaît que les connexions sont avant tout biunivoques – chaque région de la rétine correspond à une région dans le cortex visuel – et les régions qui sont très proches sur la rétine sont très proches dans le cortex visuel. Ainsi le cortex visuel reproduit encore la disposition spatiale

des bâtonnets et des cônes, mais, bien entendu, très déformée. Les images qui sont au centre du champ, qui occupent une très petite partie de la rétine, sont étalées sur de très nombreuses cellules dans le cortex visuel. Il est clair qu'il est utile de conserver proches des choses qui sont initialement proches. L'aspect le plus remarquable est cependant le suivant. L'endroit où l'on penserait qu'il soit le plus important d'obtenir des choses proches les unes des autres se trouve exactement au milieu du champ visuel. Croyez-le ou non, la droite verticale au centre de notre champ visuel est telle que l'information de tous les points du côté droit de cette droite va du côté gauche du cerveau et l'information des points du côté gauche va dans le côté droit du cerveau; cette surface est construite avec une coupure exactement en son milieu, en sorte que les choses qui sont très proches l'une de l'autre au centre, sont très éloignées dans le cerveau! D'une manière ou d'une autre, l'information doit aller d'un côté du cerveau à l'autre par l'intermédiaire d'autres canaux, ce qui est tout à fait surprenant.

La question de savoir comment ce réseau s'est «établi» est également très intéressante. Le problème de savoir quelle partie est déjà formée et quelle partie est «apprise» est un vieux problème. Anciennement, on pensait qu'il n'était peut-être pas nécessaire qu'une partie soit déjà établie dans le détail, qu'il suffisait qu'elle soit grossièrement bâtie, puis que par expérience le jeune enfant apprenait que lorsqu'une chose est «là-haut» elle produit certaines sensations dans le cerveau. (Les docteurs nous disent toujours ce que «ressent» le jeune enfant, mais comment savent-ils ce que ressent un enfant à l'âge d'un an?) L'enfant à l'âge d'un an, voit, par exemple, qu'un objet est «là-haut», subit une certaine sensation et apprend à atteindre «cet endroit», parce que lorsqu'il atteint «un autre endroit», cela ne va pas. Cette approche n'est probablement pas correcte, parce que nous voyons que dans de nombreux cas existent déjà des interconnexions détaillées particulières. Plus éclairantes sont certaines expériences extrêmement remarquables réalisées avec une salamandre. (Incidentement, avec la salamandre, il y a connexion croisée directe, sans le chiasme optique, parce que les yeux sont de chaque côté de la tête et n'ont pas de zones d'observation communes. Les salamandres n'ont pas de vision binoculaire.) L'expérience est celle-ci. Nous pouvons couper le nerf optique d'une salamandre et le nerf va repousser à partir des yeux. Des milliers et des milliers de fibres nerveuses vont donc se rétablir elles-mêmes. Dans le nerf optique, les fibres ne restent pas adjacentes l'une à l'autre – cela ressemble à un grand câble de téléphone mal fait, toutes les fibres tournant et se tordant, mais lorsque le nerf atteint le cerveau tout se remet en place correctement. Lorsque nous coupons le nerf optique de la salamandre, la question intéressante est de savoir si cela va s'arranger? La réponse remarquable est oui. Si nous coupons le nerf optique de la salamandre et qu'il repousse, la salamandre retrouve une bonne acuité visuelle. Cependant, si nous coupons le nerf optique et que nous *tournons l'œil vers le bas* et que nous le laissons pousser à nouveau, elle retrouve une bonne acuité visuelle mais avec une terrible erreur: lorsque la salamandre voit une mouche «là-haut», elle saute «vers le bas» et n'apprend jamais à se corriger. Il y a donc certaines manières mystérieuses selon lesquelles des milliers et des milliers de fibres trouvent leurs places correctes dans le cerveau.

Ce problème de savoir ce qui est déjà établi et ce qui ne l'est pas, est un important problème dans la théorie du développement des créatures. La réponse n'est pas connue, mais on est en train de l'étudier avec intensité.

La même expérience dans le cas d'un poisson rouge montre qu'il y a un terrible nœud, comme une grande cicatrice ou une complication, dans le nerf optique à l'endroit où on le coupe, mais malgré cela les fibres repoussent jusqu'à leurs places initiales dans le cerveau.

Pour le faire, elles doivent prendre plusieurs décisions sur la direction suivant laquelle elles doivent pousser lorsqu'elles repoussent dans les vieux canaux du nerf optique. Comment opèrent-elles? Il semble qu'il y ait des guides chimiques auxquels différentes fibres répondent différemment. Pensez au nombre énorme de fibres qui poussent, chacune est particulière et diffère d'une certaine manière de ses voisines; en répondant à n'importe quelle sorte de guide chimique, elle répond d'une manière suffisamment unique pour trouver sa propre place permettant d'établir en définitive la connexion avec le cerveau! Ceci est une chose intéressante, une chose fantastique. C'est un des grands phénomènes récemment découvert de la biologie et il est sans aucun doute relié à beaucoup d'autres problèmes non résolus de croissance, d'organisation et de développement des organismes et particulièrement des embryons.

Un autre phénomène intéressant est lié au mouvement de l'œil. Les yeux doivent se déplacer afin de faire se coïncider les deux images dans divers cas. Ces mouvements sont de types différents: l'un consiste à suivre quelque chose, ce qui nécessite que les deux yeux doivent aller dans la même direction, à droite ou à gauche, et l'autre est de les pointer au même endroit à différentes distances, ce qui nécessite qu'ils doivent se déplacer en sens opposé. Les nerfs pénétrant dans les muscles des yeux sont déjà structurés pour de tels buts. Il y a un ensemble de nerfs qui tirent les muscles à l'intérieur d'un œil et à l'extérieur de l'autre, et relâchent les muscles opposés, de telle sorte que les deux yeux se déplacent ensemble. Il existe un autre centre où une excitation fait s'écarter les yeux de la parallèle et les fait se déplacer l'un vers l'autre. Chaque œil peut tourner vers l'extérieur lorsque l'autre œil se déplace vers le nez, mais il est impossible consciemment ou inconsciemment de tourner en même temps les deux yeux vers l'extérieur non pas parce qu'il n'y a pas de *muscles*, mais parce qu'il n'y a aucune manière d'envoyer un signal qui fasse tourner les deux yeux vers l'extérieur, sauf si nous avons subi un accident ou qu'il y ait quelque chose d'anormal, par exemple un nerf qui ait été coupé. Bien que les muscles d'un œil puissent certainement faire bouger cet œil dans toutes les directions, même un Yoga n'est pas capable de déplacer les *deux* yeux librement vers l'extérieur, sous contrôle volontaire, parce qu'il semble qu'il n'y ait aucune manière de le réaliser. Nous sommes déjà structurés à un certain degré. C'est un point important, parce que la plupart des premiers livres sur l'anatomie et la psychologie, etc., ne réalisaient pas ou n'insistaient pas sur le fait que nous sommes déjà si complètement structurés – ils disaient que tout n'est qu'appris.

36-3 Les cellules à bâtonnet

Examinons maintenant plus en détail ce qui se passe dans les cellules à bâtonnet. La Figure 36-5 montre une microphotographie électronique du milieu d'une cellule à bâtonnet (la cellule à bâtonnet se prolonge hors de l'image). On y trouve des successions de couches de structures planes, montrées agrandies à droite, qui contiennent la substance appelée rhodopsine (pourpre visuel), le colorant ou le pigment qui produit les effets de la vision dans les bâtonnets. La rhodopsine, qui est le pigment, est une grande protéine qui contient un groupe spécial, appelé rétinène, qui peut être extrait de la protéine et qui est, sans aucun doute, la cause principale de

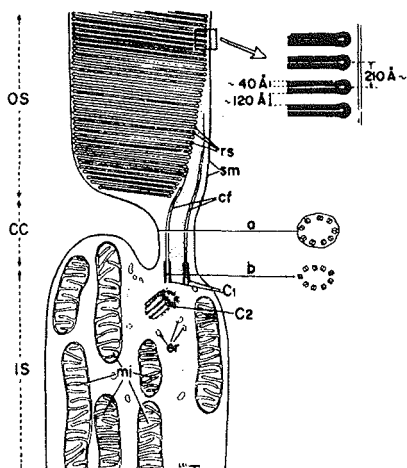


Fig. 36-5. Micrographie électronique d'une cellule à bâtonnet.

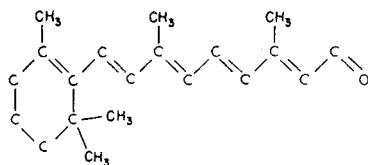


Fig. 36-6. La structure du rétinène.

l'absorption de la lumière. Nous ne comprenons pas la raison de ces plans, mais il est très probable qu'il y a une certaine raison de maintenir toutes ces molécules de rhodopsine parallèles. L'aspect chimique de cette structure a été étudié assez complètement, mais il peut y avoir aussi un certain aspect physique. Il peut se faire que toutes les molécules soient disposées en une sorte de ligne, en sorte que lorsque l'une est excitée, un électron qui est par exemple créé, peut se propager tout le long afin de faire sortir le signal, ou quelque chose de ce genre. Ce sujet est très important et n'a pas encore été élucidé. C'est un domaine dans lequel à la fois la biochimie et la physique de l'état solide, ou quelque chose de ce genre seront en définitive utilisés.

Ce type de structure, avec des couches, apparaît dans d'autres cas où la lumière est importante, par exemple dans les chloroplastes des plantes, où la lumière provoque la photosynthèse. Si nous les agrandissons, nous trouvons la même chose avec presque pratiquement le même type de couches, mais là, bien sûr, nous avons la chlorophylle à la place du rétinène. La structure chimique du rétinène est indiquée sur la Figure 36-6. Elle possède une série de doubles liaisons alternées le long de la chaîne latérale, qui est une caractéristique de pratiquement toutes les substances organiques qui absorbent fortement, telles que la chlorophylle, le sang etc. Il est impossible, pour les êtres humains, de fabriquer cette substance dans leurs propres cellules – il nous faut la manger. Aussi nous la mangeons sous la forme d'une substance particulière, qui est exactement la même que la rétinène à l'exception d'un hydrogène lié à l'extrémité droite; on l'appelle vitamine A, et si nous n'en avalons pas assez, nous n'avons pas assez de rétinène et nous sommes atteints de ce que nous appelons *cécité nocturne*, parce qu'il n'y a pas alors suffisamment de pigment dans la rhodopsine pour voir de nuit avec les bâtonnets.

La raison pour laquelle une telle série de doubles liaisons absorbe très fortement la lumière est également connue. Nous donnerons simplement une indication: la série alternée de doubles liaisons est appelée une double liaison *conjuguée*; une double liaison signifie qu'il y a un électron en plus et que cet électron en excès est facilement déplacé vers la droite ou vers la gauche. Lorsque la lumière frappe cette molécule, l'électron de chaque double liaison est déplacé sur une liaison. Les électrons dans toute la chaîne se déplacent, comme une file de dominos tombant les uns après les autres et

bien que chacun ne se déplace que sur une petite distance (cela est normal, car dans un simple atome, nous ne pouvons déplacer l'électron que sur une petite distance), l'effet résultant est le même que si le premier à une extrémité était transporté jusqu'à l'autre extrémité! C'est la même chose que si un électron se déplaçait sur toute la distance en va-et-vient, et ainsi nous obtenons une absorption beaucoup plus forte sous l'influence du champ électrique que si nous ne pouvions déplacer les électrons que sur une distance associée à un atome. Ainsi, puisqu'il est facile de faire osciller les électrons, le rétinène absorbe la lumière très fortement; c'est le mécanisme de sa fonction physico-chimique.

36-4 L'œil composé (insecte)

Revenons maintenant à la biologie. L'œil humain n'est pas le seul type d'œil. Dans les vertébrés, presque tous les yeux sont essentiellement semblables à l'œil humain. Cependant, chez les animaux inférieurs, il y a beaucoup d'autres types d'yeux: des yeux en taches, divers yeux en coupes et d'autres yeux moins sensibles, que nous n'avons pas le temps de décrire. Mais il y a un autre œil extrêmement développé chez les invertébrés, l'œil *composé* de l'insecte. (La plupart des insectes ayant de grands yeux composés possèdent également divers yeux plus simples.) L'abeille est un insecte dont la vision a été étudiée avec beaucoup d'attention. Il est facile d'étudier les propriétés de la vision des abeilles, parce qu'elles sont attirées par le miel, et nous pouvons faire des expériences dans lesquelles nous identifions le miel en le plaçant sur du papier bleu ou du papier rouge, et voir vers lequel elles vont. On a découvert par cette méthode des choses très intéressantes sur la vision des abeilles.

En premier lieu, en essayant de mesurer avec quel degré de précision les abeilles peuvent voir la différence de couleur entre deux morceaux de papier «blanc», certains chercheurs ont trouvé qu'elles ne réussissaient pas bien et d'autres ont trouvé que c'étaient fantastiquement bon. Même lorsque les deux morceaux de papier étaient presque exactement les mêmes, les abeilles pouvaient encore faire la différence. Les expérimentateurs utilisaient du blanc de zinc pour un papier et du blanc de plomb pour l'autre, et bien que ces deux blancs nous apparaissent identiques, l'abeille pouvait facilement les distinguer, parce qu'ils réfléchissaient différemment dans l'ultra-violet. On découvrit ainsi que l'œil de l'abeille est sensible sur un plus grand domaine spectral que le nôtre. Notre œil fonctionne entre 7.000 Angströms et 4.000 Angströms, du rouge au violet, mais l'abeille peut voir jusqu'à 3.000 Angströms dans l'ultra-violet! Ceci rend compte d'un grand nombre d'effets différents et intéressants. En premier lieu, les abeilles peuvent distinguer de nombreuses fleurs qui nous paraissent semblables. Bien sûr, nous devons réaliser que les couleurs des fleurs ne sont pas conçues pour *notre* œil, mais pour celui de l'abeille; ce sont des signaux pour attirer les abeilles vers une fleur particulière. Nous savons tous qu'il y a de nombreuses fleurs «blanches». Le blanc apparemment n'est pas très intéressant pour les abeilles, parce qu'il se trouve que chaque fleur blanche réfléchit l'*ultra-violet* dans des proportions différentes; elles ne réfléchissent pas à cent pour cent dans l'ultra-violet comme le ferait un véritable blanc. Toute la lumière n'est pas renvoyée, l'ultra-violet manque, et c'est une couleur, comme pour nous, lorsque le bleu manque, on voit du jaune. Ainsi pour les abeilles, toutes les fleurs sont colorées. Cependant nous savons également que le rouge ne peut pas être vu par les abeilles. Ainsi nous pouvons nous attendre à ce que pour les abeilles les fleurs rouges semblent noires. Non pas! Une étude précise des fleurs rouges montre, premièrement, que même avec notre propre œil nous pouvons voir que la grande majorité de fleurs rouges ont une teinte bleuâtre

parce qu'elles réfléchissent une quantité supplémentaire de bleu, domaine dans lequel les abeilles voient. De plus, les expériences montrent également que les fleurs n'ont pas la même réflexion ultra-violette sur les différentes parties des pétales, etc. Si donc nous pouvions voir les fleurs comme les abeilles les voient, elles nous sembleraient encore plus belles et plus variées!

On a montré cependant qu'il y a un petit nombre de fleurs rouges qui *ne* réfléchissent pas dans le bleu ou l'ultra-violet et *doivent* donc apparaître noires aux abeilles! Ceci posait une question aux personnes qui se préoccupaient de ces problèmes, car le noir ne ressemble pas à une couleur intéressante, puisqu'il est difficile de le distinguer d'une ombre terne. Il apparaît en réalité que ces fleurs *ne* sont pas visitées par les abeilles, ce sont ces fleurs qui sont visitées par des *oiseaux-mouches*, et les oiseaux-mouches *peuvent* voir dans le rouge!

Un autre aspect intéressant de la vision de l'abeille est que l'abeille peut apparemment donner la direction du soleil en regardant un coin de ciel bleu sans voir le soleil lui-même. Nous ne pouvons aisément le faire. Lorsque nous regardons le ciel par la fenêtre et que nous voyons qu'il est bleu, dans quelle direction se trouve le soleil? L'abeille peut le savoir, parce que l'abeille est sensible à la *polarisation* de la lumière et la lumière diffusée du ciel est polarisée*. On discute toujours pour savoir à quoi est due cette sensibilité. Est-ce dû aux réflexions de la lumière qui sont différentes dans des conditions différentes, ou est-ce l'œil de l'abeille qui est directement sensible? Cela n'est pas encore connu**.

On dit également que l'abeille peut remarquer des battements d'ailes jusqu'à 200 périodes par seconde, tandis que nous en voyons au maximum jusqu'à 20. Le mouvement des abeilles dans les ruches est très rapide; les pieds se déplacent, les ailes vibrent, mais il nous est très difficile de distinguer ces mouvements avec notre œil. Cependant, si nous pouvions voir plus rapidement, nous serions capables de voir le mouvement. Il est probablement très important pour l'abeille que son œil ait une réponse aussi rapide.

Parlons maintenant de l'acuité visuelle que nous pouvons espérer pour une abeille. L'œil d'une abeille est un œil composé, et il est constitué d'un grand nombre de cellules spéciales appelées *ommatidia*, qui sont disposées coniquement sur la surface d'une sphère (approximativement) à l'extérieur de la tête de l'abeille. La Figure 36-7 donne un dessin d'un tel ommatidium. Au sommet il y a une surface transparente, une sorte de «lentille», mais en réalité cela ressemble plus à un filtre ou à un guide de lumière qui fait descendre la lumière vers la fibre étroite qui est l'endroit où probablement se produit l'absorption. À l'autre extrémité de celle-ci sort la fibre nerveuse. La fibre centrale est entourée sur ses côtés par six cellules qui, en fait, ont sécrété la fibre. C'est une description suffisante pour notre propos; il faut noter que sa structure est conique, et que l'on peut en mettre beaucoup à côté l'un de l'autre pour couvrir toute la surface de l'œil de l'abeille.

Examinons maintenant la résolution de l'œil de l'abeille. Si nous traçons des droites (Fig. 36-8) pour représenter les ommatidia sur la surface, que nous supposons être une sphère

* L'œil humain est également légèrement sensible à la polarisation de la lumière, et on *peut* apprendre à trouver la direction du soleil! Le phénomène en jeu ici est appelé la *brosse de Haidinger*; c'est une structure faible jaunâtre semblable à un sablier que l'on voit au centre du champ visuel lorsqu'on regarde un espace vide en utilisant des verres polarisants. On peut également le voir dans le ciel bleu sans verres polarisants lorsqu'on tourne la tête de part et d'autre autour de l'axe de vision.

** Des preuves obtenues, depuis que cette leçon fut donnée, indiquent que l'œil est directement sensible.



Fig. 36-8. Vue schématique de l'assemblage des ommatidia dans l'œil d'une abeille.

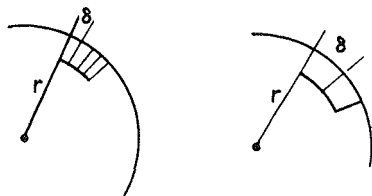


Fig. 36-7. La structure d'un ommatidium (une cellule isolée d'un œil à facettes).

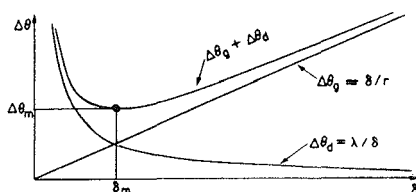


Fig. 36-9. La dimension optimum d'un ommatidium est δ_m .

de rayon r , nous pouvons effectivement *calculer* la largeur de chaque ommatidia en faisant appel à notre intelligence et en supposant que l'évolution soit aussi intelligente que nous! Si l'ommatidium est très large, nous n'avons pas beaucoup de résolution. C'est-à-dire qu'une cellule reçoit une parcelle d'information venant d'une direction et la cellule adjacente reçoit une parcelle d'information venant d'une autre direction, etc., et l'abeille ne peut pas distinguer nettement les objets situés entre ces deux directions. Ainsi l'incertitude de l'acuité visuelle dans l'œil doit certainement correspondre à un certain angle, l'angle que fait l'extrémité de l'ommatidia par rapport au centre de courbure de l'œil. (Les cellules de l'œil n'existent bien sûr qu'à la surface de la sphère; à l'intérieur se trouve la tête de l'abeille.) Cet angle, d'un ommatidium au suivant, est égal bien sûr au diamètre de l'ommatidium divisé par le rayon de la surface de l'œil:

$$\Delta\theta_g = \delta/r. \quad (36.1)$$

Ainsi, nous pouvons dire, « Plus δ est petit, davantage nous augmentons l'acuité visuelle. Ainsi pourquoi l'abeille n'utilise-t-elle pas simplement des ommatidia extrêmement fins? Réponse: Nous savons suffisamment de physique pour réaliser que si nous essayons de faire descendre la lumière le long d'un conduit étroit, nous ne pouvons pas voir avec précision dans une direction donnée à cause de l'effet de diffraction. La lumière qui vient de différentes directions peut entrer et, à cause de la diffraction, nous

recevons de la lumière qui entre sous un angle $\Delta\theta_a$ tel que

$$\Delta\theta_a = \lambda/\delta. \quad (36.2)$$

Maintenant nous voyons que si nous rendons δ trop petit, chaque ommatidium ne regarde plus dans une seule direction à cause de la diffraction! Si nous les rendons trop grands, chacun voit dans une direction définie, mais il n'y en a pas assez pour obtenir une bonne vue de la scène. Nous ajustons donc la distance d afin de rendre minimum l'effet résultant. Si nous additionnons les deux termes et cherchons la valeur qui rend la somme minimum (Fig. 36-9), nous trouvons que

$$\frac{d(\Delta\theta_a + \Delta\theta_d)}{d\delta} = 0 = \frac{1}{r} - \frac{\lambda}{\delta^2}, \quad (36.3)$$

qui nous donne une distance

$$\delta = \sqrt{\lambda r}, \quad (36.4)$$

Si nous supposons que r vaut environ 3 millimètres, que la lumière vue par l'abeille est de 4.000 Angströms, si nous rassemblons ces deux données et prenons la racine carrée, nous trouvons

$$\begin{aligned} \delta &= (3 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{-7})^{1/2} \text{ m} \\ &= 3.5 \times 10^{-5} \text{ m} = 35 \mu. \end{aligned} \quad (36.5)$$

Le livre dit que le diamètre est 30μ , c'est donc plutôt un bon accord! Ainsi, en apparence, cela marche vraiment, et nous pouvons comprendre ce qui détermine la taille de l'œil de l'abeille! Il est également facile de réintroduire le nombre ci-dessus dans nos calculs et de trouver quelle est la résolution angulaire de l'œil de l'abeille; elle est très faible en comparaison de celle de notre œil. Nous pouvons voir des objets qui sont trente fois plus petits en taille apparente que ceux que voit l'abeille; l'abeille perçoit une image plus brouillée et moins focalisée que ce que nous pouvons voir. Néanmoins, ça va bien et c'est le mieux qu'elles puissent faire. Nous pouvons nous demander pourquoi les abeilles ne mettent pas au point un œil de qualité comme le nôtre, avec une lentille, etc. Il y a plusieurs raisons intéressantes. En premier lieu, l'abeille est trop petite; si elle avait un œil comme le nôtre, mais à son échelle, l'ouverture serait environ de 30μ de diamètre et la diffraction serait si importante qu'elle ne serait pas non plus capable de bien voir. L'œil n'est pas bon s'il est trop petit. Deuxièmement, s'il était aussi gros que la tête de l'abeille, l'œil occuperait toute la tête de l'abeille. La beauté de l'œil composé est qu'il ne prend pas trop de place, il n'occupe qu'une très fine couche à la surface de l'abeille. Ainsi lorsque nous affirmons qu'elles auraient dû faire comme nous, nous devons nous souvenir qu'elles ont leurs propres problèmes!

36-5 D'autres yeux

En plus des abeilles, beaucoup d'autres animaux peuvent voir en couleur. Les poissons, les papillons, les oiseaux, les reptiles peuvent voir en couleur, mais on considère que la plupart des mammifères ne le peuvent pas. Les primates peuvent voir en couleur. Les oiseaux voient certainement en couleur et ceci rend compte des couleurs des oiseaux. Il n'y aurait aucune raison d'avoir des mâles si brillamment colorés si les femelles ne pouvaient les remarquer! C'est-à-dire, l'évolution de « ce quelque chose » du sexe

que possèdent les oiseaux est un résultat du fait que la femelle est capable de voir en couleur. Ainsi la prochaine fois que nous regarderons un paon et que nous admirerons la manifestation brillante des couleurs somptueuses, la délicatesse de ses teintes et le sens esthétique magnifique qu'il faut pour apprécier tout cela, nous ne féliciterons pas le paon, mais devons complimenter l'acuité visuelle et le sens esthétique de la paonne, parce que c'est elle qui a provoqué cette scène magnifique!

Tous les invertébrés ont des yeux peu développés ou des yeux composés, mais tous les vertébrés ont des yeux très semblables aux nôtres à une exception près. Si nous considérons l'espèce animale la plus avancée, nous disons habituellement « C'est nous », mais si nous prenons un point de vue davantage dépourvu de préjugés et que nous nous limitons aux invertébrés, de telle sorte que nous ne puissions pas nous y inclure et si nous demandons quel est l'animal invertébré le plus avancé, la plupart des zoologistes sont d'accord sur le fait que c'est la *pieuvre*! Il est extrêmement intéressant de remarquer, en plus du développement de son cerveau et de ses réactions, etc., qui sont plutôt bonnes pour un invertébré, qu'elle a également développé indépendamment un œil différent. Ce n'est pas un œil composé ou un œil superficiel – il possède une cornée, des paupières, un iris, une lentille, deux domaines remplis d'eau et une rétine à l'arrière. C'est essentiellement le même œil que celui des vertébrés! C'est un remarquable exemple d'une coïncidence dans l'évolution où la nature a deux fois découvert la même solution à un problème, avec une légère amélioration. Dans l'octopus, il apparaît également, d'une manière surprenante, que la rétine est une partie du cerveau qui est apparue de la même manière dans son développement embryonnaire que dans le cas des vertébrés, mais la chose intéressante qui est différente est que les cellules qui sont sensibles à la lumière sont à l'intérieur et que les cellules qui font les calculs sont derrière plutôt que devant, comme dans notre œil. Ainsi nous voyons au moins qu'il n'y a pas de bonnes raisons pour qu'elles se trouvent devant. La nature a trouvé la bonne solution dans le cas de l'autre essai qu'elle a tenté (voir Fig. 36-10). Les plus grands yeux au monde sont ceux du calamar géant; on en a trouvé avec un diamètre allant jusqu'à 40 cm!

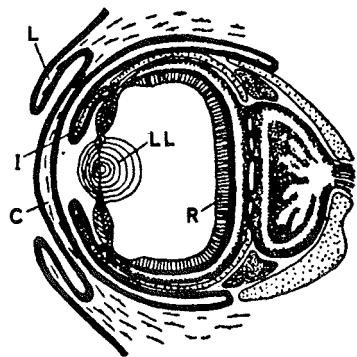


Fig. 36-10. L'œil d'une pieuvre.

36-6 Neurologie de la vision

Un des aspects principaux de notre sujet est celui des interconnexions de l'information entre une partie de l'œil et une autre. Considérons l'œil composé du crabe des moluques sur lequel on a fait beaucoup d'expériences. D'abord, nous devons connaître

le type d'information qui peut se déplacer le long des nerfs. Un nerf transporte un type de perturbation qui a un effet électrique facile à détecter, un type de perturbation de caractère ondulatoire qui parcourt le nerf et produit un effet à l'autre extrémité: un long morceau de cette cellule nerveuse, appelée l'axone, transporte l'information, et un certain type d'impulsion appelée « excitation » se déplace le long de l'axone s'il est excité à une extrémité. Lorsqu'une excitation parcourt le nerf, une autre ne peut immédiatement suivre. Toutes les excitations ont la même taille, ainsi nous n'obtenons pas d'excitations plus *intenses* lorsque le nerf est plus fortement excité, mais nous obtenons *davantage d'excitations par seconde*. La *dimension* de l'excitation est déterminée par la fibre. Il est important d'avoir compris cela afin de voir ce qui se passe ensuite.

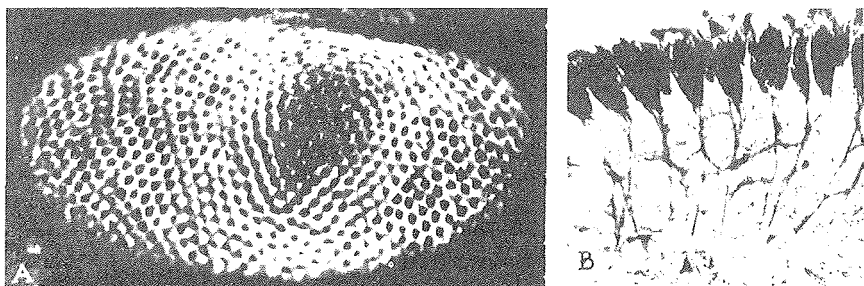


Fig. 36-11. L'œil à facettes d'un crabe des mouluques. (a) Vue normale. (b) Coupe.

La Figure 36-11 (a) représente l'œil composé du crabe des mouluques; il ne ressemble pas beaucoup à un œil, il est simplement constitué d'un millier d'ommatidia. La Figure 36-11 (b) est une coupe du système; on peut voir les ommatidia et les fibres nerveuses qui en sortent et vont au cerveau. Mais remarquez que même pour le crabe des mouluques, on trouve très peu d'interconnexions. Elles sont beaucoup moins développées que dans l'œil humain et cela nous donne une possibilité d'étudier un exemple plus simple.

Considérons maintenant les expériences qui ont été réalisées en plaçant de fines électrodes dans le nerf optique du crabe des mouluques et en n'envoyant de la lumière que sur une des ommatidia, ce qui est facile à faire avec des lentilles. Si nous envoyons de la lumière à un certain instant t_0 , et mesurons les impulsions électriques qui se produisent, nous observons un léger retard au départ, et puis une série rapide de décharges qui graduellement se ralentit jusqu'à une vitesse uniforme comme on le voit sur la Figure 36-12 (a). Lorsque la lumière cesse, les décharges s'arrêtent. Il est très intéressant de remarquer que si, alors que notre amplificateur est toujours relié à cette même fibre nerveuse, nous envoyons la lumière sur un ommatidium *différent*, rien ne se passe; pas de signal.

Nous réalisons maintenant une autre expérience: nous envoyons de la lumière sur l'ommatidium original et obtenons la même réponse, et si maintenant nous envoyons en même temps la lumière sur un ommatidium voisin, les impulsions s'interrompent brièvement et réapparaissent ensuite à une vitesse beaucoup plus lente (Fig. 36-12 (b)). Le taux de l'un est limité par les impulsions qui sortent de l'autre ommatidium! En d'autres termes, chaque fibre nerveuse transporte l'information venant d'un ommatidium,

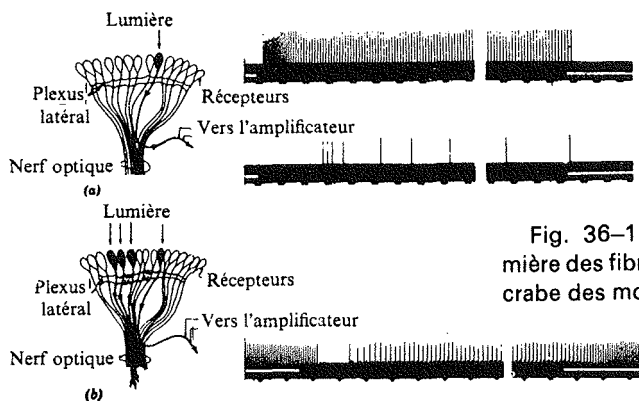


Fig. 36-12. La réponse à la lumière des fibres nerveuses de l'œil d'un crabe des moulques.

mais la quantité qu'elle transporte est limitée par les signaux venant des autres. Ainsi, par exemple, si l'œil dans son ensemble est plus ou moins uniformément éclairé, l'information venant de chacune des ommatidia sera relativement faible parce qu'elle est limitée par un grand nombre d'autres. En fait la limitation est additive — si nous envoyons la lumière sur plusieurs ommatidia voisines, la limitation devient très grande. La limitation est plus grande lorsque les ommatidia sont plus proches et si les ommatidia sont suffisamment éloignées l'une de l'autre, la limitation est pratiquement nulle. Elle est donc additive et dépend de la distance; voilà un premier exemple de la combinaison dans l'œil même de l'information venant de différentes parties de l'œil. Nous pouvons voir, par exemple, en y réfléchissant un petit peu, que ceci est un procédé pour *augmenter le contraste* aux bords des objets, parce que si une partie de la scène est lumineuse et une autre partie sombre, les ommatidia dans la surface éclairée envoient des impulsions qui sont limitées par la lumière dans le voisinage, et l'effet sera relativement faible. D'un autre côté, un ommatidium à la frontière qui reçoit une impulsion « blanche » est également limité par ses voisins, mais il y en a moins, puisque certains sont dans l'obscurité; le signal résultant est en conséquence plus élevé. Le résultat est représenté par une courbe telle que celle de la Figure 36-13. Le crabe verra un renforcement des contours.

L'existence d'un renforcement des contours est connue depuis longtemps; en fait, c'est une chose remarquable qui a été souvent commentée par les psychologues. Pour dessiner un objet, il nous suffit de dessiner son contour. Comme nous sommes habitués à regarder des dessins qui ne présentent que le contour! Qu'est-ce que le contour? Le contour est simplement la différence au bord entre le clair et le sombre ou une couleur et une autre. Ce n'est pas le fait, croyez-le ou pas, que chaque objet possède une ligne

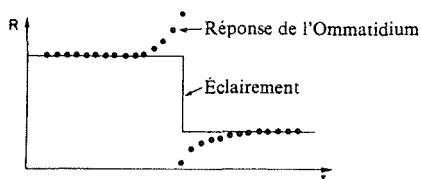


Fig. 36-13. La réponse totale des ommatidia d'un crabe des moulques près d'un changement rapide d'éclairement.

qui l'entoure! Une telle ligne n'existe pas. Cette ligne n'existe que dans notre propre construction psychologique; nous commençons à comprendre les raisons pour lesquelles la « ligne » est suffisante pour obtenir l'objet total. Notre propre œil travaille probablement d'une manière semblable – beaucoup plus compliquée mais semblable.

Finalement, nous décrirons brièvement le travail très minutieux, le travail superbe et d'avant-garde qui a été réalisé sur la grenouille. En réalisant une expérience correspondante sur la grenouille, en plaçant des électrodes semblables à des aiguilles, très joliment construites, très fines, dans le nerf optique d'une grenouille, on peut obtenir les signaux qui se déplacent le long d'un axone particulier et exactement comme dans le cas du crabe des moluques, nous trouvons que l'information ne dépend pas que d'un seul endroit dans l'œil, mais est une somme d'informations venant de différents endroits.

Le schéma le plus récent du fonctionnement de l'œil de la grenouille est le suivant. On peut trouver quatre différents types de fibres nerveuses optiques, en ce sens qu'il y a quatre différents types de réponses. Ces expériences n'ont pas été réalisées en envoyant des impulsions de lumière, parce que ce n'est pas ce que voit la grenouille. Une grenouille se trouve quelque part et son œil ne se déplace jamais, sauf lorsque la feuille de nénuphar sur laquelle elle se trouve se met à se balancer, et dans ce cas son œil oscille juste de ce qu'il faut pour que l'image reste fixe. Elle ne tourne pas son œil. Si quelque chose se déplace dans son champ de vision, par exemple une petite mouche (elle doit être capable de voir quelque chose de petit se déplaçant dans un environnement fixe), quatre types différents de fibres envoient des décharges – leurs propriétés sont résumées au Tableau 36-1. Détection soutenue du bord, non effaçable, signifie que si nous introduisons dans le champ de vision de la grenouille un objet avec un bord, une grande quantité d'impulsions apparaissent dans cette fibre particulière tant que l'objet se déplace, mais elles diminuent jusqu'à former une suite continue d'impulsions qui se perpétue aussi longtemps que le bord est là, même s'il ne se déplace pas. Si nous éteignons la lumière, les impulsions s'arrêtent. Si nous l'allumons à nouveau, alors que le bord est toujours en vue, elles réapparaissent. Elles ne sont pas effaçables. Un autre type de fibre lui ressemble beaucoup, à ceci près que si le bord est droit elle ne fonctionne pas. Ce doit être un bord convexe avec de l'obscurité derrière lui! Quelle doit être la complexité du système d'interconnexion dans la rétine de l'œil de la grenouille pour qu'elle puisse comprendre qu'une surface convexe est entrée dans le champ de vision? De plus, bien que cette fibre fonctionne assez longtemps, elle ne fonctionne pas aussi longtemps que l'autre et si nous éteignons la lumière puis la rallumons,

Tableau 36-1
Types de réponses des fibres du nerf optique d'une grenouille

Type	Vitesse	Champ angulaire
1. Détection de bord soutenue (non effaçable)	0,2-0,5 m/s	1°
2. Détection de bord convexe (effaçable)	0,5 m/s	2°-3°
3. Détection de changement de contraste	1-2 m/s	7°-10°
4. Détection d'assombrissement	jusqu'à $\frac{1}{2}$ m/s	jusqu'à 15°
5. Détection d'obscurité	?	très grand

les impulsions ne reviennent *pas*. Cela dépend du mouvement d'arrivée de la surface convexe. L'œil la voit arriver et se souvient qu'elle est là, mais si nous arrêtons la lumière pour un instant, il l'oublie et ne la voit plus.

Un autre exemple est la détection de changement de contraste. Si un bord pénètre ou sort, il y a des impulsions, mais si l'objet reste au repos, il n'y a plus d'impulsion du tout.

Il y a ensuite un détecteur d'assombrissement. Lorsque l'intensité lumineuse diminue des impulsions apparaissent, mais si elle reste basse ou se tient élevée, les impulsions s'arrêtent; cela ne fonctionne que lorsque la lumière diminue.

Finalement, il y a quelques fibres qui sont des détecteurs d'obscurité – une chose tout à fait étonnante – elles fonctionnent tout le temps! Si nous augmentons la lumière, elles fonctionnent moins rapidement, mais tout le temps. Si nous diminuons la lumière, elles fonctionnent plus rapidement, toujours tout le temps. Dans le noir elles fonctionnent à toute allure, répétant perpétuellement, « Il fait noir! Il fait noir! Il fait noir! »

Ces réponses semblent plutôt compliquées à classer et nous pouvons nous demander si les expériences ont peut-être été mal interprétées. Mais il est très intéressant de retrouver ces mêmes catégories clairement séparées dans l'anatomie de la grenouille! Par d'autres mesures, après que ces réponses aient été classées (*après*, c'est ce qui est important à ce propos), on a découvert que la *vitesse* des signaux sur les différentes fibres n'était pas la même, ce qui fait qu'il y a une autre manière indépendante de vérifier à quel type de fibre on a affaire!

Une autre question intéressante est de savoir quelle est la dimension de la surface pour laquelle une fibre particulière fait ses calculs? La réponse est différente pour les différentes catégories.

La Figure 36-14 montre la surface de ce qu'on appelle le tectum d'une grenouille, là où les nerfs vont dans le cerveau en venant du nerf optique. Toutes les fibres nerveuses venant

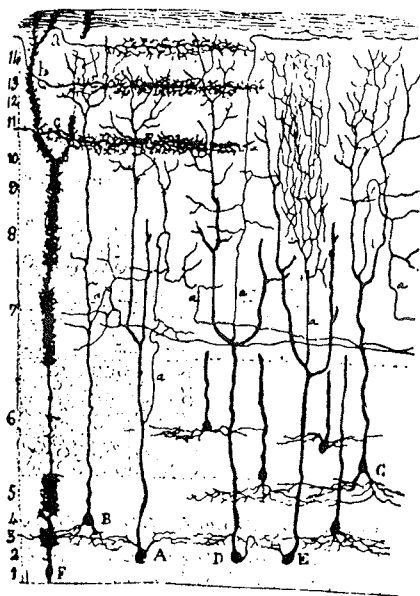


Fig. 36-14. Le tectum d'une grenouille.

du nerf optique établissent des liaisons dans les diverses couches du tectum. Cette structure en couche est analogue à la rétine; c'est en partie la raison pour laquelle nous savons que le cerveau et la rétine se ressemblent beaucoup. En prenant une électrode et en la déplaçant vers le bas au travers des différentes couches, nous pouvons trouver à quel endroit se termine un certain type de nerf optique et le beau et merveilleux résultat que l'on trouve est que les différents types de fibres se terminent dans différentes couches! La première se termine dans la couche numéro un, la seconde au numéro deux, les troisième et cinquième se terminent au même endroit, et la plus profonde de toutes est le numéro quatre. (Quelle coïncidence, on trouve les mêmes numéros presque dans l'ordre correct! Non, car c'est justement pourquoi elles ont été numérotées de cette manière, la première publication proposait des numéros dans un ordre différent!)

Nous résumons brièvement ce que nous venons d'apprendre: Il y a probablement trois pigments. Il peut y avoir différentes sortes de cellules réceptrices contenant les trois pigments dans des proportions différentes, mais on trouve beaucoup de connexions croisées qui permettent des additions et des soustractions par l'intermédiaire de l'addition et du réenforcement dans le système nerveux. Ainsi, avant de pouvoir vraiment comprendre la vision en couleur, il nous faudra comprendre la sensation finale. Ce sujet est toujours à l'état de recherches, mais ces recherches avec des microélectrodes, etc., en définitive nous apporteront peut-être davantage d'informations sur la manière dont nous voyons la couleur.

Comportement quantique

37-1 Mécanique atomique	37-5 L'interférence des ondes d'électron
37-2 Une expérience avec des balles	37-6 En regardant les électrons
37-3 Une expérience avec des ondes	37-7 Premiers principes de mécanique quantique
37-4 Une expérience avec des électrons	37-8 Le principe d'incertitude

37-1 Mécanique atomique

Dans les quelques chapitres précédents, nous avons traité les idées essentielles nécessaires à une compréhension de la plupart des phénomènes importants de la lumière – ou du rayonnement électromagnétique en général. (Nous avons laissé de côté quelques sujets particuliers pour les traiter l'année prochaine. Plus précisément il s'agit de la théorie de l'indice des matériaux denses et de la réflexion interne totale.) Nous nous sommes préoccupés de ce qu'on appelle la « théorie classique » des ondes électriques qui se trouve être une description adéquate et complète de la nature pour un grand nombre d'effets. Nous ne nous sommes pas préoccupés cependant du fait que l'énergie lumineuse se propage en amas ou en « photons ».

Nous voudrions prendre comme sujet suivant le problème du comportement des parcelles de matière relativement de grandes tailles – par exemple leurs propriétés mécaniques et thermiques. En abordant ceci, nous verrons que la théorie classique ou ancienne se trouve presque immédiatement prise en défaut, parce que la matière est en réalité constituée de particules de tailles atomiques. Malgré tout, nous continuerons de nous préoccuper simplement de la partie classique, parce que c'est la seule partie que nous puissions comprendre en utilisant la mécanique classique que nous avons apprise. Mais ce ne sera pas un grand succès. Nous trouverons que dans le cas de la matière, à la différence de celui de la lumière, nous serons en difficulté assez rapidement. Nous pourrions bien sûr continuellement nous garder d'étudier des effets atomiques; mais au lieu de cela, nous allons interposer ici une brève discussion par laquelle nous décrirons les idées de base des propriétés quantiques de la matière, c'est-à-dire les idées quantiques de la physique atomique, de telle sorte que vous ayez une certaine idée de ce que nous allons laisser de côté certains sujets importants que nous ne pouvons éviter d'approcher de près.

Ainsi nous allons maintenant vous donner une *introduction* à la mécanique quantique, mais nous ne serons pas en mesure avant longtemps d'aborder vraiment le sujet.

La « mécanique quantique » est la description du comportement de la matière dans tous ses détails et en particulier des événements à l'échelle atomique. Les objets à une

petite échelle se comportent comme rien de ce dont nous avons une expérience directe. Ils ne se comportent pas comme des ondes, ils ne se comportent pas comme des particules, ils ne se comportent pas comme des nuages, ou des boules de billard, ou des poids sur des ressorts ou quoi que ce soit d'autre que vous puissiez avoir déjà vu.

Newton pensait que la lumière était constituée de particules, puis on découvrit, comme nous l'avons vu, qu'elle se comportait comme une onde. Plus tard, cependant (au début du vingtième siècle) on réalisa que la lumière se comportait bien quelquefois comme une particule. On considérait dans le passé que l'électron, par exemple, se comportait comme une particule et puis on découvrit qu'à plus d'un égard il se comportait comme une onde. Ainsi en réalité il ne se comporte ni comme l'un ni comme l'autre. Maintenant nous n'insistons plus. Nous disons, « Ce n'est *ni l'un ni l'autre*. »

Il y a cependant un coup de chance – les électrons se comportent exactement comme la lumière. Le comportement quantique des objets atomiques (électrons, protons, neutrons, photons, etc.) est le même pour tous, ce sont tous des « ondes particulières » ou tout autre nom que vous voudrez leur donner. Ainsi ce que nous apprenons sur les propriétés des électrons (que nous utiliserons dans nos exemples), doit également s'appliquer à toutes les « particules », y compris les photons de lumière.

L'accumulation progressive de l'information sur le comportement atomique et à petite échelle, pendant le premier quart de ce siècle, qui nous donna certaines indications sur la manière dont les petits objets se comportent, produisit une confusion croissante qui ne cessa finalement que lorsque la question fut résolue en 1926 et 1927 par Schrödinger, Heisenberg et Born. Ils aboutirent finalement à une description cohérente du comportement de la matière à petite échelle. Nous considérerons les caractéristiques principales de cette description dans le présent chapitre.

Parce que le comportement atomique est si peu semblable à l'expérience courante, il est très difficile de s'y habituer et il apparaît bizarre et mystérieux à tout un chacun, au débutant comme au physicien expérimenté. Même les experts ne le comprennent pas de la manière dont ils le souhaiteraient, et il est parfaitement raisonnable que cela soit ainsi, parce que toute l'expérience et l'intuition humaines directes concernent les grands objets. Nous savons comment agissent les grands objets, mais les objets à petites échelles n'agissent pas du tout de cette manière. Nous devons ainsi apprendre leurs propriétés d'une manière assez abstraite et imaginative et non en relation avec notre expérience directe.

Dans ce chapitre nous nous attaquerons directement à la base de ce comportement mystérieux dans sa forme la plus étrange. Nous choisirons d'examiner un phénomène qu'il est impossible, *absolument* impossible, d'expliquer d'une manière classique quelconque et qui contient le cœur de la mécanique quantique. En réalité il contient le *seul* mystère. Nous ne pouvons expliquer ce mystère au sens où nous « expliquerions » comment il fonctionne. Nous vous *dirons* comment il fonctionne. En vous disant comment il fonctionne, nous vous aurons dit les singularités fondamentales de toute la mécanique quantique.

37-2 Une expérience avec des balles

Pour essayer de comprendre le comportement quantique des électrons, nous comparerons et mettrons en évidence la différence de leurs comportements dans un certain dispositif expérimental, avec le comportement plus usuel de particules telles que des balles de fusil et avec le comportement d'ondes telles que les ondes à la surface de l'eau. Nous considérons d'abord le comportement des balles dans un arrangement expérimental montré schématiquement sur la Figure 37-1. Nous avons là une mitrailleuse qui tire une rafale de balles. Ce n'est pas une très bonne mitrailleuse en ce sens qu'elle éparpille les balles (au hasard) dans un

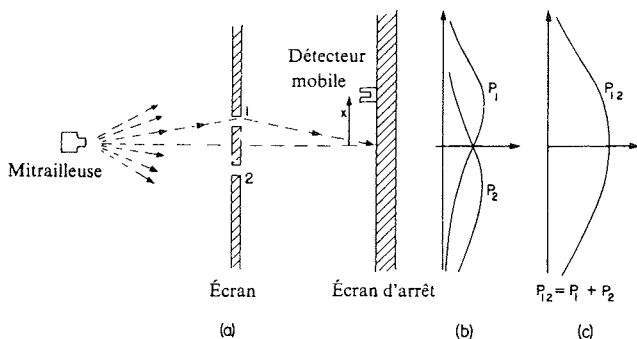


Fig. 37-1. Expérience d'interférence avec des balles.

assez grand domaine angulaire, comme il est indiqué sur la figure. Devant la mitrailleuse il y a un mur (constitué de plaques blindées) comportant deux trous juste assez larges pour laisser passer une balle. Au-delà du mur, il y a un écran d'arrêt (disons, une épaisse paroi de bois) qui « absorbe » les balles lorsqu'elles le frappent. Juste devant le mur, nous avons un objet que nous appelons un « détecteur » de balles. Cela peut être une boîte contenant du sable. Toute balle qui entre dans le détecteur sera arrêtée et conservée. Lorsque nous le voulons, nous pouvons vider la boîte et compter le nombre de balles qui s'y trouvent. Le détecteur peut être déplacé latéralement (dans ce que nous appelons la direction x). Avec cet appareil nous pouvons trouver expérimentalement la réponse à la question: « Quelle est la probabilité qu'une balle qui traverse les trous dans le blindage parvienne à l'écran d'arrêt à la distance x du centre? » Premièrement vous devez vous rendre compte que nous devons parler de probabilité, parce que nous ne pouvons pas dire avec certitude où chaque balle particulière doit se rendre. Une balle qui atteint un des trous peut rebondir sur les bords du trou et peut parvenir n'importe où. Par « probabilité » nous signifions la chance que la balle arrive au détecteur, ce que nous pouvons mesurer en comptant le nombre qui arrive au détecteur dans un certain temps et en prenant le rapport de ce nombre au nombre *total* qui frappe l'écran d'arrêt pendant ce temps. Ou si nous supposons que la mitrailleuse tire toujours à la même vitesse durant les mesures, la probabilité que nous voulons trouver est simplement proportionnelle au nombre qui atteint le détecteur dans un certain intervalle de temps de référence.

Pour notre problème, nous imaginerons une expérience quelque peu idéalisée dans laquelle les balles ne sont pas des balles réelles mais des balles *indestructibles* – qui ne peuvent se briser en deux. Dans notre expérience, nous trouvons que les balles arrivent toujours d'un seul tenant et lorsque nous trouvons quelque chose dans le détecteur, c'est toujours une balle complète. Si la vitesse à laquelle la mitrailleuse tire est rendue très faible, nous trouvons qu'à un moment donné rien n'arrive ou alors qu'une et simplement une – exactement une – balle arrive sur l'écran arrière. La dimension de l'objet qui arrive ne dépend également certainement pas de la vitesse de tir de la mitrailleuse. Nous dirons, « Les balles arrivent *toujours* avec une masse identique. » Ce que nous mesurons avec notre détecteur est la probabilité d'arrivée d'une masse. Et nous mesurons la probabilité en fonction de x . Les résultats de telles mesures avec cet appareil, (nous n'avons pas encore fait l'expérience, ainsi en réalité nous imaginons le

résultat), sont reportés sur le graphique tracé dans la partie *c* de la Figure 37-1. Sur le graphique nous traçons la probabilité à droite et x verticalement, de telle sorte que l'axe des x soit en rapport avec le schéma de l'appareil. Nous appelons P_{12} la probabilité, car les balles peuvent être venues par l'intermédiaire du trou 1 ou du trou 2. Vous ne serez pas surpris de voir que P_{12} est grand près du milieu du graphique, mais qu'il devient petit si x est très grand. Vous pouvez vous demander cependant pourquoi P_{12} est maximum en $x = 0$. Nous pouvons comprendre ce fait si nous répétons notre expérience en obturant le trou 2 et la répétons encore en obturant le trou 1. Lorsque le trou 2 est fermé, les balles ne peuvent passer qu'au travers du trou 1 et nous obtenons la courbe marquée P_1 dans la partie *b* de la figure. Comme vous vous y attendez, le maximum de P_1 apparaît à la valeur de x correspondant à l'alignement de la mitrailleuse avec le trou 1. Lorsque le trou 1 est fermé, nous obtenons la courbe symétrique P_2 tracée sur la figure. P_2 est la distribution de probabilité pour des balles qui passent au travers du trou 2. En comparant les parties *b* et *c* de la Figure 37-1, nous trouvons le résultat important

$$P_{12} = P_1 + P_2. \quad (37.1)$$

Les probabilités s'additionnent. L'effet avec les deux trous ouverts est la somme des effets avec chacun des trous ouverts séparément. Nous appellerons ce résultat une observation de « non interférence », pour une raison que vous verrez plus tard. Voilà pour les balles. Elles arrivent par paquets et la probabilité d'arrivée ne montre pas d'interférence.

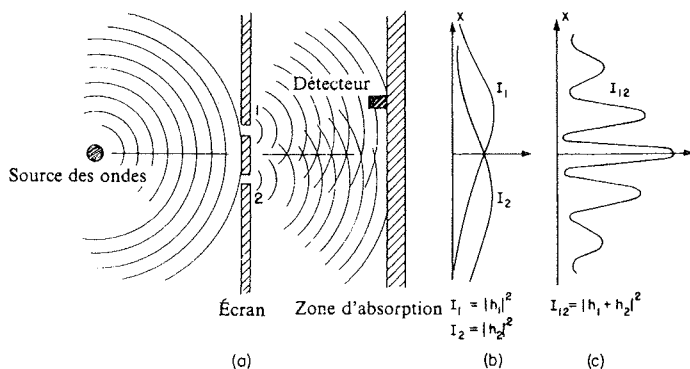


Fig. 37-2. Expérience d'interférence avec les ondes à la surface de l'eau.

37-3 Une expérience avec des ondes

Nous allons maintenant considérer une expérience avec des ondes à la surface de l'eau. L'appareil est montré schématiquement sur la Figure 37-2. Nous avons un récipient d'eau peu profond. Un petit objet appelé la « source des ondes » est agité verticalement par un moteur et crée des ondes circulaires. A la droite de la source nous avons à nouveau une paroi avec deux trous et au-delà il y a un deuxième écran qui, pour maintenir les choses simples, est un « absorbant » de telle sorte qu'il n'y ait pas de réflexion des ondes lorsque elles arrivent sur lui. Ceci peut être réalisé en construisant une « plage » de sable en pente douce. Devant cette plage nous plaçons un détecteur qui

peut être déplacé vers l'avant ou l'arrière dans la direction x , comme précédemment. Le détecteur est maintenant un appareil qui mesure « l'intensité » du mouvement des ondes. Vous pouvez imaginer un appareil qui mesure la hauteur du mouvement des ondes, mais dont l'échelle est calibrée en proportion du *carré* des hauteurs réelles, de telle sorte que la lecture soit proportionnelle à l'intensité de l'onde. Notre détecteur indique quelque chose de proportionnel à l'énergie transportée par l'onde – ou plutôt le taux suivant lequel l'énergie est apportée au détecteur.

Avec notre appareil à onde, la première chose à remarquer est que l'intensité peut avoir *n'importe quelle valeur*. Si la source ne se déplace qu'un tout petit peu, il n'y a qu'un petit mouvement de l'onde au détecteur. Lorsqu'il y a davantage de mouvement à la source, il y a davantage d'intensité au détecteur. L'intensité de l'onde peut avoir *n'importe quelle valeur* à volonté. Nous ne dirons *pas* qu'il y a apparition de paquets d'énergie dans l'intensité de l'onde.

Mesurons maintenant l'intensité de l'onde en différentes valeurs de x (en faisant agir la source de l'onde toujours de la même manière). Nous obtenons la courbe d'apparence intéressante, marquée I_{12} à la partie (c) de la Figure.

Nous avons déjà étudié comment ceci peut se produire lorsque nous avons étudié les interférences des ondes électriques. Dans ce cas nous observons que l'onde originale est diffractée par les trous et que de nouvelles ondes circulaires s'éloignent de chacun des trous. Si à un moment nous fermons un des trous et mesurons la distribution de l'intensité à l'écran arrière, nous trouvons les courbes de l'intensité, assez simples, indiquées à la partie (b) de la Figure. I_1 est l'intensité de l'onde venant du trou 1 (que nous obtenons en faisant la mesure lorsque le trou 2 est fermé) et I_2 est l'intensité de l'onde venant du trou 2 (mesurée lorsque le trou 1 est fermé).

L'intensité I_{12} observée lorsque les deux trous sont ouverts n'est certainement *pas* la somme de I_1 et I_2 . Nous disons qu'il y a « interférence » des deux ondes. A certains endroits (où la courbe I_{12} a ses maxima), les ondes sont « en phase » et les sommets des ondes s'additionnent pour donner une grande amplitude, et donc, une grande intensité. Nous disons que, à de tels endroits, les deux ondes sont en « interférence constructive ». De telles interférences constructives apparaîtront chaque fois que la distance du détecteur à l'un des trous sera d'un nombre entier de longueurs d'onde plus grande (ou plus courte) que la distance du détecteur à l'autre trou.

En ces endroits où les deux ondes arrivent au détecteur avec une différence de phase de π (là où elles sont en opposition de phase) le mouvement résultant de l'onde au détecteur sera la différence des deux amplitudes. Les ondes « interfèrent destructivement » et nous obtenons une faible valeur de l'intensité de l'onde. Nous prévoyons de telles valeurs faibles chaque fois que la distance entre le trou 1 et le détecteur est différente de la distance entre le trou 2 et le détecteur d'un nombre impair de demi-longueurs d'onde. Les faibles valeurs de I_{12} à la Figure 37-2 correspondent aux endroits où les deux ondes interfèrent destructivement.

Vous vous souviendrez que la relation quantitative entre I_1 et I_2 et I_{12} peut être exprimée de la manière suivante: la hauteur instantanée de l'onde sur l'eau, au niveau du détecteur, pour l'onde venant du trou 1, peut être écrite comme (la partie réelle de) $\hat{h}_1 e^{i\omega t}$, où l'amplitude $\hat{h}_1$ est en général un nombre complexe. L'intensité est proportionnelle à la valeur moyenne du carré de la hauteur ou bien, lorsque nous utilisons les nombres complexes, à $|\hat{h}_1|^2$. D'une manière semblable, pour le trou 2 la hauteur est $\hat{h}_2 e^{i\omega t}$ et l'intensité est proportionnelle à $|\hat{h}_2|^2$. Lorsque les deux trous sont ouverts, les hauteurs des ondes s'additionnent pour donner la hauteur

$(\hat{h}_1 + \hat{h}_2)e^{i\omega t}$ et l'intensité $|\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2$. Omettant la constante de proportionnalité dans notre cas, les relations effectives pour les « ondes en interférence » sont

$$I_1 = |\hat{h}_1|^2, \quad I_2 = |\hat{h}_2|^2, \quad I_{12} = |\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2. \quad (37.2)$$

Vous remarquerez que le résultat est nettement différent de celui obtenu avec des balles (équation 37.1). Si nous développons $\hat{h}_1 + \hat{h}_2$ nous voyons que

$$|\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2 = |\hat{h}_1|^2 + |\hat{h}_2|^2 + 2|\hat{h}_1||\hat{h}_2| \cos \delta, \quad (37.3)$$

où δ est la différence de phase entre $\hat{h}_1$ et $\hat{h}_2$. En fonction des intensités nous pouvons écrire

$$I_{12} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta. \quad (37.4)$$

Le dernier terme dans (37.4) est le « terme d'interférence ». Voilà pour les ondes sur l'eau. L'intensité peut avoir n'importe quelle valeur et elle manifeste des interférences.

37-4 Une expérience avec des électrons

Imaginons maintenant une expérience semblable avec les électrons. Elle est montrée schématiquement sur la Figure 37-3. Nous réalisons un canon à électron qui est formé d'un filament de tungstène chauffé par un courant électrique et entouré d'une boîte métallique comportant un trou. Si le fil est à une tension négative par rapport à la boîte, les électrons émis par le fil seront accélérés vers les parois et certains vont passer au travers du trou. Tous les électrons qui sortent du trou auront (approximativement) la même énergie. Devant le canon, il y a de nouveau une paroi (simplement une fine plaque métallique) avec deux trous. Au-delà de la paroi, il y a une autre plaque qui va servir d'écran arrière. Devant cette plaque, nous plaçons un détecteur mobile. Le détecteur peut être un compteur Geiger ou, peut-être mieux encore, un multiplicateur d'électrons qui est relié à un haut-parleur.

Disons tout de suite que vous ne devez pas essayer de monter cette expérience (comme vous auriez pu le faire avec les deux autres que nous avons déjà décrites). Cette expérience n'a jamais été réalisée de cette manière. La difficulté est que l'appareil devrait

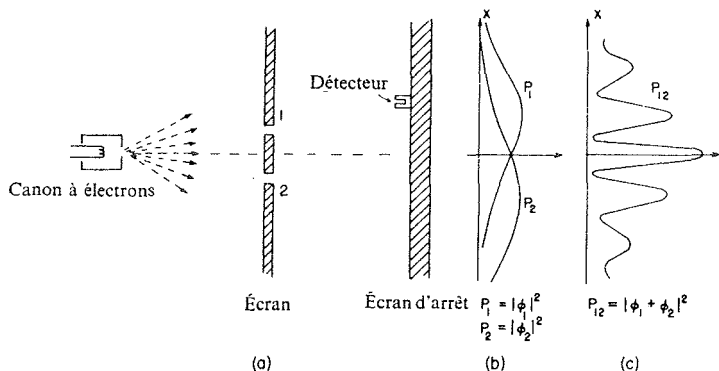


Fig. 37-3. Expérience d'interférence avec les électrons.

être réalisé à une échelle impossiblement petite pour mettre en évidence les effets qui nous intéressent. Nous réalisons une « expérience de pensée » que nous avons choisie parce qu'elle est facile à comprendre. Nous connaissons les résultats que nous aurions obtenus, parce qu'il y a de très nombreuses expériences qui ont été réalisées, dans lesquelles les grandeurs et les proportions ont été choisies pour mettre en évidence les effets que nous allons décrire.

La première chose que nous remarquons avec notre expérience d'électrons est que nous entendons des « clics » très brefs venant du détecteur (c'est-à-dire du haut-parleur). Et tous les « clics » sont les mêmes. Il n'y a pas de « demi-clics ».

Nous remarquons également que les « clics » arrivent tout à fait au hasard. Quelque chose comme : clic..., clic-clic..., clic..., clic..., clic-clic..., clic..., etc., exactement comme vous avez entendu, sans aucun doute, fonctionner un compteur Geiger. Si nous comptons les clics qui arrivent pendant un temps suffisamment long – par exemple pendant plusieurs minutes – et que nous les comptons à nouveau pendant une autre période égale, nous trouvons que les deux nombres sont pratiquement égaux. Ainsi nous pouvons parler de *fréquence moyenne* suivant laquelle les clics sont entendus (tant et tant de clics par minute en moyenne).

Lorsque nous déplaçons le détecteur, la fréquence suivant laquelle les clics se manifestent est plus rapide ou plus lente, mais la dimension (le bruit) de chacun des clics est toujours la même. Si nous diminuons la température du fil dans le canon, la fréquence des clics diminue, mais chacun des clics reste toujours le même. Vous remarquez également que si nous plaçons deux détecteurs séparés sur l'écran arrière, l'un *ou* l'autre va émettre un clic, mais jamais les deux à la fois. (A l'exception d'une fois de temps en temps, s'il y a deux clics très proches dans le temps, notre oreille ne sera peut-être pas capable de déceler la séparation). Nous concluons de ce fait que, quelle que soit la chose qui arrive à l'arrière, cela arrive par « paquet ». Tous les « paquets » ont la même taille : ce ne sont que des « paquets » entiers qui arrivent, et ils arrivent l'un après l'autre sur l'écran arrière. Nous dirons, « Les électrons arrivent toujours par paquets identiques. »

Exactement comme dans notre expérience avec des balles, nous pouvons maintenant essayer de trouver expérimentalement la réponse à la question : « Quelle est la probabilité relative qu'un 'paquet' électron arrive sur l'écran d'arrêt à différentes distances x du centre ? » Comme auparavant, nous obtenons la probabilité relative en observant la fréquence des clics, en maintenant constant le fonctionnement du canon. La probabilité que des paquets arrivent en un point x particulier est proportionnelle à la fréquence moyenne des clics en cet x .

Le résultat de notre expérience est la courbe intéressante marquée P_{12} dans la partie (c) de la figure (37-3). Oui ! Les électrons se comportent ainsi.

37-5 L'interférence des ondes d'électrons

Essayons maintenant d'analyser la courbe de la Figure 37-3 pour voir si nous pouvons comprendre le comportement des électrons. La première chose que nous dirons est que puisqu'ils arrivent par paquets, chaque unité que nous pouvons appeler aussi bien un électron, est venue soit par le trou 1 soit par le trou 2. Écrivons ceci sous la formule d'une « Proposition » :

Proposition A : Chaque électron passe soit par le trou 1 soit par le trou 2.

Si l'on suppose vraie la proposition *A*, tous les électrons qui arrivent à l'arrière peuvent être divisés en deux classes : (1) ceux qui passent par le trou 1, (2) ceux qui passent

par le trou 2. Ainsi notre courbe observée doit être la somme des effets des électrons qui passent par le trou 1 et des électrons qui passent par le trou 2. Vérifions cette idée par l'expérience. Nous allons faire premièrement une mesure pour les électrons qui passent par le trou 1. Nous fermons le trou 2 et nous comptons les clics du détecteur. Du taux de comptage, nous obtenons P_1 . Le résultat de la mesure est indiqué par la courbe marquée P_1 à la partie (b) de la Figure 37-3. Le résultat semble tout à fait raisonnable. D'une manière semblable, nous mesurons P_2 , la distribution de probabilité pour les électrons qui passent par le trou 2. Le résultat de cette mesure est également tracé sur cette figure.

Le résultat P_{12} obtenu avec les *deux* trous ouverts est clairement différent de la somme de P_1 et P_2 , la probabilité pour chacun des trous pris isolément. Par analogie avec notre expérience des ondes à la surface de l'eau, nous disons, « Il y a interférence. »

$$\text{Pour les électrons:} \quad P_{12} \neq P_1 + P_2. \quad (37.5)$$

Comment une telle interférence peut-elle se produire? Nous devons peut-être dire, « Bien, cela signifie, probablement, qu'il est *faux* que les 'unités' électrons passent soit par le trou 1 soit par le trou 2, parce que si elles le faisaient, les probabilités devraient s'additionner. Peut-être se déplacent-elles d'une manière plus compliquée. Elles se coupent en deux et... » Mais non! Elles ne peuvent pas, elles arrivent toujours d'un seul tenant... « Bien, peut-être certains d'entre eux passent par le trou 1 et retournent par le trou 2, font quelques tours encore ou par d'autres trajectoires compliquées... et ainsi en fermant le trou 2, nous modifions la chance qu'un électron qui *commence* par le trou 1 arrive finalement à l'arrière... » Mais remarquez! Il y a certains endroits où très peu d'électrons arrivent lorsque les *deux* trous sont ouverts, mais qui reçoivent beaucoup d'électrons si vous fermez un trou, ainsi en *fermant* un trou on *augmente* le nombre venant de l'autre. Remarquez, cependant, qu'au centre de la courbe, P_{12} est plus que deux fois supérieur à $P_1 + P_2$. C'est comme si en fermant un trou on *diminuait* le nombre d'électrons qui passent au travers de l'autre trou. Il semble difficile d'expliquer les *deux* effets en proposant que les électrons se déplacent selon des trajectoires compliquées.

C'est tout à fait mystérieux. Et plus on le regarde, plus cela semble mystérieux. De nombreuses idées ont été avancées pour expliquer la courbe P_{12} en termes d'électrons individuels tournant d'une manière compliquée par les trous. Aucune d'entre elles n'a réussi. Aucune d'entre elles ne peut donner la courbe exacte de P_{12} en terme de P_1 et P_2 .

Cependant, d'une manière assez surprenante, les *mathématiques* qui relient P_1 et P_2 à P_{12} sont extrêmement simples. Car P_{12} est tout à fait semblable à la courbe I_{12} de la Figure 37-2, et *ceci* était simple. Ce qui se passe à l'écran arrière peut être décrit par deux nombres complexes que nous pouvons appeler $\hat{\phi}_1$ et $\hat{\phi}_2$ (ce sont des fonctions de x , bien sûr). Le carré du module de $\hat{\phi}_1$ donne l'effet avec le trou 1 seul ouvert. C'est-à-dire que $P_1 = |\hat{\phi}_1|^2$. L'effet avec le trou 2 seul ouvert est donné par $\hat{\phi}_2$ de la même manière. C'est-à-dire $P_2 = |\hat{\phi}_2|^2$. Et l'effet combiné des deux trous est simplement $P_{12} = |\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2|^2$. Les *mathématiques* sont les mêmes que celles que nous avons pour les ondes à la surface de l'eau! (Il est difficile de comprendre comment on peut obtenir un résultat aussi simple à partir d'un jeu compliqué des électrons traversant plusieurs fois la plaque selon certaines trajectoires étranges.)

Nous concluons la chose suivante: Les électrons arrivent par paquets, comme les particules, et la probabilité d'arrivée de ces paquets est distribuée comme la distribution des intensités d'une onde. C'est dans ce sens qu'un électron se comporte « tantôt comme une onde ».

Incidemment, lorsque nous utilisons des ondes classiques, nous définissons l'intensité comme la moyenne dans le temps du carré de l'amplitude de l'onde, et nous utilisons les nombres complexes comme une astuce mathématique pour simplifier le calcul. Mais en mécanique quantique, il apparaît que l'amplitude *doit* être représentée par un nombre complexe. Une partie réelle seule ne suffira pas. C'est un point technique pour le moment, parce que les formules se ressemblent tout à fait.

Puisque la probabilité d'arrivée au travers des deux trous est donnée si simplement, bien qu'elle ne soit pas égale à $(P_1 + P_2)$, c'est en réalité tout ce qu'il y a à dire. Mais il y a un grand nombre de points subtils liés au fait que la nature opère de cette manière. Nous aimerions illustrer maintenant pour vous certains de ces points. Premièrement, puisque le nombre qui arrive en un point particulier n'est *pas* égal au nombre qui arrive venant de 1 plus le nombre venant de 2, comme nous pourrions le conclure de la Proposition A, nous devons conclure sans aucun doute que la *Proposition A est fausse*. Il n'est *pas* vrai que les électrons passent *soit* par le trou 1 *soit* par le trou 2. Mais cette conclusion peut être vérifiée par une autre expérience.

37-6 En regardant les électrons

Nous allons maintenant essayer l'expérience suivante. A notre appareil d'électrons nous ajoutons une source de lumière très intense, placée derrière l'écran percé et entre les deux trous, comme indiqué sur la Figure 37-4. Nous savons que les charges électriques diffusent de la lumière. Ainsi, lorsqu'un électron passe, quel que soit l'endroit où il passe, il diffuse de la lumière vers notre œil sur son chemin vers le détecteur, et nous pouvons *voir* où va l'électron. Si, par exemple, l'électron emprunte la trajectoire par le trou 2 qui est indiquée à la Figure 37-4, nous devons voir un éclair de lumière venant du voisinage de l'endroit marqué A sur la figure. Si un électron passe par le trou 1, nous nous attendons à voir un éclair venir du voisinage du trou

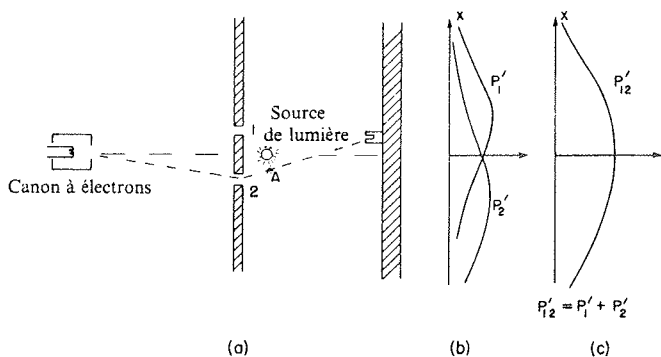


Fig. 37-4. Une expérience différente avec les électrons.

supérieur. S'il doit se passer que nous obtenions de la lumière venant des deux endroits au même moment, parce que l'électron se divise en deux... Tentons donc l'expérience!

Voilà ce que nous voyons: *chaque* fois que nous entendons un « clic » venant de notre détecteur à électron (à l'arrière), nous *voyons également* un éclair de la lumière *soit* près du trou 1, *soit* près du trou 2, mais *jamais* près des deux trous en même temps! Et nous observons le même résultat quel que soit l'endroit où nous plaçons le détecteur. De cette observation, nous concluons que lorsque nous regardons les électrons, nous trouvons que ces électrons passent soit par un trou soit par l'autre. Expérimentalement, la proposition *A* est nécessairement vraie.

Qu'est-ce donc qui est faux dans notre raisonnement *contre* la Proposition *A*? Pourquoi P_{12} n'est-il pas simplement égal à $P_1 + P_2$? Revenons à l'expérience! Essayons de suivre les électrons et voyons ce qu'ils font. Pour chaque position (position x) du détecteur, nous compterons les électrons qui arrivent et nous nous souviendrons *également* du trou par lequel ils sont passés, en regardant les éclairs. Nous pouvons garder l'information de ce qui se passe ainsi: chaque fois que nous entendons un « clic » nous mettons un point dans la Colonne 1 si nous voyons l'éclair près du trou 1, et si nous voyons l'éclair près du trou 2, nous mettons un point dans la Colonne 2. Chaque électron qui arrive est enregistré dans l'une des deux classes: ceux qui passent par 1 et ceux qui passent par 2. Par les nombres enregistrés à la Colonne 1 nous obtenons la probabilité P'_1 que l'électron arrive au détecteur par le trou 1; et par le nombre enregistré à la Colonne 2 nous obtenons P'_2 , la probabilité qu'un électron arrive au détecteur par le trou 2. Si maintenant nous répétons une telle mesure pour différentes valeurs de x , nous obtenons les courbes de P'_1 et P'_2 montrées sur la partie (b) de la Figure 37-4.

Bien, ce n'est pas trop surprenant! Nous obtenons pour P'_1 quelque chose de tout à fait semblable à ce que nous obtenions précédemment pour P'_1 en fermant le trou 2; et P'_2 est semblable à ce que nous avions obtenu en fermant le trou 1. Ainsi il n'y a *pas* de manèges compliqués tels qu'un passage par les deux trous. Lorsque nous les regardons, les électrons traversent exactement comme nous nous y attendons. Que les trous soient fermés ou ouverts, ceux que nous voyons venant du trou 1 sont distribués de la même manière, que le trou 2 soit ouvert ou fermé.

Mais attendez! Qu'avons-nous *maintenant* comme probabilité *totale*, la probabilité qu'un électron arrive au détecteur par n'importe quel chemin? Nous avons déjà cette information. Nous prétendons simplement que nous n'avons jamais regardé les éclairs de la lumière, et nous rassemblons les « clics » du détecteur que nous avions séparés en deux colonnes. Nous *devons* simplement *additionner* les nombres. Pour la probabilité qu'un électron arrive à l'arrière en passant *soit* par l'un *soit* par l'autre des trous, nous trouvons $P'_{12} = P'_1 + P'_2$. C'est-à-dire, bien que nous ayons réussi à regarder par quel trou notre électron va passer, nous n'obtenons plus notre ancienne courbe d'interférence P_{12} , nous obtenons une nouvelle courbe P'_{12} , ne manifestant aucune interférence! Si nous éteignons la lumière P_{12} est rétabli.

Nous devons conclure que *lorsque nous regardons les électrons*, leur distribution sur un écran n'est pas la même que lorsque nous ne les regardons pas. Peut-être est-ce la présence de notre source de lumière qui les perturbe? Il peut se faire que les électrons soient très délicats, et que la lumière, lorsqu'elle diffuse sur les électrons, leur donne une impulsion qui change leurs mouvements. Nous savons que le champ électrique de la lumière qui agit sur une charge exerce une force sur elle. Ainsi peut-être *devons-nous* nous attendre à ce que le mouvement soit changé. De toute manière, la lumière exerce une grande influence sur les électrons. En essayant de « regarder » les électrons

nous avons modifié leurs mouvements. C'est-à-dire que le coup donné à l'électron lorsque le photon est diffusé par lui est tel qu'il peut changer le mouvement d'un électron suffisamment pour que, s'il *devait* se rendre là où P_{12} était maximum, il se rende au contraire là où P_{12} est minimum; c'est pourquoi nous ne voyons plus les effets alternés de l'interférence.

Vous pouvez penser, « N'utilisez pas une source aussi brillante! Diminuez sa luminosité! Les ondes de lumières seront plus faibles et ne perturberont pas autant les électrons. Sûrement, en rendant la lumière de plus en plus faible, nous verrons que l'onde sera suffisamment faible pour que l'effet soit négligeable. » O.K. Essayons. La première chose que nous observons est que les éclairs de lumière diffusés par les électrons lorsqu'ils traversent ne deviennent *pas* plus faibles. *Les éclairs ont toujours la même taille*. La seule chose qui se passe lorsque la lumière devient plus faible est que parfois nous obtenons un « clic » dans le détecteur, mais nous ne voyons *aucun éclair*. L'électron est passé sans avoir été « vu ». Ce que nous observons, c'est que la lumière agit *également* comme les électrons, nous *savions* qu'elle était « ondulatoire », mais nous trouvons maintenant qu'elle est également « corpusculaire ». Elle se déplace toujours – ou bien elle est diffusée – en corpuscules que nous appelons « photons ». Lorsque nous diminuons l'*intensité* de la source de la lumière, nous ne changeons pas la *dimension* des photons, mais la *fréquence* à laquelle ils sont émis. *Ceci* explique pourquoi, lorsque notre source est faible, certains électrons passent sans avoir été vus. Il se trouvait qu'il n'y avait pas de photon aux environs au moment où l'électron est passé.

Tout cela est un petit peu décourageant. S'il est vrai que chaque fois que nous « voyons » l'électron nous voyons un éclair de même intensité, alors ces électrons que nous voyons sont *toujours* les électrons perturbés. Malgré tout, essayons l'expérience avec une lumière faible. Maintenant, chaque fois que nous entendons un clic dans le détecteur, nous indiquerons dans une des trois colonnes suivantes: pour la Colonne (1) les électrons vus par le trou 1, pour la Colonne (2) les électrons vus par le trou 2, et pour la Colonne (3) les électrons qui ne sont pas vus du tout. Lorsque nous tirons parti de nos données (en calculant les probabilités) nous trouvons les résultats suivants: Ceux « vus par le trou 1 » ont une distribution semblable à P'_1 ; ceux « vus par le trou 2 » ont une distribution semblable à P'_2 (de telle sorte que ceux « vus par les trous 1 ou 2 » ont une distribution semblable à P'_{12}); et ceux « non vus du tout » ont une distribution « ondulatoire » exactement semblable au P_{12} de la Figure 37-3! *Si les électrons ne sont pas vus, nous avons des interférences!*

Ceci est compréhensible. Lorsque nous ne voyons pas l'électron, aucun photon ne le perturbe et lorsque nous le voyons, un photon l'a perturbé. C'est toujours la même quantité de perturbation parce que les photons lumineux produisent tous des effets de même importance et l'effet des photons diffusés est suffisant pour annuler tout effet d'interférence.

N'y a-t-il pas de *manière* de voir les électrons sans les perturber? Nous avons appris au chapitre précédent que la quantité de mouvement transportée par un « *photon* » est inversement proportionnelle à sa longueur d'onde ($p = h/\lambda$). Il est certain que l'impulsion donnée à l'électron lorsque le photon est diffusé dépend de la quantité de mouvement que le photon transporte. Aha! Si nous voulons peu perturber les électrons, nous ne devons pas diminuer l'*intensité* de la lumière, nous devons diminuer sa *fréquence* (la même chose que d'augmenter sa longueur d'onde). Utilisons une couleur plus rouge. Nous pouvons même utiliser une lumière infra-rouge, ou des ondes de radio (comme le radar), et « voir » où les électrons sont passés avec l'aide de certains équipements qui peuvent « voir »

la lumière à ces grandes longueurs d'ondes. Si nous utilisons une lumière moins « brutale » peut-être pourrions-nous éviter d'autant perturber les électrons.

Essayons l'expérience avec des ondes plus longues. Nous continuerons de répéter notre expérience chaque fois avec de la lumière de plus grande longueur d'onde. Au début, rien ne semble changer. Les résultats sont les mêmes. Il se produit ensuite une terrible chose. Vous vous souvenez que lorsque nous avons traité le microscope, nous avons indiqué que, à cause de la *nature ondulatoire* de la lumière, il y a une limitation sur la distance minimum possible entre deux points afin qu'ils soient toujours vus comme deux points séparés. Cette distance est de l'ordre de la longueur d'onde de la lumière. Ainsi, maintenant lorsque nous rendons la longueur d'onde plus grande que la distance entre les trous, nous voyons un *grand éclair* mal localisé lorsque la lumière est diffusée par les électrons. Nous ne pouvons plus du tout dire par quel trou l'électron est passé! Nous savons seulement qu'il est passé quelque part! Et c'est justement avec une lumière de cette couleur que nous trouvons que les coups donnés aux électrons sont si légers que P'_{12} se met à ressembler à P_{12} – que nous commençons d'obtenir certains effets d'interférences. Et ce n'est que pour des longueurs d'ondes beaucoup plus grandes que la séparation des deux trous (lorsque nous n'avons plus de chance du tout de dire par où l'électron est passé), que la perturbation de la lumière devient suffisamment petite pour que, à nouveau, nous obtenions la courbe P_{12} indiquée sur la Figure 37-3.

Dans notre expérience, nous trouvons qu'il est impossible d'aménager la lumière d'une manière telle que l'on puisse dire par quel trou l'électron est passé, et en même temps ne pas perturber le système. Heisenberg a suggéré que les nouvelles lois de la nature ne peuvent être cohérentes que s'il y a certaines limitations de base dans nos capacités expérimentales qui n'avaient pas encore été reconnues. Il a proposé, comme principe général, son *principe d'incertitude*, qui peut être énoncé comme suit en terme de notre expérience: « Il est impossible de construire un appareil pour déterminer par quel trou l'électron est passé qui ne perturbe pas en même temps les électrons au point de détruire les phénomènes d'interférence. » Si un appareil est capable de déterminer par quel trou l'électron est passé, il *ne peut pas* être assez délicat pour ne pas perturber le système d'une manière essentielle. Personne n'a jamais trouvé (ou même imaginé) une manière de contourner le principe d'incertitude. Ainsi nous devons supposer qu'il décrit une caractéristique fondamentale de la nature.

La théorie complète de la mécanique quantique que nous utilisons actuellement pour décrire les atomes et, en fait, toute la matière, dépend de l'exactitude du principe d'incertitude. Puisque la mécanique quantique est une théorie qui rend de grands services, notre confiance dans le principe d'incertitude en est d'autant renforcée. Mais si jamais une manière de « battre en brèche » le principe d'incertitude était découverte, la mécanique quantique donnerait des résultats incohérents et devrait être écartée en tant que théorie valable de la nature.

« Bien », dites-vous, « qu'en est-il de la Proposition A? Est-il vrai ou n'est-il *pas* vrai que l'électron est passé soit par le trou 1 soit par le trou 2? » La seule réponse qui peut être donnée est que nous avons trouvé à partir de l'expérience qu'il existe une certaine manière de penser nécessaire pour éviter les incohérences. Ce que nous devons dire (afin d'éviter de faire de fausses prédictions) est la chose suivante. Si l'on regarde les trous ou, plus précisément, si l'on dispose d'un appareil qui soit capable de déterminer si l'électron est passé soit par le trou 1 soit par le trou 2, alors on peut dire qu'il est passé par le trou 1 ou par le trou 2. *Mais*, lorsqu'on n'essaye

pas de dire par quel chemin l'électron s'est déplacé, quand il n'y a rien dans l'expérience pour perturber les électrons, alors on ne peut *pas* dire qu'un électron est passé soit par le trou 1 soit par le trou 2. Si on le dit, et qu'on essaye d'en tirer n'importe quelle déduction, on commettra des erreurs dans l'analyse. C'est là, la corde raide logique sur laquelle nous devons avancer si nous voulons décrire la nature avec succès.

Si le mouvement de toute matière – comme pour les électrons – doit être décrit en termes d'ondes, qu'en est-il des balles dans notre première expérience? Pourquoi ne voyons-nous pas de système d'interférence dans ce cas? Il apparaît que pour les balles, la longueur d'onde est si petite que les franges d'interférence deviennent extrêmement serrées. Si serrées, en fait, qu'avec un détecteur ordinaire de taille finie, on ne peut pas distinguer la séparation entre maxima et minima. Ce que nous voyions n'était qu'une sorte de moyenne, ce qui donnait la courbe classique. A la Figure 37-5, nous avons essayé d'indiquer schématiquement ce qui se passe avec des objets à grande échelle. La partie (a) de la figure montre la distribution de probabilité que l'on peut prédire pour des balles en utilisant la mécanique quantique. Les oscillations rapides représentent la figure d'interférence que l'on obtient pour des ondes de très courtes longueurs d'ondes. Tout détecteur physique recouvre différentes oscillations de la courbe de probabilité, de telle sorte que les mesures donnent la courbe continue dessinée à la partie (b) de la figure.

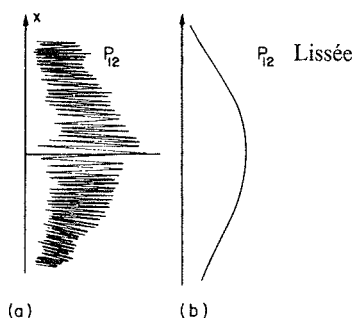


Fig. 37-5. Schéma d'interférence avec des balles: (a) réel (schématiquement), (b) observé.

37-7 Premiers principes de mécanique quantique

Nous écrirons maintenant un résumé des conclusions principales de nos expériences. Cependant nous donnerons à ces résultats une forme qui les rend applicables à une classe générale d'expériences semblables. Nous pouvons donner notre résumé plus simplement si nous définissons d'abord une « expérience idéale » comme étant une expérience dans laquelle il n'y a aucune influence externe incertaine, c'est-à-dire aucune agitation, ou d'autre chose dont on ne puisse pas tenir compte. Nous serons tout à fait précis si nous disons, « Une expérience idéale est une expérience dans laquelle toutes les conditions initiales et finales sont complètement précisées. » Ce que nous appelons « un événement » est, en général, simplement un ensemble particulier de conditions initiales et finales. (Par exemple: « un électron quitte le canon, arrive au détecteur et rien d'autre ne se passe ».) Maintenant, voilà notre résumé.

SOMMAIRE

- (1) La probabilité d'un événement dans une expérience idéale est donnée par le carré de la valeur absolue d'un nombre complexe φ qui est appelé l'amplitude de probabilité.

$$\begin{aligned} P &= \text{probabilité,} \\ \varphi &= \text{amplitude de probabilité,} \\ P &= |\varphi|^2. \end{aligned} \tag{37.6}$$

- (2) Lorsqu'un événement peut avoir lieu de différentes manières, au choix, l'amplitude de probabilité de l'événement est égale à la somme des amplitudes de probabilité pour chaque manière prise séparément. Il y a interférence.

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_1 + \phi_2, \\ P &= |\phi_1 + \phi_2|^2. \end{aligned} \tag{37.7}$$

- (3) Si une expérience est réalisée qui soit capable de déterminer si l'une ou l'autre des voies de l'alternative est effectivement choisie, la probabilité de l'événement est la somme des probabilités de chaque voie. L'interférence disparaît.

$$P = P_1 + P_2. \tag{37.8}$$

On peut avoir envie de demander: « Comment cela fonctionne-t-il? Quel est le mécanisme caché derrière les lois? » Personne n'a jamais trouvé aucun mécanisme derrière ces lois. Personne ne peut « expliquer » davantage ce que nous venons « d'expliquer ». Personne ne vous donnera de représentation plus profonde de la situation. Nous n'avons aucune idée d'un mécanisme plus fondamental à partir duquel ces résultats pourraient être déduits.

Nous aimerions insister sur une différence très importante entre la mécanique quantique et la mécanique classique. Nous avons parlé de la probabilité qu'un électron arrive dans certaines conditions. Nous avons supposé que dans notre dispositif expérimental (ou même dans le meilleur possible) il est impossible de prédire exactement ce qui va se passer. Nous ne pouvons que prédire les chances! Ceci veut dire, si c'est vrai, que la physique a renoncé d'essayer de prédire exactement ce qui va se passer dans des conditions bien déterminées. Oui! La physique a renoncé. *Nous ne savons pas comment prédire ce qui va se passer dans des conditions données,* et nous pensons maintenant que c'est impossible, que la seule chose qui peut être prédite est la probabilité de différents événements. On est obligé de reconnaître que ceci est un recul par rapport à notre idéal antérieur de compréhension de la nature. Il se peut que ce soit un pas en arrière, mais personne n'a encore vu de manière de l'éviter.

Nous allons faire maintenant quelques remarques sur une suggestion qui a quelquefois été avancée pour essayer d'éviter la description que nous venons de donner: « Peut-être l'électron possède-t-il certains rouages internes – certaines variables internes – que nous ne connaissons pas encore maintenant. Peut-être est-ce pour cela que nous ne pouvons prédire ce qui va se passer. Si nous pouvions examiner l'électron de plus près, nous serions capables de dire où il va se rendre. » Pour autant que nous sachions, ceci est impossible. Nous serions encore en difficulté. Supposez que nous fassions l'hypothèse qu'à l'intérieur d'un électron, existe un certain type de mécanisme qui détermine l'endroit où il va se rendre. Cette machine doit également déterminer par quel trou il

va passer. Et nous ne devons pas oublier que ce qui est à l'intérieur de l'électron ne doit pas être dépendant de ce que *nous* faisons, et en particulier du fait d'ouvrir ou de fermer l'un des trous. Si donc un électron, avant qu'il ne parte, a déjà arrêté son choix (a) sur le trou qu'il utilisera et (b) sur l'endroit où il tombera, nous devons trouver P_1 pour ces électrons qui ont choisi le trou 1, P_2 pour ces électrons qui ont choisi le trou 2, et *nécessairement* la somme $P_1 + P_2$ pour ceux qui passent par l'un ou l'autre des deux trous. Il ne semble pas possible de tourner ce raisonnement. Mais nous avons vérifié expérimentalement que ceci n'est pas le cas. Et personne n'a trouvé une manière de résoudre cette énigme. Ainsi à l'heure actuelle, nous devons nous limiter au calcul des probabilités. Nous disons « à l'heure actuelle », mais nous soupçonnons fortement que c'est là quelque chose qui restera avec nous pour toujours – qu'il est impossible de triompher de cette énigme – que c'est l'aspect *réel* de la nature.

37-8 Le principe d'incertitude

Voici la manière dont Heisenberg a énoncé initialement le principe d'incertitude: Si vous faites la mesure sur un objet quelconque, et que vous pouvez déterminer la composante x de sa quantité de mouvement avec une incertitude Δp , vous ne pouvez pas, en même temps, connaître sa position x avec plus de précision que $\Delta x = h/\Delta p$. Les incertitudes dans la position et la quantité de mouvement doivent avoir à chaque instant un produit plus grand que la constante de Planck. C'est un cas particulier du principe d'incertitude qui a été énoncé ci-dessus d'une manière plus générale. L'énoncé plus général était qu'on ne peut en aucun cas concevoir un appareil pour déterminer laquelle des deux possibilités a été choisie sans en même temps détruire le système d'interférence.

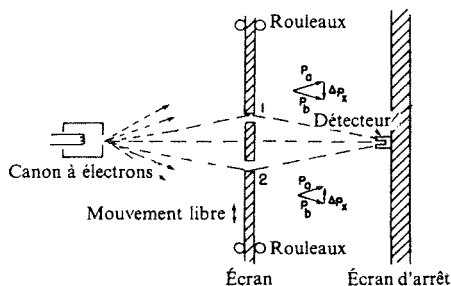


Fig. 37-6. Une expérience dans laquelle on mesure le recul du premier écran.

Montrons pour un cas particulier que le type de relation donné par Heisenberg doit être juste, afin d'éviter d'avoir des ennuis. Nous imaginons une modification de l'expérience de la Figure 37-3, suivant laquelle la paroi comportant les trous est en réalité une plaque montée sur des glissières, de telle sorte qu'elle peut se déplacer librement vers le haut et vers le bas (dans la direction x), comme indiqué sur la Figure 37-6. En regardant attentivement le mouvement de la plaque, nous pouvons essayer de dire par quel trou est passé un électron. Imaginons ce qui se passe lorsque le détecteur est en $x=0$. Nous nous attendons à ce qu'un électron qui passe au travers du trou 1 soit dévié vers le bas par la plaque pour atteindre le détecteur. Puisque la composante verticale de la quantité de mouvement de l'électron est modifiée, la plaque doit reculer avec une

égale quantité de mouvement dans la direction opposée. La plaque va donc subir une poussée vers le haut. Si l'électron traverse le trou le plus bas, la plaque doit sentir une poussée vers le bas. Il est clair que pour chaque position du détecteur, la quantité de mouvement reçue par la plaque aura une valeur différente pour une traversée par le trou 1 et une traversée par le trou 2. Ainsi donc ! Sans perturber *du tout* les électrons, simplement en regardant la *plaque*, nous pouvons dire quelle trajectoire l'électron a empruntée.

Mais pour ce faire, il est nécessaire de savoir quelle est la quantité de mouvement de l'écran avant que l'électron ne le traverse. Ainsi, lorsque nous mesurons la quantité de mouvement après que l'électron soit passé, nous pouvons trouver de combien la quantité de mouvement du plan a varié. Mais souvenez-vous, selon le principe d'incertitude nous ne pouvons en même temps connaître la position du plan avec une précision quelconque. Mais si nous ne savons pas exactement *où* se trouve le plan, nous ne pouvons pas dire précisément où sont les deux trous. Ils seront en un endroit différent pour chaque électron qui traverse. Ceci signifie que le centre de notre figure d'interférence aura une position différente pour chaque électron. Les oscillations du système d'interférence vont se chevaucher et disparaître. Nous montrerons quantitativement au chapitre suivant que si nous déterminons la quantité de mouvement de la plaque avec une précision suffisante pour déterminer à partir des mesures de recul quel trou a été utilisé, alors l'incertitude dans la position x de la plaque sera, selon le principe d'incertitude, suffisante pour décaler la figure d'interférence observée du détecteur dans la direction x et dans les deux sens d'une distance a peu près égale à la distance entre un maximum et le minimum le plus proche. Un tel décalage au hasard est juste suffisant pour brouiller suffisamment la figure pour qu'aucune interférence ne soit plus observée.

Le principe d'incertitude « protège » la mécanique quantique. Heisenberg a reconnu que s'il était possible de mesurer la quantité de mouvement et la position simultanément avec une plus grande précision, la mécanique quantique s'effondrerait. Ainsi il proposa que cela ne pouvait être possible. Alors les gens se mirent au travail pour trouver des manières d'y parvenir et personne jusqu'ici n'a réussi à trouver un moyen de mesurer la position et la quantité de mouvement de quelque chose – un écran, un électron, une boule de billard, n'importe quoi – avec une plus grande précision. La mécanique quantique maintient donc son existence périlleuse mais précise.

La relation entre les points de vue ondulatoire et corpusculaire

38-1 Amplitudes d'onde de probabilité

38-2 Mesure de la position et de la quantité de mouvement

38-3 Diffraction cristalline

38-4 La dimension d'un atome

38-5 Niveaux d'énergie

38-6 Implications philosophiques

38-1 Amplitudes d'onde de probabilité

Dans ce chapitre nous parlerons de la relation entre les points de vue ondulatoires et corpusculaires. Nous savons déjà, depuis le chapitre précédent, que ni le point de vue ondulatoire ni le point de vue corpusculaire ne sont corrects. D'habitude nous avons essayé de présenter les choses avec précision, ou au moins suffisamment précisément pour qu'il ne soit pas nécessaire de les changer lorsque nous en apprendrons davantage – elles peuvent être approfondies mais elles ne seront pas modifiées! Mais lorsque nous essayons de parler de la description ondulatoire ou de la description corpusculaire, toutes les deux sont approchées et toutes les deux devront être modifiées. Ainsi ce que nous apprendrons dans ce chapitre, dans un certain sens, ne sera pas précis; c'est une espèce de raisonnement à moitié intuitif qui plus tard sera rendu plus précis, mais certains aspects seront un petit peu modifiés lorsque nous les interpréterons correctement en mécanique quantique. La raison pour laquelle nous faisons cela vient, bien sûr, du fait que nous ne traiterons pas à fond la mécanique quantique, mais que nous voulons avoir au moins une certaine idée des genres d'effets que nous rencontrerons. De plus, toutes nos expériences se réalisent en pratique avec des ondes et des particules, et ainsi il est assez commode d'utiliser les notions d'ondes et de particules pour parvenir à une certaine compréhension de ce qui se passe dans des circonstances données, avant que nous ne connaissions complètement les mathématiques des amplitudes de la mécanique quantique. Nous essayerons de mettre en évidence les endroits les plus faibles au fur et à mesure de notre progression, mais la plus grande partie de ce que nous ferons sera pratiquement correct – ce n'est qu'une question d'interprétation.

Pour commencer, nous savons que la nouvelle manière de représenter le monde en mécanique quantique – la nouvelle structure – consiste à donner une amplitude pour chaque événement qui peut se produire, et si l'événement comporte la réception d'une particule, alors nous pouvons donner l'amplitude de trouver cette particule en différents endroits et à différents instants. La probabilité de trouver la particule est alors proportionnelle au carré du module de l'amplitude. En général, l'amplitude de trouver une particule en différents endroits, à différents instants, varie avec la position et le temps.

Dans un cas particulier l'amplitude varie sinusoidalement dans l'espace et le temps comme $e^{i(\omega t - k \cdot r)}$ (n'oubliez pas que ces amplitudes sont des nombres complexes et non des nombres

réels) et possède une fréquence définie ω et un nombre d'onde k . Il se trouve alors que ceci correspond à la limite à une situation classique dans laquelle nous avons une particule dont l'énergie E est connue et est reliée à la fréquence par

$$E = \hbar\omega, \quad (38.1)$$

et dont la quantité de mouvement P est également connue et reliée au nombre d'onde par

$$p = \hbar k. \quad (38.2)$$

Cela signifie que la notion de particule est limitée. Le concept d'une particule – sa position, sa quantité de mouvement, etc. – que nous utilisons tant, n'est pas, en un certain sens, satisfaisant. Par exemple, si une amplitude de trouver une particule en différents endroits est donnée par $e^{i(\omega t - k \cdot r)}$, dont le module au carré est une constante, cela signifie que la probabilité de trouver une particule est la même en tous les points. Cela signifie que nous ne savons pas où elle se trouve – elle peut être n'importe où – il y a une grande incertitude dans sa position.

D'un autre côté, si la position d'une particule est plus ou moins bien connue et que nous puissions la prévoir avec une bonne précision, alors la probabilité de la trouver en différents endroits doit être confinée à une certaine région, dont la longueur est appelée Δx . A l'extérieur de cette région, la probabilité est nulle. Or cette probabilité est le carré du module de l'amplitude, et si le carré du module est nul, l'amplitude l'est également, de telle sorte que nous avons un train d'onde dont la longueur est Δx (Fig. 38-1), et la longueur d'onde (la distance entre deux nœuds successifs dans le train d'ondes) de ce train d'ondes correspond à la quantité de mouvement de la particule.

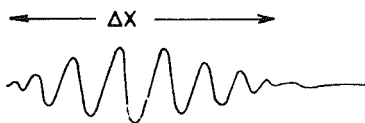


Fig. 38-1. Un paquet d'onde de longueur Δx .

Nous rencontrons, à cet endroit, un fait étrange concernant les ondes; une chose très simple qui n'a rien à voir avec la mécanique quantique, à strictement parler. C'est quelque chose de connu par tous ceux qui utilisent les ondes, même s'ils ne connaissent rien à la mécanique quantique: à savoir que *nous ne pouvons pas définir une longueur d'onde unique pour un court train d'ondes*. Un tel train d'ondes ne possède pas une longueur d'onde définie; il y a incertitude sur le nombre d'onde qui est liée à la longueur finie du train, et donc il y a incertitude sur la quantité de mouvement.

38-2 Mesure de la position et de la quantité de mouvement

Considérons deux exemples de cette idée – pour voir la raison pour laquelle il y a incertitude sur la position et/ou sur la quantité de mouvement, si la mécanique quantique est correcte. Nous avons également vu précédemment que si cela n'avait pas lieu – s'il était possible de mesurer la position et la quantité de mouvement de quelque chose simultanément – nous serions en face d'un paradoxe; il est heureux que nous ne nous trouvions pas face à un tel paradoxe, et le fait

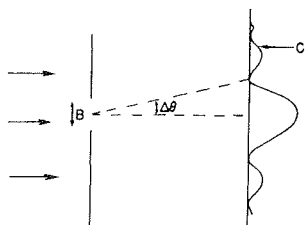


Fig. 38-2. Diffraction de particules traversant une fente.

qu'une telle incertitude provienne naturellement de la description ondulatoire montre que tout est mutuellement cohérent.

Voici un exemple qui montre la relation entre la position et la quantité de mouvement dans une circonstance qui est facile à comprendre. Supposez que nous ayons une seule fente et que des particules arrivent de très loin avec une certaine énergie – de telle sorte qu'elles arrivent toutes essentiellement horizontalement (Fig. 38-2). Nous allons nous intéresser aux composantes verticales de la quantité de mouvement. Toutes ces particules ont une certaine quantité de mouvement horizontale, p_o , par exemple, au sens classique. Ainsi, dans le sens classique, la quantité de mouvement verticale p_y , avant que la particule ne passe par le trou est définitivement connue. La particule ne se déplace ni vers le haut ni vers le bas, parce qu'elle provient d'une source qui est extrêmement éloignée – et ainsi la quantité de mouvement verticale est, bien entendu, nulle. Mais supposons maintenant qu'elle traverse un trou dont la largeur est B . Après qu'elle ait traversé le trou, nous connaissons sa position verticale – la position y – avec une précision considérable à savoir $\pm B$. C'est-à-dire que l'incertitude en position, Δy , est de l'ordre de B . Nous aimerions dire maintenant, puisque nous savons que la quantité de mouvement est absolument horizontale, que Δp_y est nul; mais ceci est faux. Nous avons vu à un certain moment que la quantité de mouvement était horizontale, mais nous ne le savons plus maintenant. Avant que les particules ne traversent le trou, nous ne connaissons pas leurs positions verticales. Maintenant que nous avons trouvé la position verticale en ayant fait traverser le trou par la particule, nous avons perdu notre information sur la quantité de mouvement verticale! Pourquoi? Selon la théorie ondulatoire, il y a élargissement, ou diffraction, des ondes après qu'elles aient traversé la fente, comme pour la lumière. Il y a donc une certaine probabilité que les particules traversant la fente ne sortent pas dans le prolongement. L'onde est dispersée par l'effet de diffraction et l'angle de dispersion, que nous pouvons définir comme l'angle du premier minimum, est une mesure de l'incertitude sur l'angle final.

Comment cette dispersion s'opère-t-elle? Dire qu'il y a dispersion, signifie qu'il y a une certaine chance que la particule se déplace vers le haut ou vers le bas, c'est-à-dire qu'elle ait une composante de quantité de mouvement vers le haut ou vers le bas. Nous disons *chance* et *particule* parce que nous pouvons détecter ce système de diffraction avec un compteur à particules, et lorsque le compteur reçoit la particule, par exemple, en C sur la Figure 38-2, il reçoit la particule *entière*, de telle sorte que dans un sens classique, la particule possède une quantité de mouvement verticale afin de monter de la fente jusque C.

Pour obtenir une idée approchée de la dispersion de la quantité de mouvement, la quantité de mouvement verticale p_y a une dispersion qui est égale à $p_o \Delta\theta$, où p_o est la quantité de mouvement horizontale. Quelle est la grandeur de $\Delta\theta$ dans le cas de la dispersion? Nous savons que le premier minimum se produit pour un angle $\Delta\theta$ tel que les ondes venant d'un des bords de la fente doivent parcourir une longueur d'onde de plus que les ondes venant de l'autre côté – nous avons calculé cela

précédemment (Chapitre 30). Donc $\Delta\theta$ vaut λ/B , et ainsi Δp_y dans l'expérience vaut $p_0\lambda/B$. Remarquez que si nous diminuons B et que nous effectuons une mesure de plus en plus précise de la position de la particule, la figure de diffraction s'élargit de plus en plus. Souvenez-vous que lorsque nous fermions les fentes dans l'expérience avec les micro-ondes, nous obtenions davantage d'intensité dans des directions plus écartées. Ainsi plus nous rendons étroite la fente, plus la figure de diffraction s'élargit, et plus grande est la probabilité de trouver que la particule possède une quantité du mouvement latérale. Ainsi l'incertitude sur la quantité de mouvement verticale est inversement proportionnelle à l'incertitude sur y . En fait, nous voyons que le produit des deux est égal à $p_0\lambda$. Mais λ est la longueur d'onde et p_0 est la quantité de mouvement, et selon la mécanique quantique, la longueur d'onde que multiplie la quantité de mouvement est égale à la constante de Planck h . Ainsi nous obtenons la règle que les incertitudes sur la quantité de mouvement verticale et la position verticale ont un produit de l'ordre de h :

$$\Delta y \Delta p_y \approx h. \quad (38.3)$$

Nous ne pouvons pas préparer un système dans lequel nous connaissons la position verticale d'une particule et pour lequel nous puissions prédire comment elle va se déplacer verticalement avec une certitude plus grande que celle donnée par (38.3). C'est-à-dire que l'incertitude sur la quantité de mouvement verticale doit dépasser $h/\Delta y$, où Δy est l'incertitude dans notre connaissance sur la position.

Les gens disent parfois que la mécanique quantique est complètement fausse. Lorsque la particule arrivait de la gauche, sa quantité de mouvement verticale était nulle. Et maintenant qu'elle a traversé la fente, sa position est connue. A la fois la position et la quantité de mouvement semblent être connues avec une précision arbitraire. Il est tout à fait vrai que nous pouvons recevoir une particule, et à sa réception déterminer quelle est sa position et quelle est sa quantité de mouvement pour atteindre ce point. C'est vrai, mais ce n'est pas ce à quoi se rapporte la relation d'incertitude (38.3). L'équation (38.3) se rapporte à la *possibilité de prévision* sur les conditions expérimentales, et non pas à des remarques sur le *passé*. Il est inutile de dire, « Je savais quelle était sa quantité de mouvement avant qu'elle ne traverse la fente et maintenant je connais sa position », parce que maintenant la connaissance de la quantité de mouvement est perdue. Le fait qu'elle traverse la fente ne nous permet plus maintenant de prédire la quantité de mouvement verticale. Nous parlons d'une théorie qui prédit et pas simplement de mesure après réalisation. Ainsi nous devons parler de ce que nous pouvons prédire.

Prenons maintenant la chose dans l'autre sens. Prenons un autre exemple du même phénomène, un petit peu plus quantitatif. Dans l'exemple précédent nous avons mesuré la quantité de mouvement par une méthode classique. A savoir: nous avons considéré la direction et la vitesse et les angles, etc., de telle sorte que nous avons obtenu la quantité de mouvement par une méthode classique. Mais puisque la quantité de mouvement est reliée au nombre d'ondes, il existe encore dans la nature une autre manière de mesurer la quantité de mouvement d'une particule – photon ou autre – qui n'a pas d'analogue classique parce qu'elle utilise l'équation (38.2). Nous mesurons *les longueurs d'ondes des ondes*. Essayons de mesurer la quantité de mouvement de cette manière.

Supposons que nous ayons un réseau avec un grand nombre de lignes (Fig. 38-3), et que nous envoyions un faisceau de particules sur le réseau. Nous avons souvent traité ce problème: si les particules possèdent une quantité de mouvement définie, alors nous obtenons un maximum extrêmement étroit dans une certaine direction, à cause de l'interférence. Et nous avons également parlé de la précision avec laquelle nous pouvions déterminer cette quantité de mouvement, c'est-à-dire du pouvoir de résolution d'un tel réseau. Plutôt que de le recalculer, nous nous reportons au Chapitre 30, où

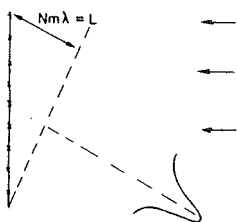


Fig. 38-3. Détermination de la quantité de mouvement en utilisant un réseau de diffraction.

nous avons trouvé que l'incertitude relative de la longueur d'onde qui peut être mesurée avec un réseau de diffraction est $1/Nm$, où N est le nombre de raies sur le réseau et m est l'ordre de diffraction. C'est-à-dire

$$\Delta\lambda/\lambda = 1/Nm. \quad (38.4)$$

La formule (38.4) peut maintenant être réécrite

$$\Delta\lambda/\lambda^2 = 1/Nm\lambda = 1/L, \quad (38.5)$$

où L est la distance indiquée sur la Figure 38-3. Cette distance est la différence entre la distance totale que la particule ou l'onde ou quoi que ce soit d'autre doit parcourir lorsqu'elle est réfléchiée depuis le bas du réseau, et la distance qu'elle doit parcourir lorsqu'elle est réfléchiée à partir du sommet du réseau. C'est-à-dire que les ondes qui forment la figure de diffraction sont des ondes qui viennent de différentes parties du réseau. La première qui arrive provient de l'extrémité inférieure du réseau, du début du train d'ondes, et le reste provient de régions ultérieures du train d'ondes venant de différentes parties du réseau jusqu'au moment où la dernière arrive enfin et celle-ci contient un point dans le train d'ondes se trouvant à une distance L derrière le premier point. Ainsi afin d'avoir une raie étroite dans notre spectre correspondant à une quantité de mouvement définie avec une incertitude donnée par (38.4), il nous faut un train de longueur minimum L . Si le train d'ondes est trop court nous n'utilisons pas le réseau entier. Les ondes qui forment le spectre ne sont réfléchies que sur un secteur extrêmement limité du réseau si le train d'ondes est trop court, et le réseau ne fonctionnera pas correctement – nous trouverons une grande dispersion angulaire. Afin d'en obtenir une plus faible, il nous faut utiliser la totalité du réseau, de telle sorte qu'à moins à un certain moment tout le train d'ondes soit diffusé simultanément par toutes les parties du réseau. Ainsi le train d'ondes doit avoir une longueur L afin d'obtenir une incertitude sur la longueur d'onde inférieure à celle donnée par (38.5). Incidemment,

$$\Delta\lambda/\lambda^2 = \Delta(1/\lambda) = \Delta k/2\pi. \quad (38.6)$$

Donc

$$\Delta k = 2\pi/L, \quad (38.7)$$

où L est la longueur du train d'ondes.

Ceci signifie que si nous avons un train d'ondes dont la longueur est inférieure à L , l'incertitude sur le nombre d'ondes doit dépasser $2\pi/L$. Or, l'incertitude sur le nombre d'ondes que multiplie la longueur du train d'ondes – nous l'appellerons Δx pour un instant –

dépasse 2π . Nous l'appellerons Δx parce que c'est l'incertitude sur la position de la particule. Si le train d'ondes n'existe que sur une longueur finie, alors c'est bien là que nous pouvons trouver la particule, avec une incertitude Δx . Cette propriété des ondes, que la longueur du train d'ondes que multiplie l'incertitude du nombre d'ondes associé, soit au moins 2π , est une propriété qui est connue de tous ceux qui étudient les ondes. Elle n'a rien à voir avec la mécanique quantique. Elle est simplement due au fait que nous avons un train fini, nous ne pouvons pas compter très précisément les ondes qui lui appartiennent. Essayons encore une autre manière d'en voir la raison.

Supposez que nous ayons un train fini de longueur L ; à cause de la manière avec laquelle il doit diminuer aux extrémités, comme sur la Figure 38-1, le nombre d'ondes dans la longueur L est incertain de quelque chose comme ± 1 . Mais le nombre des ondes dans L est $kL/2\pi$. Ainsi k est incertain et à nouveau nous obtenons le résultat (38.7), une simple propriété des ondes. La même chose s'applique que les ondes se trouvent dans l'espace, que k soit le nombre de radians par centimètre et L la longueur du train, ou que les ondes soient dans le temps, que ω soit le nombre d'oscillations par seconde et T la « longueur » en temps du train d'ondes. C'est-à-dire: si nous avons un train d'ondes qui ne dure que pendant un certain temps fini T , alors l'incertitude dans la fréquence est donnée par

$$\Delta\omega = 2\pi/T. \quad (38.8)$$

Nous avons essayé d'insister sur le fait que nous rencontrons là les propriétés des ondes elles-mêmes, qui sont bien connues, par exemple, dans la théorie du son.

L'aspect important est qu'en mécanique quantique nous interprétons le nombre d'ondes comme étant une mesure de la quantité de mouvement d'une particule, avec la règle que $p = \hbar k$, de sorte que la relation (38.7) nous dit que $\Delta p \approx \hbar/\Delta x$. Ceci est une limitation de l'idée classique de quantité de mouvement. (Elle doit naturellement être limitée d'une certaine manière, si nous devons représenter les particules par des ondes!) C'est bien d'avoir trouvé une règle qui nous donne une certaine idée du moment où se produit une rupture dans les conceptions classiques!

38-3 Diffraction cristalline

Considérons maintenant la réflexion d'ondes corpusculaires par un cristal. Un cristal est une chose volumineuse qui contient tout un ensemble d'atomes semblables – nous introduirons quelques complications ultérieurement – disposés dans un réseau bien formé. La question est de savoir comment disposer le réseau de telle sorte que nous obtenions un maximum intense de lumière réfléchie dans une direction donnée par un faisceau donné, par exemple, de lumière (rayons X), d'électrons, de neutrons ou de n'importe quoi d'autre. Afin d'obtenir une réflexion intense, la diffusion de tous les atomes doit être en phase. S'il y en a un même nombre en phase et en opposition de phase, les ondes se détruisent. La manière de disposer le réseau consiste à trouver les régions de phase constante, comme nous l'avons déjà expliqué; ce sont des plans qui forment des angles égaux avec les directions initiale et finale (Fig. 38-4).

Si nous considérons deux plans parallèles, comme sur la Figure 38-4, les ondes diffusées par les deux plans seront en phase pourvu que la différence de parcours pour un front d'onde soit un nombre entier de longueurs d'ondes. On peut voir que cette différence est égale à $2d \sin \theta$, où d est la distance perpendiculaire entre les plans. Ainsi la

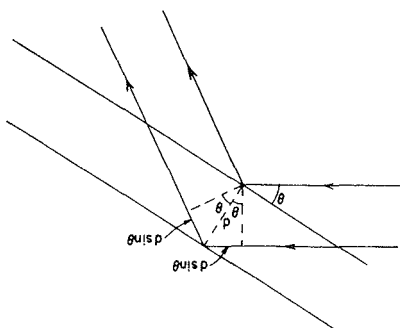


Fig. 38-4. Diffusion des ondes par les plans cristallins.

condition de réflexion cohérente est

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (38.9)$$

Si, par exemple, le cristal est tel que les atomes se trouvent situés dans des plans obéissant à la condition (38.9) avec $n = 1$, il y aura alors une réflexion intense. Si par contre, il y a des atomes de même nature (en égale densité) à mi-chemin entre les deux plans, les plans intermédiaires vont également diffuser fortement, vont interférer avec les autres et ne produiront aucun effet. Ainsi d dans (38.9) doit se rapporter à des plans *adjacents*; nous ne pouvons pas prendre un plan, cinq couches plus loin, et utiliser cette formule!

En fait, les cristaux réels ne sont pas habituellement aussi simples que ce modèle répétant un type d'atome d'une certaine manière. Au lieu de cela, si nous en cherchons un analogue à deux dimensions, il ressemble beaucoup plus à ce papier que l'on met sur les murs, sur lequel sont tracées certaines figures qui se répètent régulièrement. Par « figure » nous voulons dire, dans le cas des atomes, un certain arrangement – du calcium, un carbone et trois oxygènes, etc., pour le carbonate de calcium etc., – qui peut contenir un assez grand nombre d'atomes. Mais quelle qu'elle soit, la figure est répétée régulièrement. Cette figure de base est appelée une *maille élémentaire*.

Le schéma fondamental de répétition définit ce que nous appelons le *type de réseau*; le type de réseau peut être immédiatement déterminé en regardant les réflexions et en cherchant quelle est la symétrie. En d'autres termes, les endroits où nous trouvons une réflexion *quelconque* déterminent le type de réseau, mais afin de déterminer ce que contient chacun des éléments du réseau, on doit prendre en considération l'*intensité* de la diffusion dans les diverses directions. La *direction* de la diffusion dépend du type de réseau, mais l'*intensité*

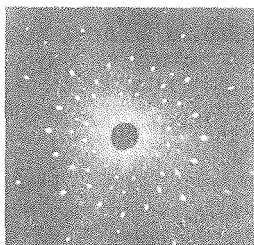


Figure 38-5.

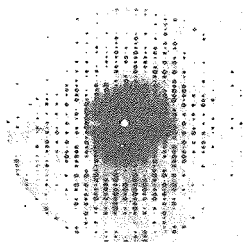


Figure 38-6.

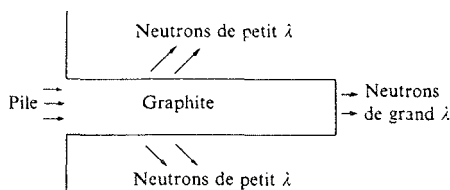


Fig. 38-7. Diffusion des neutrons d'une pile par un bloc de graphite.

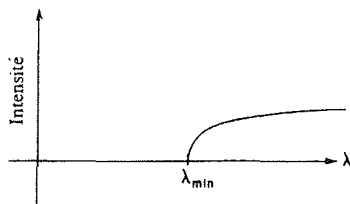


Fig. 38-8. Intensité des neutrons sortant d'un barreau de graphite en fonction de la longueur d'onde.

de chaque diffusion est liée à ce qui se trouve dans chaque maille élémentaire, et c'est ainsi que l'on détermine la structure des cristaux.

Deux photographies de figures de diffraction avec des rayons X sont montrées sur les Figures 38-5 et 38-6; elles illustrent la diffusion respectivement du sel gemme et de la myoglobine.

Incidentement, une chose intéressante se passe lorsque l'espacement des plans les plus proches est inférieur à $\lambda/2$. Dans ce cas (38.9) n'a pas de solution pour n . Si donc λ est plus grand que deux fois la distance entre les plans adjacents, il n'y a pas de figure de diffraction, et la lumière – ou quoi que ce soit d'autre – traverse directement le matériau sans rebondir ou sans se perdre. Ainsi, dans le cas de la lumière, où λ est beaucoup plus grand que l'espacement, celle-ci bien entendu traverse et il n'y a pas de réflexion sur les plans du cristal.

Ce fait a également une intéressante conséquence dans le cas des piles qui fabriquent des neutrons (ce sont manifestement des particules, sans contestation possible!) Si nous prenons ces neutrons et les laissons avancer dans un long bloc de graphite, les neutrons diffusent et se frayent un chemin tout du long (Fig. 38-7). Ils diffusent parce qu'ils rebondissent sur les atomes, mais en stricte théorie ondulatoire, ils sont renvoyés par les atomes à cause de la diffraction sur les plans du cristal. Il se trouve que si nous prenons un très long morceau de graphite, les neutrons qui sortent à l'extrémité sont tous de grandes longueurs d'ondes! En fait, si l'on porte l'intensité en fonction de la longueur d'onde, nous n'obtenons rien sauf pour des longueurs d'ondes plus grandes qu'un certain minimum (Fig. 38-8). En d'autres termes, nous pouvons obtenir des neutrons extrêmement lents de cette manière. Seuls les neutrons les plus lents traversent; ils ne sont pas diffractés ou diffusés par les plans du cristal de graphite, mais avancent comme la lumière qui traverse le verre et ne sont pas diffusés vers les côtés. Il y a beaucoup d'autres démonstrations de la réalité des ondes de neutrons ainsi que des ondes d'autres particules.

38-4 La dimension d'un atome

Nous considérons maintenant une autre application de la relation d'incertitude, eq. (38.3). Elle ne doit pas être considérée trop sérieusement. L'idée est correcte, mais le calcul n'est pas très précis. L'idée concerne la détermination de la dimension des atomes et le fait que, classiquement, les électrons émettraient de l'énergie et s'enfonceraient en spirale jusqu'à ce qu'ils se trouvent tout contre le noyau. Mais ceci ne peut pas se réaliser du point de vue de la mécanique quantique, parce que nous saurions alors où chaque électron se trouve et à quelle vitesse il se déplace.

Supposez que nous ayons un atome d'hydrogène et que nous mesurons la position de l'électron; nous ne devons pas être en mesure de savoir où exactement l'électron se trouve, ou alors l'incertitude sur la quantité de mouvement tendra vers l'infini. Chaque fois que nous regardons l'électron, il est quelque part, mais il a une amplitude de se trouver en différents endroits et donc il existe une probabilité de le trouver en différents endroits. Ces endroits ne peuvent pas tous être au noyau; nous supposons qu'il y a une dispersion de position de l'ordre de a . C'est-à-dire que la distance de l'électron au noyau est habituellement de l'ordre de a . Nous déterminerons a en minimisant l'énergie totale de l'atome.

La dispersion de la quantité de mouvement est approximativement h/a , à cause de la relation d'incertitude, si donc nous essayons de mesurer la quantité de mouvement de l'électron d'une certaine manière, par exemple en faisant diffuser des rayons X et en regardant l'effet Doppler d'un centre diffuseur en mouvement, nous nous attendons à ne pas trouver zéro chaque fois – l'électron n'est pas au repos – la quantité de mouvement doit être de l'ordre de $p \approx h/a$. L'énergie cinétique est alors approximativement $\frac{1}{2}mv^2 = p^2/2m = h^2/2ma^2$. (En un sens, c'est une sorte de calcul dimensionnel pour trouver de quelle manière l'énergie cinétique dépend de la constante de Planck, de m et de la dimension de l'atome. Nous ne devons pas croire notre réponse à mieux d'un facteur 2 ou π près, etc. Nous n'avons même pas défini a très précisément.) L'énergie potentielle est égale à moins e^2 divisé par la distance au centre, $-e^2/a$, où, nous nous en souvenons, e^2 est la charge de l'électron au carré, divisée par $4\pi\epsilon_0$. Ce qui est maintenant important, c'est que l'énergie potentielle est réduite si a diminue, mais plus a est petit, plus la quantité de mouvement est grande à cause du principe d'incertitude, et de ce fait, plus l'énergie cinétique est élevée. L'énergie totale vaut

$$E = h^2/2ma^2 - e^2/a. \quad (38.10)$$

Nous ne savons pas ce que vaut a , mais nous savons que l'atome va s'arranger pour réaliser une sorte de compromis afin que l'énergie soit aussi petite que possible. Pour rendre E minimum, nous dérivons par rapport à a , rendons la dérivée nulle et calculons a . La dérivée de E est

$$dE/da = -h^2/ma^3 + e^2/a^2, \quad (38.11)$$

et écrivant $dE/da = 0$, cela donne pour a la valeur

$$\begin{aligned} a_0 &= h^2/me^2 = 0,528 \text{ angström} \\ &= 0,528 \times 10^{-10} \text{ mètre.} \end{aligned} \quad (38.12)$$

Cette distance particulière est appelée le *rayon de Bohr*, et nous avons donc appris que les dimensions atomiques sont de l'ordre de l'angström, ce qui est correct: Ce n'est pas mal du tout – en fait, c'est étonnant, puisque jusqu'à maintenant nous n'avions eu aucun moyen de comprendre la dimension des atomes! Les atomes sont complètement impossibles à comprendre du point de vue classique, puisque les électrons devraient tomber sur le noyau.

Si maintenant nous introduisons la valeur (38.12) de a_0 dans (38.10) pour trouver l'énergie, il vient

$$E_0 = -e^2/2a_0 = -me^4/2h^2 = -13.6 \text{ ev.} \quad (38.13)$$

Qu'est-ce que signifie une énergie négative? Cela signifie que l'électron a moins d'énergie lorsqu'il se trouve dans l'atome que lorsqu'il est libre. Cela signifie qu'il est lié. Cela signifie qu'il faut de l'énergie pour arracher l'électron; il faut une énergie de l'ordre de 13,6 eV pour ioniser un atome d'hydrogène. Nous n'avons aucune raison de penser que ce n'est pas deux ou trois fois ceci – ou la moitié de ceci – ou $(1/\pi)$ fois ceci, parce que notre raisonnement était un peu rapide! Cependant, nous avons triché, nous avons utilisé toutes les constantes de telle manière que l'on obtienne le bon résultat! Ce nombre, 13,6 électron volts, est appelé un Rydberg d'énergie; c'est l'énergie d'ionisation de l'hydrogène.

Nous comprenons donc maintenant pourquoi nous ne passons pas au travers du plancher. Lorsque nous marchons, nos chaussures avec leur masses d'atomes poussent le plancher et sa masse d'atomes. Afin de comprimer les atomes, il faudrait confiner les électrons dans un plus petit espace, et à cause du principe d'incertitude, leurs quantités de mouvement devraient être plus grandes en moyenne, ce qui signifie une grande énergie; la résistance à la compression atomique est un effet de mécanique quantique et non un effet classique. Classiquement nous nous attendons à ce que l'énergie diminue encore si nous rapprochons tous les électrons et tous les protons, et la meilleure disposition des charges positives et négatives au sens de la physique classique est donnée par le rapprochement maximum. Ceci était bien connu en physique classique et restait une énigme à cause de l'existence de l'atome. Bien entendu, les premiers savants inventèrent différentes manières de s'en sortir – mais cela n'a pas d'importance, nous avons la *bonne* manière maintenant! (Peut-être.)

Incidemment, bien que nous n'ayons aucune raison de le comprendre maintenant, dans une configuration comportant de nombreux électrons, ceux-ci essayent de s'écarter les uns des autres. Si un électron occupe une certaine place, alors un autre n'occupera pas la même place. Plus précisément, il y a deux cases pour le spin, de sorte que deux électrons peuvent être l'un contre l'autre, l'un tournant dans un sens et l'autre dans l'autre sens. Mais après cela, nous ne pouvons pas en mettre davantage à cet endroit. Nous devons mettre les autres ailleurs, et c'est la raison réelle pour laquelle la matière est rigide. Si nous pouvions placer tous les électrons au même endroit, elle se condenserait plus qu'elle ne le fait. C'est le fait que les électrons ne puissent pas tous aller les uns sur les autres qui rend les tables solides, ainsi que tout le reste.

Évidemment, afin de comprendre les propriétés de la matière, nous devons utiliser la mécanique quantique et ne pas nous satisfaire de la mécanique classique.

38-5 Niveaux d'énergie

Nous avons parlé de l'atome dans son état d'énergie le plus bas possible, mais il se trouve que l'électron peut faire d'autres choses. Il peut s'agiter et osciller d'une manière plus énergique et il peut ainsi y avoir différents mouvements de l'atome. Selon la mécanique quantique, l'atome dans un état stationnaire ne peut avoir que des énergies définies. Nous dessinons un diagramme (Fig. 38-9) dans lequel nous traçons l'énergie verticalement, et où nous traçons une ligne horizontale pour chaque valeur permise de l'énergie. Lorsque l'électron est libre, c'est-à-dire lorsque son énergie est positive, il peut avoir n'importe quelle énergie; il peut se déplacer à n'importe quelle vitesse. Mais les énergies liées ne sont pas arbitraires. L'atome doit avoir l'une ou l'autre d'un ensemble de valeurs permises telles que celles de la Figure 38-9.

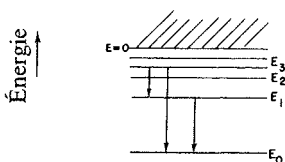


Fig. 38-9. Diagramme d'énergie d'un atome montrant différentes transitions possibles.

Appelons les valeurs permises de l'énergie E_0, E_1, E_2, E_3 . Si un atome est initialement dans l'un de ces « états excités » E_1, E_2 , etc., il ne reste pas dans cet état pour toujours. Il redescend plus ou moins rapidement vers un état inférieur et émet de l'énergie sous forme de lumière. La fréquence de la lumière qui est émise est déterminée par la conservation de l'énergie et par le fait que la fréquence de la lumière en mécanique quantique est reliée à l'énergie de la lumière par (38.1). Ainsi la fréquence de la lumière qui est libérée dans une transition d'une énergie E_3 vers une énergie E_1 (par exemple) vaut

$$\omega_{31} = (E_3 - E_1)/\hbar. \quad (38.14)$$

Ceci est une fréquence caractéristique de l'atome et définit une raie d'émission spectrale. Une autre transition possible serait de E_3 vers E_0 . Elle aurait une fréquence différente

$$\omega_{30} = (E_3 - E_0)/\hbar. \quad (38.15)$$

Il est également possible que l'atome excité vers E_1 puisse retomber à l'état fondamental E_0 émettant un photon de fréquence

$$\omega_{10} = (E_1 - E_0)/\hbar. \quad (38.16)$$

La raison pour laquelle nous mettons en évidence ces trois transitions est que nous allons faire apparaître une relation intéressante. Il est très facile de voir à partir de (38.14), (38.15) et (38.16) que

$$\omega_{30} = \omega_{31} + \omega_{10}. \quad (38.17)$$

En général, si nous trouvons deux raies spectrales, nous pouvons nous attendre à trouver une autre raie à la somme des fréquences (ou la différence des fréquences), et à ce que toutes les raies soient interprétées par l'existence d'une série de niveaux tels que chaque raie corresponde à la différence en énergie de certains couples de niveaux. Cette coïncidence remarquable dans les fréquences spectrales fut remarquée avant que la mécanique quantique ne soit découverte, elle est appelée le *principe de combinaison de Ritz*. C'est à nouveau un mystère du point de vue de la mécanique classique. N'insistons pas davantage sur le point que la mécanique classique est un échec dans le domaine atomique; il semble que nous l'avons déjà bien démontré.

Nous avons déjà parlé de la mécanique quantique comme étant représentée par des amplitudes qui se comportent comme des ondes, avec certaines fréquences et certains nombres d'ondes. Observons comment il se trouve que du point de vue des amplitudes, les atomes présentent différents états d'énergie. C'est quelque chose que nous ne pouvons pas comprendre à partir de ce que nous avons déjà dit jusqu'à présent, mais nous connaissons tout le fait que des ondes confinées ont des

fréquences définies. Par exemple, si le son est confiné dans un tuyau d'orgue ou quelque chose de ce genre, le son peut vibrer de plus d'une manière, mais pour chacune de ces manières il existe une fréquence définie. Ainsi un objet dans lequel les ondes sont confinées possède certaines fréquences de résonance. C'est donc une caractéristique des ondes dans un espace limité – un sujet que nous traiterons en détail, avec des formules, plus tard – qu'il ne puisse y avoir que des fréquences définies. Et puisqu'il y a une relation générale entre les fréquences de l'amplitude et l'énergie, nous ne sommes pas surpris de trouver des énergies définies associées avec des électrons liés dans les atomes.

38-6 Implications philosophiques

Considérons brièvement quelques implications philosophiques de la mécanique quantique. Comme toujours, il y a deux aspects du problème : l'un concerne les implications philosophiques pour la physique, et l'autre l'extrapolation de cette philosophie à d'autres domaines. Lorsque des idées philosophiques associées à la science sont transportées dans un autre domaine, elles sont habituellement complètement déformées. Aussi nous limiterons nos remarques autant que possible à la physique elle-même.

L'aspect le plus intéressant est d'abord l'idée principale d'incertitude ; faire une observation affecte le phénomène. On sait depuis toujours que lorsqu'on observe, on affecte le phénomène, mais l'important ici est que l'effet ne peut pas être négligé ou écarté ou diminué arbitrairement en transformant l'appareil. Lorsque nous cherchons un certain phénomène, nous ne pouvons pas nous empêcher de le perturber d'une certaine manière minimum, et la *perturbation est nécessaire à la cohérence du point de vue*. L'observateur était quelquefois important en physique préquantique, mais seulement dans un sens plutôt évident. Le problème a été posé : si un arbre tombe dans une forêt et qu'il n'y ait personne pour l'entendre, fait-il du bruit ? Un arbre *réel* tombant dans une forêt *réelle* fait un bruit, bien sûr, même si personne n'est là. Même si personne n'est présent pour l'entendre, d'autres traces restent. Le son agitera certaines feuilles, et si nous sommes suffisamment attentifs nous pouvons trouver quelque part qu'une épine a frotté contre une feuille et y a laissé une petite trace qui ne peut être expliquée que si nous supposons que la feuille a vibré. Ainsi dans un certain sens, nous devons admettre qu'un son est produit. Nous pouvons nous demander : y a-t-il eu une *sensation* de son ? Non, les sensations sont en relation, probablement, avec la conscience. Que les fourmis soient conscientes et qu'il y ait eu des fourmis dans la forêt, ou que les arbres soient conscients, nous n'en savons rien. Laissons le problème sous cette forme.

Une autre chose sur laquelle les gens ont insisté depuis que la mécanique quantique s'est développée est l'idée que nous ne devrions pas parler de ces choses que nous ne pouvons pas mesurer. (En réalité la théorie de la relativité nous le dit également.) Tant qu'une chose ne peut être définie par la mesure, elle n'a pas de place dans une théorie. Et puisqu'une valeur précise de la quantité de mouvement d'une particule localisée ne peut être définie par la mesure, elle n'a pas lieu de figurer dans la théorie. L'idée que c'est cela qui n'allait pas dans la théorie classique *est une position fausse*. C'est une analyse peu soignée de la situation. Ce n'est pas simplement parce que nous ne pouvons pas *mesurer* la position et la quantité de mouvement précisément que cela signifie *a priori* que nous *ne puissions* pas en parler. Cela signifie simplement que nous ne sommes pas *obligés* d'en parler. La situation dans les sciences est celle-ci : Un concept ou une idée qui ne peuvent pas être mesurés

ou qu'on ne peut relier directement à l'expérience peuvent ou peuvent ne pas être utiles. Il n'est pas nécessaire qu'ils existent dans une théorie. En d'autres termes, supposez que nous comparions la théorie classique du monde avec la théorie quantique, et supposez qu'il soit vrai expérimentalement que nous ne puissions mesurer la position et la quantité de mouvement qu'avec une certaine imprécision. La question est de savoir si les *notions* de position exacte d'une particule et de quantité de mouvement exacte d'une particule sont valides ou non. La théorie classique admet ces idées; la théorie quantique ne les admet pas. Cela ne signifie pas en soi que la physique classique soit fausse. Lorsque la nouvelle mécanique quantique fut découverte, les gens d'obédience classique – ce qui comprenait tout le monde à l'exception de Heisenberg, Schrödinger et Born – disaient: «Regardez, votre nouvelle théorie n'est pas bonne parce que vous ne pouvez pas répondre à certaines questions telles que: quelle est la position d'une particule?, par quel trou passe-t-elle?, et d'autres encore.» La réponse d'Heisenberg était: «Je n'ai pas besoin de répondre à de telles questions, parce que vous ne pouvez pas vous poser de telles questions expérimentalement.» Nous n'avons pas *besoin* de le faire. Considérez deux théories (a) et (b); (a) contient une idée qui ne peut être vérifiée directement mais qui est utilisée dans le calcul, et l'autre, (b), ne contient pas l'idée. Si elles sont en désaccord dans leurs prédictions, on ne peut dire que (b) est fausse, parce qu'elle ne peut pas expliquer l'idée qui se trouve en (a), parce que cette idée correspond à une des choses qui ne peut pas être vérifiée directement. Il est toujours bon de savoir quelles idées ne peuvent pas être vérifiées directement, mais il n'est pas nécessaire de les éliminer toutes. Il n'est pas vrai que nous puissions avancer jusqu'au bout dans la connaissance scientifique en utilisant seulement ces concepts qui sont directement soumis à l'expérience.

Dans la mécanique quantique elle-même, il y a une amplitude de fonction d'onde, il y a un potentiel, il y a de nombreux autres concepts que nous ne pouvons mesurer directement. La base d'une science est sa capacité à *prédire*. Prédire signifie dire ce qui va se passer dans une expérience qui n'a jamais été réalisée auparavant. Comment pouvons-nous le faire? En supposant que nous savons ce qui se passe, indépendamment de l'expérience. Nous devons extrapoler les expériences dans une région où elles n'ont pas encore été réalisées. Nous devons prendre nos concepts et les étendre à des régions où ils n'ont pas encore été vérifiés. Si nous ne le faisons pas, nous n'avons pas de prédictions. Ainsi pour un physicien classique, il était parfaitement raisonnable d'aller de l'avant tranquillement et de supposer que la position – qui manifestement signifie quelque chose pour un ballon de football – signifie quelque chose également pour un électron. Ce n'était pas une stupidité. C'était une procédure sensée. Aujourd'hui nous disons que la loi de la relativité est supposée être vraie à toutes les énergies, mais un jour quelqu'un peut venir et dénoncer notre degré de stupidité. Nous ne savons pas si nous sommes «stupides» tant que nous n'avons pas mis «notre nez dehors», et ainsi toute l'idée consiste à mettre son nez dehors. Et la seule manière de voir que nous nous trompons est de savoir *quelles* sont nos prédictions. Il est absolument nécessaire d'échafauder des prédictions.

Nous avons déjà fait quelques remarques sur l'indétermination de la mécanique quantique. C'est-à-dire que nous sommes incapables maintenant de prédire ce qui va se passer en physique dans une circonstance physique donnée qui est préparée aussi précisément que possible. Si nous avons un atome dans un état excité qui va donc émettre un photon, nous ne pouvons pas dire *quand* il va émettre ce photon. Il a une certaine amplitude d'émettre le photon à n'importe quel moment, et nous ne pouvons que prédire une probabilité d'émission; nous ne pouvons pas prédire le futur exactement. Ceci a donné lieu à toutes sortes de non-sens et de questions sur la signification de la liberté, de la volonté et sur l'idée que le monde est incertain.

Bien entendu, nous devons insister sur le fait que la physique classique est également, en un sens, indéterminée. On pense habituellement que cette indétermination, cette incapacité de prédire le futur, est une caractéristique importante de la mécanique quantique, et on dit que cela explique le comportement de l'esprit, les sentiments de libre volonté, etc. Mais si le monde *était* classique – si les lois de la mécanique étaient classiques – il n'est pas du tout évident que l'esprit ne sentirait pas plus ou moins la même chose. Il est vrai classiquement que si nous connaissions la position et la vitesse de chaque particule dans le monde, ou dans un récipient de gaz, nous pourrions dire exactement ce qui va se passer. Et de ce fait le monde classique est déterministe. Supposons, cependant, que notre précision soit limitée et que nous ne sachions pas *exactement* où se trouve un atome, à un milliardième près par exemple. Lorsque celui-ci se déplace il frappe un autre atome et du fait que nous ne connaissons pas la position mieux qu'à un milliardième près, nous trouvons une erreur encore plus grande sur la position après la collision. Et ceci est amplifié, bien sûr, dans la collision suivante, de telle sorte que si nous partons avec simplement une petite erreur, elle est rapidement amplifiée pour devenir une très grande incertitude. Donnons un exemple : lorsque l'eau tombe par-dessus un barrage, elle jaillit en éclaboussures. Si nous ne nous trouvons pas loin, de temps à autre une goutte atterrira sur notre nez. Ceci nous semble être complètement aléatoire, et cependant ce comportement serait prédit par les lois purement classiques. La position exacte de toutes les gouttes dépend des mouvements précis de l'eau avant qu'elle ne passe sur le barrage. Comment ? Les plus petites irrégularités sont amplifiées dans la chute, de telle sorte que nous obtenons une distribution complètement au hasard. Manifestement, nous ne pouvons pas prédire réellement la position des gouttes tant que nous ne connaissons pas le mouvement de l'eau d'une manière *absolument exacte*.

Parlant plus précisément, étant donné une précision arbitraire, quelle que soit cette précision, on peut trouver un temps suffisamment long pour que nous ne puissions plus faire de prédictions valables sur ce qui doit se passer au bout de ce temps long. Le point important maintenant est que cet intervalle de temps n'est pas très grand. Le temps n'est pas chiffré en millions d'années si la précision est d'une part dans un milliard. Le temps varie en fait selon le logarithme de l'erreur, et il se trouve que simplement dans un très, très petit laps de temps, nous perdons toute notre information. Si la précision est prise comme étant une part dans un milliard de milliards et de milliards – quel que soit le nombre de milliards que nous prenons, pourvu que nous nous arrêtons quelque part – alors nous pouvons trouver un temps inférieur au temps qu'il faut pour énoncer – après lequel nous ne pouvons plus prédire ce qui va se passer ! Ce n'est donc pas juste de dire, en nous fondant sur l'apparente liberté et l'indéterminisme de l'esprit humain, que nous aurions dû réaliser que la physique « déterministe » classique ne pouvait en rendre compte et accueillir la mécanique quantique comme la libération d'un univers « complètement mécanique ». Car déjà en mécanique classique, l'indétermination existait d'un point de vue pratique.

La théorie cinétique des gaz

39-1 Propriétés de la matière

39-2 La pression d'un gaz

39-3 Compressibilité du rayonnement

39-4 Température et énergie cinétique

39-5 La loi du gaz parfait

39-1 Propriétés de la matière

Avec ce chapitre nous abordons un nouveau sujet qui va nous occuper un certain temps. C'est la première partie d'une analyse de la matière du point de vue physique suivant lequel, reconnaissant que la matière est formée d'un très grand nombre d'atomes, ou de parties élémentaires, qui interagissent électriquement et obéissent aux lois de la mécanique, nous essayons de comprendre les raisons du comportement de divers groupements d'atomes.

Il est évident que c'est un sujet difficile, et nous insistons dès le départ sur le fait que c'est un sujet *extrêmement* difficile, et que nous devons le traiter d'une manière différente de celle que nous avons utilisée jusqu'à présent pour les autres sujets. Dans le cas de la mécanique et dans celui de la lumière, nous étions en mesure de commencer avec un énoncé précis de certaines lois, comme les lois de Newton, ou les formules pour le champ produit par une charge en accélération, à partir desquelles tout un ensemble de phénomènes pouvaient être, pour l'essentiel, compris et qui fournissaient à partir de ce moment-là une base à notre compréhension de la mécanique et de la lumière. C'est dire que nous pouvions en apprendre davantage plus tard, mais que nous n'apprendrions pas une physique différente, simplement de meilleurs méthodes mathématiques nous permettant de traiter les problèmes concrets.

Nous ne pouvons pas effectivement utiliser cette approche en étudiant les propriétés de la matière. Nous ne pouvons étudier la matière que d'une manière très élémentaire; c'est là un sujet beaucoup trop compliqué pour pouvoir l'étudier directement à partir de ses propres lois de base, qui ne sont rien d'autre que les lois de la mécanique et de l'électricité. Mais elles sont un petit peu trop loin des propriétés que nous souhaitons étudier; il faut beaucoup trop d'étapes pour passer des lois de Newton aux propriétés de la matière, et ces étapes sont, par elles-mêmes assez compliquées. Pour commencer nous allons franchir certaines de ces étapes, mais tandis que beaucoup de nos analyses seront assez précises, certaines le deviendront de moins en moins. Nous n'atteindrons qu'une compréhension approximative des propriétés de la matière.

Une des raisons pour laquelle il nous faut nous limiter à un traitement aussi imparfait est que les mathématiques nécessaires à un calcul rigoureux nécessitent une compréhension profonde de la théorie des probabilités;

nous n'allons pas nous demander où se déplace effectivement chaque atome, mais plutôt combien il y en a qui se déplacent çà et là en moyenne et quelles sont les probabilités d'obtenir différents effets. Ainsi ce sujet comporte une connaissance de la théorie des probabilités, nos mathématiques ne sont pas encore tout à fait prêtes et nous ne voulons pas forcer la mesure.

Deuxièmement, et ceci est plus important d'un point de vue physique, le comportement réel des atomes n'est pas donné par la mécanique classique, mais par la mécanique quantique, et une compréhension correcte du sujet ne peut pas être atteinte tant que nous n'aurons pas compris la mécanique quantique. Ici, à l'opposé du cas des boules de billard et des automobiles, la différence entre les lois de la mécanique classique et les lois de la mécanique quantique est très importante et très significative, à tel point que de nombreux résultats que nous établirons par le biais de la physique classique seront fondamentalement incorrects. De ce fait, certaines choses devront être partiellement désappries; cependant nous indiquerons chacun des cas où le résultat est incorrect, de telle sorte que nous sachions exactement où se situent les « frontières ». Une des raisons de faire de la mécanique quantique dans les chapitres précédents était de donner, plus ou moins, une idée des raisons pour lesquelles la mécanique classique est incorrecte dans diverses directions.

Pourquoi donc nous occupons-nous maintenant de ce sujet? Pourquoi ne pas attendre une demi-année ou une année, jusqu'à ce que nous sachions un petit peu mieux les mathématiques des probabilités, et que nous apprenions un petit peu de mécanique quantique de façon à pouvoir traiter ce problème d'une manière plus fondamentale? La réponse est que c'est un sujet difficile et la meilleure manière de l'apprendre est de le faire lentement! La première chose à faire est d'avoir une certaine idée approximative de ce qui doit se passer dans différentes circonstances et puis, plus tard, lorsque nous connaîtrons les lois un peu mieux, nous les formulerons mieux.

Quiconque veut étudier les propriétés de la matière dans un problème réel peut désirer partir en écrivant les équations fondamentales et puis essayer de les résoudre mathématiquement. Bien qu'il y ait des gens qui essaient d'emprunter une telle approche, ces personnes sont les ratés de ce domaine; les véritables réussites sont le fait de ceux qui partent d'un point de vue *physique*, de ceux qui ont une idée approximative de l'endroit où ils vont et qui commencent en faisant la bonne approximation, sachant ce qui est grand et ce qui est petit dans une situation donnée qui est compliquée. Ces problèmes sont si compliqués que même une compréhension élémentaire, bien qu'imprécise et incomplète, vaut la peine d'être acquise, et ainsi ce sujet sera de ceux sur lesquels nous reviendrons à plusieurs reprises, chaque fois avec plus de précision, au fur et à mesure que nous avancerons dans notre cours de physique.

Une autre raison d'aborder ce sujet maintenant est que nous avons déjà utilisé plusieurs de ces idées en chimie, par exemple, et que nous avons même déjà entendu parler de certaines d'entre elles au lycée. Il est intéressant de connaître les bases physiques de ces choses.

Comme exemple intéressant, nous savons tous que des volumes égaux de gaz aux mêmes pression et température contiennent le même nombre de molécules. La loi des proportions multiples disant que lorsque deux gaz se combinent dans une réaction chimique, les volumes nécessaires se trouvent toujours dans des proportions entières simples, fut interprétée en définitive par Avogadro comme voulant dire que des volumes égaux contiennent des nombres égaux d'atomes. Mais *pourquoi* contiennent-ils des nombres égaux d'atomes? Pouvons-nous déduire des lois de Newton que les nombres d'atomes doivent être égaux? Nous nous intéresserons à

ce problème particulier dans ce chapitre. Dans les chapitres qui suivront, nous discuterons des différents autres phénomènes comportant les pressions, les volumes, la température et la chaleur.

Nous verrons également que le sujet peut être abordé d'un point de vue non atomique, et qu'il y a de nombreuses relations entre les propriétés des substances. Par exemple, lorsque nous comprimons un objet, il s'échauffe; si nous le chauffons, il se dilate. Il y a une relation entre ces deux faits qui peut être déduite indépendamment du mécanisme sous-jacent. Ce domaine est appelé la *thermodynamique*. La compréhension la plus profonde de la thermodynamique provient bien sûr de la compréhension du mécanisme effectif, et c'est ce que nous ferons: nous adopterons dès le début le point de vue atomique et nous l'utiliserons pour comprendre les diverses propriétés de la matière et les lois de thermodynamique.

Commençons maintenant par l'étude des propriétés des gaz du point de vue des lois de la mécanique de Newton.

39-2 La pression d'un gaz

Nous savons qu'un gaz exerce une pression, et nous devons clairement comprendre à quoi cela est dû. Si nos oreilles étaient un peu plus sensibles, nous entendrions perpétuellement du bruit. L'évolution n'a pas développé l'oreille jusqu'à ce point, cela serait sans utilité, car si elle était réellement aussi sensible – nous entendrions un perpétuel tintamarre. La raison en est que le tympan est en contact avec l'air, et que l'air est constitué d'un grand nombre de molécules en mouvement perpétuel et que celles-ci cognent le tympan. En cognant le tympan, elles produisent un tam-tam irrégulier – boum, boum, boum – que nous n'entendons pas parce que les atomes sont très petits et que la sensibilité de l'oreille n'est pas suffisante pour le remarquer. Le résultat de ce bombardement perpétuel est de repousser le tympan, mais bien sûr il y a un bombardement perpétuel équivalent des atomes de l'autre côté du tympan, de telle sorte que la force résultante sur lui est nulle. Si nous éliminions l'air d'un côté ou que nous changions les quantités relatives d'air entre les deux côtés, le tympan serait alors poussé d'un côté ou de l'autre, car le bombardement d'un côté serait plus intense que de l'autre. Nous ressentons quelquefois cet effet peu confortable lorsque nous montons trop rapidement dans un ascenseur ou dans un avion, particulièrement si nous avons un mauvais rhume (lorsque nous avons un rhume, l'inflammation ferme le tube qui relie l'air à l'intérieur du tympan à l'air extérieur par l'intermédiaire de la gorge, de telle sorte que les deux pressions ne peuvent immédiatement s'égaliser).

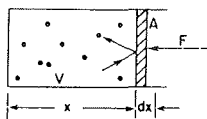


Fig. 39-1. Les atomes d'un gaz dans une boîte avec un piston sans frottement.

En considérant comment on pourrait étudier ce problème quantitativement, nous imaginons que nous avons un volume de gaz dans un récipient, et que à l'une des extrémités de ce récipient il y a un piston qui peut être déplacé (Fig. 39-1). Nous souhaiterions trouver quelle est la force résultante sur le piston du fait de la présence des atomes dans ce récipient. Le volume du récipient est V , et lorsque les

atomes se déplacent à l'intérieur du récipient avec des vitesses différentes, ils cognent le piston. Supposons qu'il n'y ait rien, du vide, de l'autre côté du piston. Qu'en est-il du piston? Si le piston est laissé à lui-même et que personne ne le retienne, chaque fois qu'il est frappé, il prend une petite quantité de mouvement et il est progressivement poussé hors du récipient. Ainsi, afin de l'empêcher d'être poussé hors du récipient, nous devons le maintenir avec une force F . Le problème est : avec quelle force? Une manière d'exprimer la force est de parler de la force par unité de surface : si A est la surface du piston, alors la force sur le piston s'écrira sous la forme d'un nombre que multiplie la surface. Nous définissons alors la pression comme étant égale à la force que nous devons appliquer au piston, divisée par la surface du piston :

$$P = F/A. \quad (39.1)$$

Afin d'être sûr que nous comprenions cette idée (nous devons de toute manière établir ceci dans un autre but), l'élément différentiel de *travail* dW réalisé sur le gaz par une compression obtenue en déplaçant le piston d'une quantité différentielle $-dx$, est égal à la force que multiplie la distance sur laquelle la compression est réalisée, qui selon (39.1), est égale à la pression que multiplie la surface, que multiplie la distance, ce qui est égal à la pression que multiplie le changement de volume affecté d'un signe moins :

$$dW = F(-dx) = -PA \, dx = -P \, dV. \quad (39.2)$$

(La surface A que multiplie la distance dx est égale à la variation de volume.) Le signe moins est nécessaire, parce que lorsque nous comprimons, nous *diminuons* le volume ; si nous y réfléchissons, nous pouvons voir que si un gaz est comprimé, du travail est réalisé *sur* lui.

Quelle force devons-nous appliquer pour équilibrer la collision des molécules? Le piston reçoit de chaque collision une certaine quantité de mouvement. Une certaine quantité de mouvement est transférée par seconde au piston, et il se met en mouvement. Pour l'empêcher de se déplacer, nous devons communiquer en sens inverse au même piston, à l'aide de notre force, le même total de quantité de mouvement par seconde. Bien sûr, la force *est* le montant de quantité de mouvement par seconde que nous devons transférer. Il y a une autre manière de le dire : si nous laissons aller le piston, il prend de la vitesse à cause des bombardements ; à chaque collision nous augmentons un petit peu la vitesse, et ainsi la vitesse accélère. Le taux suivant lequel le piston acquiert de la vitesse, ou accélère, est proportionnel à la force exercée sur lui. Ainsi nous voyons que la force, qui, nous l'avons déjà dit, est égale à la pression que multiplie la surface, est égale à la quantité de mouvement par seconde fournie au piston par les molécules qui le frappent.

Il est facile de calculer la quantité de mouvement par seconde – nous pouvons le faire en deux temps : premièrement, nous déterminons la quantité de mouvement donnée au piston par un atome particulier dans une collision avec le piston, puis nous devons multiplier par le nombre de collisions par seconde des atomes avec la paroi. La force sera le produit de ces deux facteurs. Voyons maintenant ce que sont ces deux facteurs : En premier lieu, nous supposons que le piston est un « réflecteur » parfait pour les atomes. S'il ne l'est pas, toute la théorie est fautive, le piston va s'échauffer et les choses vont changer, mais éventuellement lorsque l'équilibre est atteint, le résultat net est que les collisions sont effectivement parfaitement élastiques. En moyenne, chaque particule qui arrive repart avec la même énergie. Ainsi nous imaginerons que le gaz est dans une condition d'équilibre et que nous ne communiquons aucune énergie au piston, car le piston se trouve au repos. Dans de telles circonstances,

lorsqu'une particule arrive avec une certaine vitesse, elle repart avec la même vitesse et, nous dirons, avec la même masse.

Si v est la vitesse d'un atome et v_x est la composante x de v , alors mv_x est la composante x de la quantité de mouvement « incidente »; mais nous avons aussi une composante égale de la quantité de mouvement après la collision, et ainsi la quantité de mouvement totale donnée au piston par la particule « réfléchie » dans une collision est $2mv_x$.

Il nous faut maintenant le nombre de collisions réalisées par les atomes en une seconde ou dans une certaine quantité de temps dt ; puis nous divisons par dt . Combien d'atomes frappent le piston? Supposons qu'il y ait N atomes dans le volume V , où $n = N/V$ dans chaque unité de volume. Pour trouver combien d'atomes frappent le piston, nous remarquons qu'étant donné une certaine quantité de temps t , si une particule a une certaine vitesse dirigée vers le piston, elle viendra frapper dans le temps t , pourvu qu'elle soit suffisamment proche. Si elle est trop éloignée, elle ne parcourt qu'une partie du chemin x vers le piston pendant le temps t , mais n'atteint pas le piston. Ainsi, il est clair que seules les molécules qui se trouvent à une distance du piston inférieure à $v_x t$ viendront frapper le piston dans l'intervalle de temps t . Le nombre de collisions dans un temps t est donc égal au nombre d'atomes qui se trouvent dans une région de longueur inférieure à $v_x t$ et, puisque la surface du piston est A , le volume occupé par les atomes qui viendront frapper le piston est $v_x t A$. Mais le nombre des atomes qui vont frapper le piston est égal à ce volume que multiplie le nombre des atomes par unité de volume, $nv_x t A$. Bien sûr, nous ne voulons pas le nombre de ceux qui frappent pendant un temps t , nous voulons le nombre de ceux qui frappent par seconde, et nous divisons donc par le temps t pour obtenir $nv_x A$. (Ce temps t peut être rendu très court; si nous voulons être élégants, nous l'appelons dt , puis nous dérivons, mais c'est la même chose.)

Ainsi nous trouvons que la force est

$$F = nv_x A \cdot 2mv_x. \quad (39.3)$$

Regardez, la force est proportionnelle à la surface, si nous gardons constante la densité de particules lorsque nous changeons la surface! La pression est alors

$$P = 2nmv_x^2. \quad (39.4)$$

Nous remarquons à présent un petit ennui dans cette analyse: Premièrement toutes les molécules n'ont pas la même vitesse, et elles ne se déplacent pas toutes dans la même direction. Ainsi, tous les v_x^2 sont différents! Aussi ce que nous devons faire, bien sûr, c'est prendre une *moyenne* des v_x^2 , puisque chacun apporte sa propre contribution. Nous voulons le carré de v_x moyenné sur toutes les molécules:

$$P = nm\langle v_x^2 \rangle. \quad (39.5)$$

Avons-nous oublié d'inclure le facteur 2? Non; parmi tous les atomes, il n'y en a que la moitié qui est dirigée vers le piston. L'autre moitié est dirigée dans l'autre sens, et si nous prenons $\langle v_x^2 \rangle$, nous faisons la moyenne sur les v_x *négatifs* élevés au carré aussi bien que sur les v_x positifs. Ainsi lorsque nous prenons simplement $\langle v_x^2 \rangle$, sans faire attention, nous obtenons un résultat double de celui que nous souhaitons. La moyenne de v_x^2 pour des v_x positifs est égale à la moyenne de v_x^2 pour tous les v_x que multiplie un demi.

Comme les atomes rebondissent dans tous les sens, il est clair qu'il n'y a rien de particulier à propos de la « direction - x »; les atomes peuvent également se déplacer vers le haut et vers le bas, en avant et en arrière, vers la droite et vers la gauche. De ce fait, il apparaît que $\langle v_x^2 \rangle$, mouvement moyen des atomes dans une direction, tout comme les moyennes dans les deux autres directions, sont toutes égales entre elles:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle. \quad (39.6)$$

Ce n'est plus qu'une question de haute mathématique que de remarquer alors qu'elles sont toutes égales au tiers de leur somme, ce qui est bien sûr le carré de la grandeur de la vitesse:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \langle v^2 \rangle / 3. \quad (39.7)$$

Ceci présente l'avantage que nous n'avons pas à nous préoccuper d'une direction particulière, c'est pourquoi nous écrivons de nouveau notre formule pour la pression sous cette forme:

$$P = \left(\frac{2}{3}\right) n \langle mv^2 / 2 \rangle. \quad (39.8)$$

Nous avons écrit le dernier facteur sous la forme $(mv^2/2)$ parce qu'il représente l'énergie cinétique du mouvement du centre de masse de la molécule. Nous trouvons de ce fait que

$$PV = N \left(\frac{2}{3}\right) \langle mv^2 / 2 \rangle. \quad (39.9)$$

Avec cette équation nous pouvons calculer quelle est la valeur de la pression si nous connaissons la vitesse.

Comme exemple très simple prenons le gaz hélium, ou tout autre gaz, comme la vapeur de mercure, ou la vapeur de potassium à température suffisamment élevée, ou l'argon, dans lesquels toutes les molécules sont des atomes uniques pour lesquels nous supposons qu'il n'y a pas de mouvement interne dans l'atome. Si nous disposions d'une molécule complexe, il pourrait y avoir un certain mouvement interne, des vibrations mutuelles ou quelque chose d'autre. Nous supposons que nous laissons cela de côté; ceci est en réalité un sujet sérieux sur lequel nous devons revenir, mais nous verrons que tout ira bien. Nous supposons que le mouvement interne des atomes peut être oublié et ainsi, dans ce sens, que l'énergie cinétique de mouvement du centre de masse est égale à toute l'énergie en jeu. Ainsi pour un gaz mono-atomique l'énergie cinétique est égale à l'énergie totale. En général, nous appellerons U l'énergie totale (elle est quelquefois appelée l'énergie *interne* totale – vous pouvez vous demander pourquoi, puisqu'il n'y a pas d'énergie *externe* pour un gaz), c'est-à-dire toute l'énergie de toutes les molécules dans le gaz ou dans l'objet, quel qu'il soit.

Pour un gaz mono-atomique, nous supposons que l'énergie totale U est égale au nombre d'atomes que multiplie l'énergie cinétique moyenne de chacun d'entre eux, car nous écartons toute possibilité d'excitation ou de mouvement à l'intérieur des atomes eux-mêmes. Alors, dans ce cas, nous pouvons écrire

$$PV = \frac{2}{3} U. \quad (39.10)$$

Incidentement, nous pouvons nous arrêter en chemin et trouver la réponse à la question suivante: Supposez que nous prenions un récipient de gaz et que nous comprimons le gaz lentement, quelle pression nous faut-il pour faire diminuer le volume? C'est facile à trouver puisque la pression est égale aux $2/3$ de l'énergie divisée par V . Au fur et à mesure que nous le comprimons, nous réalisons du travail sur le gaz et ainsi

nous augmentons son énergie U . Nous allons donc rencontrer un certain type d'équation différentielle: Si nous commençons dans des conditions données avec une certaine énergie et un certain volume, nous connaissons alors la pression. Nous commençons à comprimer, mais au moment où nous le faisons, l'énergie U augmente et le volume V diminue, ainsi la pression augmente.

Ainsi, nous devons résoudre une équation différentielle et nous allons le faire dans un moment. Nous devons d'abord insister sur le fait, cependant, que lorsque nous comprimons ce gaz, nous supposons que tout le travail sert nécessairement à augmenter l'énergie des atomes qu'il contient. Nous pouvons nous demander: «Est-ce que ce n'est pas obligatoire? Où pourrait-elle aller sinon?» Il apparaît qu'elle *peut* aller ailleurs. Il y a ce que nous appelons des «pertes de chaleur» au travers des parois: les atomes chauds (c'est-à-dire en mouvement rapide) qui bombardent les parois, échauffent les parois et l'énergie s'en va. Nous supposons dans le cas présent que ceci n'est pas le cas.

Pour être plus général, bien que nous faisons encore quelques hypothèses très particulières sur notre gaz, nous pouvons écrire non pas $PV = \frac{2}{3}U$, mais

$$PV = (\gamma - 1)U. \quad (39.11)$$

On l'écrit $(\gamma - 1)$ que multiplie U , pour des raisons de conventions, car nous nous occuperons plus tard de quelques autres cas où le coefficient devant U ne sera pas $\frac{2}{3}$, mais un nombre différent. Ainsi, afin de traiter la chose d'une manière générale, nous appelons ce coefficient $\gamma - 1$, parce que les gens l'ont ainsi appelé depuis presque un siècle. Ce γ vaut alors $\frac{5}{3}$, parce que $\frac{5}{3} - 1$ vaut $\frac{2}{3}$, pour un gaz mono-atomique comme l'hélium.

Nous avons déjà remarqué que lorsque nous comprimons un gaz, le travail réalisé est $-PdV$. Une compression dans laquelle il n'y a pas d'énergie calorifique ajoutée ou enlevée est appelée une compression *adiabatique* du Grec *a* (ne pas) + *dia* (au travers) + *bainein* (aller). (Le mot adiabatique est utilisé en physique de différentes manières, et il est quelquefois difficile de dire ce qu'elles ont de commun entre elles.) Pour une compression adiabatique, tout travail réalisé sert à la modification de l'énergie interne. C'est le point clé - qu'il n'y ait pas d'autres pertes d'énergie - car alors nous avons $PdV = -dU$. Mais puisque $U = PV/(\gamma - 1)$, nous pouvons écrire

$$dU = (P dV + V dP)/(\gamma - 1). \quad (39.12)$$

Ainsi nous avons $PdV = -(P dV + V dP)/(\gamma - 1)$, ou, en réarrangeant les termes, $\gamma PdV = -V dP$, ou

$$(\gamma dV/V) + (dP/P) = 0. \quad (39.13)$$

Heureusement, en supposant que γ est une constante, comme c'est le cas pour un gaz mono-atomique, nous pouvons intégrer ceci: cela donne $\gamma \ln V + \ln P = \ln C$, où $\ln C$ est la constante d'intégration. Si nous prenons l'exponentielle des deux côtés, nous obtenons la loi

$$PV^\gamma = C \text{ (une constante)}. \quad (39.14)$$

En d'autres termes, dans des conditions adiabatiques, pour lesquelles la température s'élève lorsque nous comprimons, parce qu'aucune chaleur ne se perd, la pression que multiplie le volume à la puissance $\frac{5}{3}$ est une constante pour un gaz mono-atomique! Bien que nous l'ayons établi théoriquement, ceci *est* en fait la manière dont les gaz mono-atomiques se comportent expérimentalement.

39-3 Compressibilité du rayonnement

Nous pouvons donner un autre exemple de la théorie cinétique d'un gaz, qui n'est pas utilisé en chimie, mais plutôt en astronomie. Nous considérons un grand nombre de photons dans une boîte dans laquelle la température est très élevée. (La boîte est bien entendu le gaz dans une étoile très chaude. Le soleil n'est pas assez chaud; il y a encore beaucoup trop d'atomes, mais à des températures encore plus élevées dans certaines étoiles extrêmement chaudes, nous pouvons négliger les atomes et supposer que les seuls objets que nous ayons dans la boîte soient des photons.) Or un photon possède une certaine quantité de mouvement $\mathbf{p}$. (Nous nous trouvons toujours dans une difficulté terrible lorsque nous faisons de la théorie cinétique: p est la pression, mais p est aussi la quantité de mouvement; v est le volume, mais v est aussi la vitesse, T est la température, mais T est aussi l'énergie cinétique ou le temps ou le couple; gardons-nous des confusions! Ce $\mathbf{p}$ est une quantité de mouvement, c'est un vecteur. Suivant le même raisonnement que précédemment, c'est la composante x du vecteur $\mathbf{p}$, qui donne le « choc » et la quantité de mouvement qui est fournie dans la collision, vaut deux fois la composante x du vecteur $\mathbf{p}$. Ainsi $2p_x$ remplace $2mv_x$, et en évaluant le nombre de collisions, v_x reste toujours v_x , ainsi au bout du compte, nous trouvons que la pression dans l'Équation (39.4) est, alors

$$P = 2np_x v_x. \quad (39.15)$$

En prenant la moyenne, elle devient n fois la moyenne de $p_x v_x$ (le même facteur 2) et, finalement, en introduisant les deux autres directions, nous trouvons

$$PV = N\langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \rangle / 3. \quad (39.16)$$

Ceci est en accord avec la formule (39.9) parce que la quantité de mouvement est $m\mathbf{v}$; elle est un petit peu plus générale, c'est tout. La pression que multiplie le volume est égal au nombre total d'atomes que multiplie $\frac{1}{3}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})$ pris en moyenne.

Or, qu'est-ce que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$ pour des photons? La quantité de mouvement et la vitesse sont dans la même direction, et la vitesse est égale à la vitesse de la lumière, c'est donc la quantité de mouvement de chacun de ces objets que multiplie la vitesse de la lumière. La quantité de mouvement que multiplie la vitesse de chaque photon est égale à son énergie: $E = pc$, ainsi ces termes sont les *énergies* de chacun des photons et nous devons, bien sûr, prendre une énergie moyenne, que multiplie le nombre de photons. Ainsi nous avons $\frac{1}{3}$ de l'énergie à l'intérieur du gaz:

$$PV = U/3 \text{ (gaz de photons)}. \quad (39.17)$$

Pour des photons, alors, puisque nous avons $\frac{1}{3}$ devant U , $(\gamma - 1)$ dans (39.11) vaut $\frac{1}{3}$, ou $\gamma = \frac{4}{3}$, et nous avons découvert que ce rayonnement dans une boîte suit la loi

$$PV^{4/3} = C. \quad (39.18)$$

Ainsi nous connaissons la loi de compressibilité du rayonnement! C'est ce qui est utilisé dans une analyse de la contribution de la pression de radiation dans une étoile, voilà donc comment nous la calculons, et c'est ainsi qu'elle varie lorsque nous la comprimons. Que de choses merveilleuses sont déjà à notre portée!

39-4 Température et énergie cinétique

Jusqu'à présent nous n'avons pas encore utilisé la *température*; nous avons à dessein évité d'en parler. Lorsque nous comprimons un gaz, nous savons que l'énergie des molécules augmente et nous sommes habitués à dire que le gaz devient de plus en plus chaud; nous voudrions comprendre ce que ceci a à voir avec la température. Si nous essayons de faire l'expérience non pas adiabatiquement, mais à ce que nous appelons une *température constante*, que faisons-nous? Nous savons que si nous prenons deux boîtes de gaz et que nous les mettons l'une à côté de l'autre suffisamment longtemps, même si au départ elles étaient à ce que nous appelons des températures différentes, elles atteindront à la fin la même température. Qu'est-ce que cela signifie? Cela signifie qu'elles atteignent un état qu'elles atteindraient si nous les laissions seules suffisamment longtemps! Ce que nous signifions par température égale est exactement ceci – l'état final obtenu lorsque les objets se trouvent proches les uns des autres en interaction entre eux pendant suffisamment longtemps.

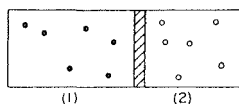


Fig. 39-2. Les atomes de deux gaz monoatomiques différents sont séparés par un piston mobile.

Considérons maintenant ce qui se passe si nous avons deux gaz, dans des récipients séparés par un piston mobile comme sur la Figure 39-2 (pour simplifier nous prendrons deux gaz monoatomiques, disons l'hélium et le néon). Dans le récipient (1) les atomes ont une masse m_1 , une vitesse v_1 , et il y en a n_1 par unité de volume et dans l'autre récipient les atomes ont une masse m_2 , une vitesse v_2 et il y en a n_2 par unité de volume. Quelles sont les conditions de l'équilibre?

Manifestement, le bombardement du côté gauche doit être tel qu'il déplace le piston vers la droite et comprime l'autre gaz jusqu'à ce que sa pression soit suffisante, le piston va alors revenir puis se déplacer de-ci, de-là et, graduellement, atteindre le repos en un endroit où les pressions seront égales des deux côtés. Ainsi nous pouvons faire en sorte que les pressions soient égales; cela signifie simplement que les énergies internes par unité de volume sont égales, ou que les produits des nombres n par les énergies cinétiques moyennes de chacun des côtés sont égaux. Ce que nous devons essayer de découvrir, éventuellement, c'est que *les nombres eux-mêmes* sont égaux. Pour le moment, tout ce que nous savons c'est que les produits de ces nombres par les énergies cinétiques sont égaux,

$$n_1 \langle m_1 v_1^2 / 2 \rangle = n_2 \langle m_2 v_2^2 / 2 \rangle,$$

et cela à partir de (39.8), parce que les pressions sont égales. Nous devons réaliser que ceci n'est pas la seule condition sur un temps suffisamment long, mais quelque chose d'autre doit se passer plus lentement lorsque s'établit le véritable état d'équilibre correspondant à des températures égales.

Pour voir l'idée, supposons que la pression sur le côté gauche soit réalisée en ayant une densité très élevée mais une vitesse très faible. En ayant une grande valeur de n et un petit v , nous pouvons obtenir la même pression qu'en ayant un petit n et un grand v . Les atomes peuvent se déplacer lentement mais être concentrés presque comme dans un solide, ou il peut y en avoir moins mais qui frappent plus fort. Cela va-t-il rester ainsi pour toujours? A première vue, nous pourrions estimer que oui, mais en y repensant nous découvrons que nous avons oublié un point important. Le piston intermédiaire ne reçoit pas une pression constante; il oscille exactement comme le

tympan dont nous parlions au début, parce que les collisions ne sont pas absolument uniformes. On ne peut pas parler d'une pression perpétuelle, stable, mais d'un tam-bourinement – la pression varie et ainsi l'objet s'agit. Supposons que les atomes sur le côté droit ne s'agitent pas trop, mais que ceux sur la gauche soient peu nombreux, assez distants les uns des autres et très énergiques. Le piston va, de temps à autre, recevoir une grande impulsion venant de gauche et sera poussé contre les atomes lents sur la droite, leur donnant davantage de vitesse. (Lorsqu'un atome cogne le piston, il gagne ou il perd de l'énergie, selon que le piston se déplace dans un sens ou dans l'autre lorsque l'atome le frappe.) Ainsi, par suite des collisions, le piston se trouve lui-même en train de s'agiter, de s'agiter et de s'agiter, et ceci secoue l'autre gaz – cela donne de l'énergie aux autres atomes, et leurs mouvements deviennent plus rapides jusqu'à ce qu'ils équilibrent l'agitation que le piston leur procure. Le système atteint un certain équilibre lorsque le piston se déplace avec une vitesse moyenne telle qu'il prend de l'énergie aux atomes à peu près au même taux que celui avec lequel il leur en rend. Ainsi le piston acquiert une certaine irrégularité moyenne de vitesse, et c'est notre problème de la trouver. Lorsque nous l'aurons trouvée, nous pourrions mieux résoudre notre problème, car les gaz vont ajuster leurs vitesses jusqu'à ce que les taux avec lesquels ils essayent de déverser l'énergie l'un dans l'autre par l'intermédiaire du piston deviennent égaux.

Il est assez difficile de préciser les détails concernant le piston dans cette circonstance particulière; bien que cela soit idéalement simple à comprendre, il apparaît que c'est un petit peu plus difficile à calculer. Avant de le calculer, essayons de résoudre un autre problème dans lequel nous avons un récipient de gaz, mais avec deux sortes d'objets différents, deux sortes de molécules différentes, ayant des masses m_1 et m_2 , des vitesses v_1 et v_2 , etc.; il apparaît maintenant une relation beaucoup plus intime. Si toutes les molécules du gaz numéro 2 se trouvent au repos, cette condition ne va pas durer, parce qu'elles sont frappées par les molécules numéro 1, et acquièrent ainsi de la vitesse. Si elles vont toutes plus vite que les molécules numéro 1, alors il est probable que ceci ne va pas durer non plus – elles vont rendre leur énergie aux molécules numéro 1. Ainsi lorsque les deux gaz sont dans la même boîte, le problème est de trouver la règle qui détermine leurs vitesses relatives.

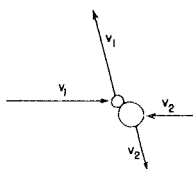


Fig. 39–3. Une collision entre molécules inégales, observée dans le système CM.

Ceci est encore un problème très difficile, mais nous allons le résoudre comme suit. D'abord nous considérons le sous-problème suivant (ceci est à nouveau un de ces cas où – quel que soit le mode de dérivation – le résultat à la fin est très simple à se rappeler, mais son établissement demande de l'ingéniosité). Supposons que nous ayons deux molécules, de masses différentes, en collision, et que la collision soit vue dans le système du centre de masse (CM). Afin d'éliminer une complication, nous regardons la collision dans le centre de masse. Comme nous le savons à partir des lois des collisions, par la conservation des quantités de mouvement et de l'énergie, la seule manière dont les molécules peuvent se déplacer après s'être cognées est telle que chacune conserve sa propre vitesse originale – et qu'elles ne font que changer de *direction*. Ainsi nous avons

en moyenne une collision qui ressemble à celle de la Figure 39.3. Supposons pour un moment que nous regardions toutes les collisions avec le centre de masse au repos. Supposons que nous imaginions qu'elles se déplacent toutes initialement horizontalement. Bien sûr, après la première collision, certaines d'entre elles se déplacent en oblique. En d'autres termes, si elles allaient toutes horizontalement, certaines au moins se déplacent verticalement un petit peu plus tard. Maintenant, dans d'autres collisions, certaines viendront d'une autre direction et elles seront déviées à nouveau dans une nouvelle direction. Ainsi même si elles étaient complètement organisées au début, elles seront rapidement dispersées dans toutes les directions et puis ces particules déjà dispersées le seront de plus en plus et de plus en plus. A la fin, que peut être la distribution? *La réponse: Il sera également probable de trouver n'importe quel couple se déplaçant dans n'importe quelle direction dans l'espace.* Après cela, des collisions ultérieures ne pourront pas changer la distribution.

Elles ont toutes la même probabilité d'aller dans toutes les directions, mais comment exprimer cela précisément? Il n'y a bien sûr *aucune* chance pour qu'elles aillent dans une certaine direction particulière, car une direction particulière est trop exacte, ce qui fait que nous devons parler par unité de «quelque chose». L'idée est qu'une surface quelconque sur une sphère centrée au point de collision sera traversée exactement par autant de molécules que toute autre surface égale sur la même sphère. Ainsi le résultat des collisions sera de distribuer les directions de telle sorte que des surfaces égales sur une sphère aient des probabilités égales.

Incidentement, si nous voulons simplement discuter la direction originale et une certaine autre direction faisant un angle θ avec elle, il est intéressant de remarquer que l'élément de surface différentiel de la sphère de rayon unité est $\sin \theta d\theta$ que multiplie 2π , et c'est la même chose que la différentielle de $\cos \theta$. Ainsi cela signifie que le cosinus de l'angle θ entre n'importe laquelle des deux directions a une égale probabilité de prendre n'importe quelle valeur entre -1 et $+1$.

Nous devons maintenant nous préoccuper du cas réel où la collision n'est pas dans le système CM, mais où nous avons deux atomes qui s'approchent l'un de l'autre avec des vecteurs vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. Que se passe-t-il alors? Nous pouvons étudier cette collision avec les vecteurs vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ de la manière suivante: Nous disons d'abord qu'il y a un certain CM; la vitesse du CM est donnée par la vitesse «moyenne» avec des poids proportionnels aux masses, ainsi la vitesse du centre de masse est $\mathbf{v}_{CM} = (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) / (m_1 + m_2)$. Si nous regardons cette collision dans le système CM, alors nous voyons une collision exactement semblable à celle de la Figure 39.3, avec une certaine vitesse relative $\mathbf{w}$ incidente. La vitesse relative est simplement $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$. L'idée maintenant est que, d'abord, le centre de masse se déplace, que dans le centre de masse il y a une vitesse relative $\mathbf{w}$, et que les molécules se cognent et repartent dans de nouvelles directions. Tout ceci se passe tandis que le centre de masse continue simplement à se déplacer sans aucun changement.

Quelle est alors la distribution résultant de ceci? En utilisant notre raisonnement antérieur, nous concluons ceci: à l'équilibre, *toutes les directions de $\mathbf{w}$ sont également probables, relativement à la direction du mouvement du centre de masse**. Il n'y a pas de corrélation

* Ce raisonnement, qui était celui utilisé par Maxwell, contient certaines subtilités. Bien que la conclusion soit correcte, le résultat ne se déduit *pas* simplement de considérations de symétrie comme celles que nous avons utilisées précédemment, puisque en passant à un système de référence se déplaçant au travers du gaz, nous pouvons trouver une distribution de vitesse déformée. Nous n'avons pas trouvé une démonstration simple de ce résultat.

particulière, à la fin, entre les directions du mouvement de la vitesse et celle du mouvement du CM. Bien sûr, s'il y en avait, les collisions les disperseraient, ce qui fait qu'elles doivent être totalement dispersées. Ainsi le cosinus de l'angle entre $\mathbf{w}$ et $\mathbf{v}_{CM}$ est en moyenne nul. C'est-à-dire

$$\langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_{CM} \rangle = 0. \quad (39.19)$$

Mais $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_{CM}$ peut être aussi bien exprimé en fonctions de $\mathbf{v}_1$, et $\mathbf{v}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_{CM} &= \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2)}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{(m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2) + (m_2 - m_1)(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (39.20)$$

D'abord, considérons $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$; quelle est la moyenne de $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$? C'est-à-dire, quelle est la moyenne de la composante de la vitesse de l'une des molécules dans la direction d'une autre? Certainement il y a tout autant de probabilité de trouver une molécule donnée quelconque se déplaçant d'une certaine manière que d'une autre. *La valeur moyenne de la vitesse $\mathbf{v}_2$ dans n'importe quelle direction est nulle.* Certainement, alors dans la direction de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ possède une moyenne nulle. Ainsi la moyenne de $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ est zéro! De ce fait, nous concluons que la moyenne de $m_1 v_1^2$ doit être égale à la moyenne de $m_2 v_2^2$. C'est-à-dire que *les énergies cinétiques moyennes des deux doivent être égales.*

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (39.21)$$

Lorsque nous avons deux sortes d'atomes dans un gaz, on peut montrer, et nous pensons avoir montré que l'énergie cinétique moyenne d'une sorte d'atomes est la même que la moyenne de l'énergie cinétique de l'autre sorte, lorsqu'ils sont tous les deux dans le même gaz, dans la même boîte en équilibre. Cela signifie que ceux qui sont lourds vont se déplacer plus lentement que ceux qui sont légers; ceci est facilement montré en expérimentant avec des « atomes » de masses différentes dans un appareil à coussin d'air.



Fig. 39-4. Deux gaz dans une boîte avec une membrane semi-perméable.

Nous aimerions maintenant franchir une étape de plus, et dire que si nous avons deux gaz différents *séparés* dans une boîte, ils auront également des énergies cinétiques moyennes égales, lorsqu'ils auront en définitive atteint l'équilibre, bien qu'ils ne soient pas dans la même boîte. Nous pouvons présenter la démonstration de différentes manières. Une manière est de dire que si nous avons une cloison fixe avec un trou très petit (Fig. 39-4) de telle sorte qu'un gaz puisse passer au travers du trou tandis que l'autre ne puisse pas, parce que les molécules sont trop grosses et que celles-ci ont atteint l'équilibre, alors nous savons que dans une des parties où elles sont mélangées, elles ont la même énergie cinétique moyenne, mais certaines traversent le trou sans perte d'énergie cinétique, ainsi l'énergie cinétique moyenne dans le gaz pur et dans le mélange doivent être les mêmes. Ceci n'est pas très satisfaisant, parce que peut-être il n'y a pas de trou pour ce genre de molécule, qui sépare une espèce de l'autre.

Revenons maintenant au problème du piston. Nous pouvons donner une démonstration qui montre que l'énergie cinétique de ce piston doit être également $\frac{1}{2}m_2v_2^2$. En réalité, cela sera l'énergie cinétique due au mouvement purement horizontal du piston, ainsi oubliant son mouvement vers le haut et vers le bas, elle devra être la même que $\frac{1}{2}m_2v_{2x}^2$. De la même manière, à partir de l'équilibre de l'autre côté, nous pouvons montrer que l'énergie cinétique du piston est $\frac{1}{2}m_1v_{1x}^2$. Bien que celui-ci ne soit pas au milieu du gaz, mais avec le gaz sur un côté, nous pouvons encore démontrer, bien que ceci soit un petit peu plus compliqué, que l'énergie cinétique moyenne du piston et des molécules des gaz sont égales, comme résultat de toutes les collisions.

Si ceci ne nous satisfait toujours pas, nous pouvons prendre un exemple artificiel par lequel l'équilibre est créé par un objet qui peut être frappé de tous les côtés. Supposons que nous ayons un barreau court, avec une boule à chaque extrémité, fixé au travers du piston sur un joint universel glissant sans frottement. Chaque boule est ronde, comme une des molécules, et peut être frappée de tous les côtés. Cet objet dans son ensemble possède une certaine masse totale, m . Nous avons également les molécules de gaz de masse m_1 et de masse m_2 comme précédemment. Le résultat des collisions, par l'analyse que nous avons faite précédemment, est que l'énergie cinétique de m à cause des collisions avec des molécules sur un des côtés, doit être $\frac{1}{2}m_1v_1^2$, en moyenne. De la même manière, à cause des collisions avec les molécules sur l'autre côté, elle doit être $\frac{1}{2}m_2v_2^2$ en moyenne. Ainsi, de ce fait, les deux côtés doivent avoir la même énergie cinétique lorsqu'ils sont en équilibre thermique. Ainsi, bien que nous ne l'ayons prouvé que pour un mélange de gaz, ceci est facilement étendu au cas où il y a deux gaz différents, séparés, à la même température.

Ainsi, lorsque nous avons deux gaz à la même température, l'énergie cinétique moyenne des mouvements des centres de masse est égale.

L'énergie cinétique moyenne moléculaire ne dépend que de la « température ». Ne dépendant que de la « température » et *non du gaz*, nous pouvons l'utiliser comme *définition* de la température. L'énergie cinétique moyenne d'une molécule est donc une certaine fonction de la température. Mais qui nous dira quelle échelle utiliser pour la température? Nous pouvons arbitrairement *définir* l'échelle de température de telle sorte que l'énergie moyenne soit linéairement proportionnelle à la température. La meilleure manière de faire serait d'appeler « température » l'énergie moyenne elle-même. Ce serait la fonction la plus simple possible. Malheureusement, l'échelle de température a été choisie différemment, ce qui fait qu'au lieu de l'appeler température directement, nous utilisons un facteur de conversion constant entre l'énergie d'une molécule et un degré de température absolue appelé un degré Kelvin. La constante de proportionnalité est $k = 1.38 \times 10^{-23}$ joule pour chaque degré Kelvin*. Si T est une température absolue, notre définition dit que l'énergie cinétique moléculaire moyenne est $\frac{3}{2}kT$. (Le $\frac{3}{2}$ est placé là par commodité, de telle sorte que l'on puisse l'éliminer quelque part ailleurs.)

Nous mettons en évidence le fait que l'énergie cinétique associée avec la composante du mouvement dans n'importe quelle direction particulière est simplement $\frac{1}{2}kT$. Les trois directions indépendantes qui sont en cause font qu'elle est au total $\frac{3}{2}kT$.

* L'échelle centigrade est semblable à l'échelle Kelvin avec un zéro choisi à 273.16 °K, ainsi $T = 273.16 + \text{température centigrade}$.

39-5 La loi du gaz parfait

Nous pouvons maintenant, bien sûr, introduire notre définition de la température dans l'équation (39.9) et ainsi trouver la loi de la pression des gaz en fonction de la température: la pression que multiplie le volume est égale au nombre total des atomes que multiplie la constante universelle k , que multiplie la température:

$$PV = NkT. \quad (39.22)$$

De plus, avec les mêmes température, pression et volume, le *nombre des atomes* est déterminé; lui aussi est une constante universelle! Ainsi des volumes égaux de gaz différents, aux mêmes pressions et températures, ont le même nombre de molécules à cause de la loi de Newton. C'est une conclusion étonnante!

En pratique, lorsqu'on s'occupe de molécules, du fait de leur grand nombre, les chimistes ont choisi artificiellement un nombre particulier, un très grand nombre, et l'ont appelé par un certain nom. Ils ont choisi un nombre qu'ils appellent une *mole*. Une mole est simplement un nombre commode. Qu'ils n'aient pas choisis 10^{24} objets, de telle sorte que ce nombre soit rond, est une question d'histoire. Ils ont choisi pour nombre commode d'objets sur lequel ils ont pris référence, $N_0 = 6,02 \times 10^{23}$ objets, et ceci est appelé une mole d'objets. Ainsi, au lieu de mesurer le nombre de molécules en unités, ils le mesurent en termes de nombres de moles*. En fonction de N_0 , nous pouvons écrire le nombre de moles que multiplie le nombre d'atomes dans une mole, que multiplie kT , et si nous le voulons, nous pouvons prendre le nombre d'atomes dans une mole que multiplie k , ce qui est une mole de fois k et l'appeler par un autre nom – nous l'appellerons R . Une mole de fois k vaut 8,317 joules: $R = N_0 k = 8,317 \text{ j. mole}^{-1} \cdot \text{°K}^{-1}$. Ainsi nous trouvons également que la loi des gaz est écrite comme le nombre de moles (également appelé N) que multiplie RT , ou le nombre d'atomes que multiplie kT :

$$PV = NRT. \quad (39.23)$$

C'est la même chose, mais avec simplement une échelle différente pour mesurer les nombres. Nous utilisons 1 comme unité et les chimistes utilisent 6×10^{23} comme unité!

Nous faisons maintenant une remarque supplémentaire sur notre loi des gaz, et ceci est en relation avec la loi concernant les objets autres que les molécules mono-atomiques. Nous avons uniquement traité du mouvement du centre de masse des atomes d'un gaz mono-atomique. Que se passe-t-il s'il y a des forces? D'abord considérons le cas où le piston est maintenu par un ressort horizontal et où des forces agissent sur lui. L'échange des mouvements d'agitation entre les atomes et le piston à tout instant ne dépend pas de l'endroit où se trouve le piston à cet instant, bien sûr. Les conditions d'équilibre sont les mêmes. Quelle que soit la position où se trouve le piston, la vitesse de son mouvement doit être telle qu'il procure de l'énergie aux molécules de la bonne manière. Ainsi le ressort ne fait aucune différence. La *vitesse* à laquelle le piston doit se déplacer, en moyenne, est la même. Ainsi notre problème qui est que la valeur de l'énergie cinétique dans une direction est $\frac{1}{2}kT$, est vrai, *qu'il y ait des forces en action, où qu'il n'y en ait pas*.

* Ce que les chimistes appellent poids moléculaires, ce sont les masses en grammes d'une mole d'une molécule. La mole est définie de telle sorte que la masse d'une mole d'atomes de carbone de l'isotope 12 (c'est-à-dire ayant 6 protons et 6 neutrons dans le noyau) soit exactement 12 grammes.

Considérons, par exemple, une molécule diatomique composée d'atomes m_A et m_B . Nous avons prouvé que le mouvement des CM de la partie A et celui de la partie B sont tels que $\langle \frac{1}{2} m_A v_A^2 \rangle = \langle \frac{1}{2} m_B v_B^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$. Comment cela peut-il être, s'ils sont maintenus ensemble? Bien qu'ils soient maintenus ensemble lorsqu'ils tournent et se retournent, lorsque quelque chose les frappe, échangeant de l'énergie avec eux, *la seule chose qui compte est la vitesse à laquelle ils se déplacent*. Ceci seul détermine à quelle vitesse ils échangent de l'énergie dans des collisions. A un instant particulier, la force n'est pas un point essentiel. Ainsi le même principe est exact, même lorsqu'il y a des forces.

Démontrons finalement que la loi des gaz est également correcte lorsqu'on oublie le mouvement interne. Nous n'avions pas effectivement inclus le mouvement interne auparavant; nous avons simplement traité le cas d'un gaz mono-atomique. Mais nous allons montrer qu'un objet dans sa totalité, considéré comme un seul corps de masse totale M , possède une vitesse de centre de masse telle que

$$\frac{1}{2} M v_{CM}^2 = \frac{3}{2} kT. \quad (39.24)$$

En d'autres termes, nous pouvons considérer soit les morceaux séparés soit l'objet dans son ensemble! Examinons les raisons de cela: La masse de la molécule diatomique est $M = m_A + m_B$, et la vitesse de centre de masse est égale à $v_{CM} = (m_A v_A + m_B v_B)/M$. Il nous faut maintenant $\langle v_{CM}^2 \rangle$. Si nous élevons au carré v_{CM} nous obtenons

$$v_{CM}^2 = \frac{m_A^2 v_A^2 + 2m_A m_B v_A \cdot v_B + m_B^2 v_B^2}{M^2}.$$

Nous multiplions maintenant $\frac{1}{2} M$, prenons la moyenne, et obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M v_{CM}^2 &= \frac{m_A \frac{3}{2} kT + 2m_A m_B \langle v_A \cdot v_B \rangle + m_B \frac{3}{2} kT}{M} \\ &= \frac{3}{2} kT + \frac{2m_A m_B \langle v_A \cdot v_B \rangle}{M}. \end{aligned}$$

(Nous avons utilisé le fait que $(m_A + m_B)/M = 1$.) Qu'est-ce que vaut $\langle v_A \cdot v_B \rangle$? (Il vaudrait mieux qu'il soit nul!) Pour le trouver, utilisons notre hypothèse que la vitesse relative $w = v_A - v_B$ n'a aucune chance de pointer dans une direction plutôt que dans une autre – c'est-à-dire que sa composante en moyenne dans n'importe quelle direction est nulle. Ainsi nous supposons que

$$\langle w \cdot v_{CM} \rangle = 0.$$

Mais qu'est-ce que $w \cdot v_{CM}$? C'est

$$\begin{aligned} w \cdot v_{CM} &= \frac{(v_A - v_B) \cdot (m_A v_A + m_B v_B)}{M} \\ &= \frac{m_A v_A^2 + (m_B - m_A)(v_A \cdot v_B) - m_B v_B^2}{M}. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\langle m_A v_A^2 \rangle = \langle m_B v_B^2 \rangle$, le premier et le dernier termes se simplifient en moyenne, et il nous reste:

$$(m_B - m_A) \langle v_A \cdot v_B \rangle = 0.$$

Si donc $m_A \neq m_B$ nous trouvons que $\langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle = 0$, et de ce fait que le mouvement du corps de la molécule entière, regardée comme une seule particule de masse M , possède une énergie cinétique en moyenne égale à $\frac{3}{2}kT$.

Incidemment, nous avons trouvé en même temps que l'énergie cinétique moyenne des mouvements *internes* de la molécule diatomique, sans considérer le mouvement global du centre de masse, est $\frac{3}{2}kT$! Car l'énergie cinétique totale des parties de la molécule est $\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2$, dont la moyenne est $\frac{3}{2}kT + \frac{3}{2}kT$, ou $3kT$. L'énergie cinétique du mouvement du centre de masse est $\frac{3}{2}kT$, ainsi l'énergie cinétique moyenne des mouvements rotationnels et vibrationnels des deux atomes à l'intérieur de la molécule est la différence $\frac{3}{2}kT$.

Le théorème concernant l'énergie moyenne du mouvement du centre de masse est général: pour tout objet considéré dans son ensemble, avec des forces agissant ou non, pour toute direction indépendante de mouvement possible, l'énergie cinétique moyenne de ce mouvement est $\frac{1}{2}kT$. Ces « directions indépendantes du mouvement » sont quelquefois appelées les *degrés de liberté* du système. Le nombre de degrés de liberté d'une molécule composée de r atomes est $3r$, puisque chaque atome nécessite trois coordonnées pour définir sa position. L'énergie cinétique entière de la molécule peut être exprimée soit comme la somme des énergies cinétiques des atomes séparés, soit comme la somme de l'énergie cinétique du mouvement du centre de masse et de l'énergie cinétique des mouvements internes. Ces derniers peuvent quelquefois être exprimés comme une somme de l'énergie cinétique rotationnelle de la molécule et de l'énergie vibrationnelle, mais ceci est une approximation. Notre théorème appliqué à la molécule de r -atomes, dit que la molécule aura en moyenne $3rkT/2$ joules d'énergie cinétique, parmi lesquels $\frac{3}{2}kT$ est l'énergie cinétique du mouvement du centre de masse de la molécule entière et le reste $\frac{3}{2}(r-1)kT$, est de l'énergie cinétique interne, vibrationnelle et rotationnelle.

Les principes de la mécanique statistique

40-1 L'atmosphère exponentielle

40-2 La loi de Boltzmann

40-3 Évaporation d'un liquide

40-4 La distribution des vitesses moléculaires

40-5 Les chaleurs spécifiques des gaz

40-6 L'échec de la physique classique

40-1 L'atmosphère exponentielle

Nous avons traité quelques-unes des propriétés d'un grand nombre d'atomes qui s'entrechoquent. Ce sujet est appelé théorie cinétique, une description de la matière du point de vue des collisions entre les atomes. Fondamentalement, nous affirmons que les propriétés globales de la matière doivent être explicables en fonction du mouvement de ses différentes parties.

Nous nous limitons, pour le moment, aux conditions d'équilibre thermique, c'est-à-dire à un sous-ensemble de tous les phénomènes de la nature. Les lois de mécanique qui ne s'appliquent qu'à l'équilibre thermique sont rassemblées sous le nom de *mécanique statistique*, et dans cette section nous voulons nous familiariser avec certains des théorèmes centraux de ce domaine.

Nous sommes déjà en possession d'un des théorèmes de la mécanique statistique, à savoir que la valeur moyenne de l'énergie cinétique pour tout mouvement à la température absolue T est $\frac{1}{2}kT$ pour chaque mouvement indépendant, c'est-à-dire pour chaque degré de liberté. Ceci nous donne une information sur la moyenne quadratique des vitesses des atomes. Notre objectif maintenant est d'en apprendre davantage sur la position des atomes, de découvrir combien d'entre eux se trouvent en différents endroits à l'équilibre thermique, et également de pénétrer un peu plus en détail dans la connaissance de la distribution des vitesses. Bien que nous possédions la moyenne quadratique des vitesses, nous ne savons pas comment répondre à une question telle que: combien d'entre elles vont trois fois plus vite que la moyenne quadratique de la vitesse, ou combien d'entre elles vont à un quart de la moyenne quadratique de la vitesse? Ou bien, ont-elles toutes exactement la même vitesse?

Voilà donc les deux questions auxquelles nous allons essayer de répondre: Comment les molécules sont-elles distribuées dans l'espace, lorsqu'il y a des forces qui agissent sur elles et comment sont-elles distribuées en vitesse?

Il se trouve que ces deux questions sont complètement indépendantes et que la distribution des vitesses est toujours la même. Nous avons déjà eu un aperçu de ce dernier effet lorsque nous avons trouvé que l'énergie cinétique moyenne est la même, $\frac{1}{2}kT$ par degré de liberté, quelles que soient les forces qui agissent sur les molécules. La distribution des vitesses des molécules est indépendante des forces, parce que la fréquence des collisions ne dépend pas des forces.

Mécanisme pour égaliser les températures

$h + dh$

h

g

Si la température est la même à toutes les hauteurs, le problème est de découvrir selon quelle loi l'atmosphère devient moins dense lorsque nous montons. Si N est le nombre total de molécules dans un volume V de gaz à la pression P , nous savons que $PV = NkT$, ou $P = nkT$, où $n = N/V$ est le nombre de molécules par unité de volume. En d'autres termes, si nous connaissons le nombre de molécules par unité de volume, nous connaissons la pression et vice versa: ces grandeurs sont proportionnelles l'une à l'autre, puisque la température est constante dans ce problème. Mais la pression n'est pas constante, elle doit augmenter lorsque l'altitude diminue parce qu'elle doit supporter, pour ainsi dire, le poids de tout le gaz qui la surplombe. C'est ainsi que nous allons déterminer comment la pression change avec la hauteur. Si nous prenons une unité de surface à la hauteur h , alors la force verticale, venant de dessous, s'exerçant sur cette unité de surface est la pression P . La force verticale par unité de surface poussant vers le bas à une hauteur $h + dh$ sera la même, en l'absence de gravité, mais ce n'est pas le cas ici puisque la force du dessous doit dépasser la force du dessus d'une quantité égale au poids du gaz dans la section entre h et $h + dh$. Or mg est la force de gravitation sur chacune des molécules, où g est l'accélération due à la gravité, et $n dh$ est le nombre total des molécules dans la section unité. Ceci nous donne l'équation différentielle $P_h + dh - P_h = dP = -mgn dh$. Puisque $P = nkT$, et T est constante, nous pouvons éliminer soit P soit n , par exemple P , et obtenir

207

pour l'équation différentielle, qui nous dit comment la densité diminue lorsque nous augmentons en énergie.

Nous avons donc une équation donnant la densité de particules n , cette densité varie avec la hauteur, mais a une dérivée proportionnelle à elle-même. Une fonction qui possède une dérivée proportionnelle à elle-même est une exponentielle, et la solution de cette équation différentielle est

$$n = n_0 e^{-mgh/kT}. \quad (40.1)$$

La constante d'intégration, n_0 , est évidemment la densité en $h = 0$ (qui peut être choisie n'importe où), et la densité diminue exponentiellement avec la hauteur.

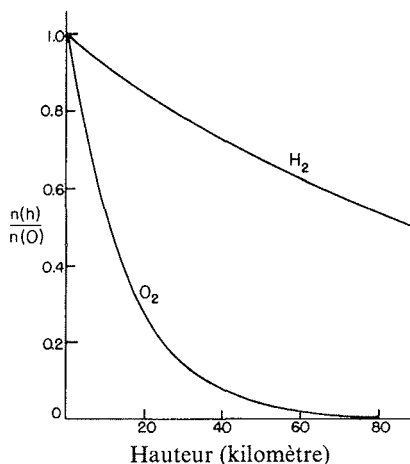


Fig. 40-2. Les densités normalisées de l'oxygène et de l'hydrogène à température constante, en fonction de la hauteur dans le champ gravitationnel terrestre.

Remarquez que si nous avons différentes sortes de molécules avec différentes masses, elles diminuent en densité avec des exponentielles différentes. Celles qui sont les plus lourdes diminueront avec l'altitude plus rapidement que les plus légères. De ce fait nous nous attendons, puisque l'oxygène est plus lourd que l'azote, à ce que, lorsque nous montons de plus en plus dans l'atmosphère contenant de l'azote et de l'oxygène, la proportion d'azote augmente. Ceci ne se produit pas réellement dans notre atmosphère, au moins pour des hauteurs raisonnables, parce qu'il y a beaucoup d'agitation qui remélange les gaz. Ce n'est pas une atmosphère isotherme. Néanmoins les matériaux plus légers tels que l'hydrogène ont tendance à dominer à de très grandes hauteurs dans l'atmosphère, parce que les masses les plus faibles continuent à exister, tandis que les autres exponentielles ont toutes pratiquement disparu. (Fig. 40-2.)

40-2 La loi de Boltzmann

Nous remarquons ici le fait intéressant que le numérateur dans l'exposant de l'équation (40.1) est l'énergie potentielle d'un atome. Aussi nous pouvons énoncer cette loi particulière comme suit: la densité en tout point est proportionnelle à

$$e^{-(\text{l'énergie potentielle de chaque atome } kT)}.$$

Ceci peut être un accident, c'est-à-dire peut n'être vrai que dans le cas particulier d'un champ gravitationnel uniforme. Cependant, nous pouvons montrer que c'est une proposition plus générale. Supposez qu'il y ait certain type de force autre que la gravité agissant sur les molécules dans un gaz. Par exemple, les molécules peuvent être chargées électriquement, et peuvent subir l'action d'un champ électrique ou d'une autre charge qui les attire. Ou bien, à cause des attractions mutuelles des atomes par les parois ou par un solide, ou quelque chose d'autre, une certaine force d'attraction existe qui varie avec la position et qui agit sur toutes les molécules. Supposez maintenant que, pour simplifier, les molécules soient toutes les mêmes et que la force agisse sur chaque molécule individuelle, de telle sorte que la force totale sur un volume de gaz soit simplement égale au nombre de molécules que multiplie la force sur chacune d'entre elles. Pour éviter des complications inutiles, choisissons un système de coordonnées avec l'axe des x dans la direction de la force, F .

De la même manière que ci-dessus, lorsque nous prenons deux plans parallèles dans le gaz, séparés par la distance dx , la force sur chaque atome que multiplie les n atomes par cm^3 (la généralisation du précédent nmg), que multiplie dx , doit être équilibrée par le changement de pression: $Fn dx = dP = kT dn$. Ou, pour mettre cette loi sous une forme qui nous sera utile plus tard,

$$F = kT \frac{d}{dx} (\ln n). \quad (40.2)$$

Pour le moment, remarquez que $-F dx$ est le travail que nous réaliserions en menant une molécule de x à $x + dx$, et si F provient d'un potentiel, c'est-à-dire si le travail réalisé peut être représenté par une énergie potentielle, alors ce sera également la différence des énergies potentielles (E.P.). La différentielle négative de l'énergie potentielle est égale au travail réalisé, $F dx$, et nous trouvons que

$$d(\ln n) = -d(\text{E.P.})/kT,$$

ou, après avoir intégré,

$$n = (\text{constante}) e^{-\text{E.P.}/kT}; \quad (40.3)$$

Ainsi, ce que nous avons remarqué pour un cas particulier, apparaît comme étant vrai en général. (Que se passe-t-il si F ne provient pas d'un potentiel? Alors (40.2) n'a pas de solution du tout. De l'énergie peut être créée ou perdue par les atomes parcourant des trajectoires cycliques pour lesquelles le travail réalisé n'est pas nul et aucun équilibre ne peut être maintenu. L'équilibre thermique ne peut exister si les forces externes sur les atomes ne sont pas conservatives.) L'équation (40.3), connue sous le nom de *loi de Boltzmann*, est un autre des principes de mécanique statistique: la probabilité de trouver des molécules dans une certaine configuration spatiale varie exponentiellement avec l'opposé de l'énergie potentielle de cette configuration, divisée par kT .

Ceci peut alors nous donner la distribution des molécules: Supposez que nous ayons un ion positif dans un liquide, attirant des ions négatifs autour de lui, combien d'entre eux seront à différentes distances? Si l'énergie potentielle est connue en tant que fonction de la distance, alors la proportion de ceux-ci à différentes distances est donnée par cette loi, et ainsi de suite, dans de multiples applications.

40-3 Évaporation d'un liquide

En mécanique statistique plus avancée, on essaye de résoudre l'important problème suivant. Considérons un ensemble de molécules qui s'attirent mutuellement, et supposons que la force entre un couple quelconque, disons i et j , ne dépende que de leur distance r_{ij} , et puisse être représentée comme la dérivée d'une fonction potentielle $V(r_{ij})$. La Figure 40-3 montre la forme qu'une telle fonction pourrait avoir. Pour $r > r_0$, l'énergie diminue lorsque les molécules se rapprochent, parce qu'elles s'attirent, et puis l'énergie augmente très rapidement lorsqu'elles se rapprochent encore davantage, parce qu'elles se repoussent très fortement, ce qui est caractéristique en première approximation de la manière dont les molécules se comportent.

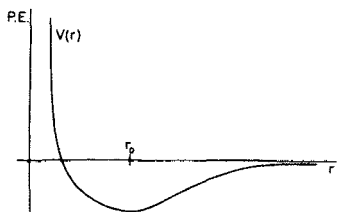


Fig. 40-3. Une fonction d'énergie potentielle pour deux molécules ne dépendant que de leur séparation.

Supposez maintenant que nous ayons une boîte pleine de telles molécules et que nous voulions savoir comment elles s'arrangent en moyenne. La réponse est $e^{-E.P./kT}$. L'énergie potentielle totale dans ce cas sera la somme sur toutes les paires, en supposant que les forces vont toutes par paires (il peut y avoir des forces à trois corps, dans des objets plus compliqués, mais en électricité, par exemple, l'énergie potentielle se réduit à celle de paires). Alors la probabilité de trouver les molécules dans n'importe quelle combinaison particulière de r_{ij} sera proportionnelle à

$$\exp \left[- \sum_{i,j} V(r_{ij})/kT \right].$$

Si maintenant la température est très élevée, de telle sorte $kT \gg V(r_0)$, l'exposant est relativement petit presque tout le temps, et la probabilité de trouver une molécule est presque indépendante de la position. Prenons le cas simplement de deux molécules: le terme $e^{-E.P./kT}$ sera la probabilité de les trouver à différentes distances r l'une de l'autre. Clairement, lorsque le potentiel est le plus bas, la probabilité est la plus grande, et lorsque le potentiel tend vers l'infini, la probabilité est presque nulle, ce qui ne se produit que pour de très petites distances. Ceci signifie que pour de tels atomes dans un gaz, il n'y a aucune chance qu'ils soient tout près l'un de l'autre, puisqu'ils se repoussent si fortement. Mais il y a une plus grande chance de les trouver par *unité de volume* au point r_0 qu'en tout autre point. Cette plus grande chance dépend de la température. Si la température est très grande en comparaison de la différence en énergie entre $r = r_0$ et $r = \infty$, l'exponentielle est toujours très proche de l'unité. Dans ce cas, lorsque l'énergie cinétique moyenne (environ kT) dépasse grandement l'énergie potentielle, la force n'a pas grande influence. Mais lorsque la température tombe, la probabilité de trouver les molécules à la distance préférée r_0 augmente progressivement par rapport à la probabilité de les trouver

à une autre distance, et en fait, si kT est très inférieur à $|V(r_0)|$, nous avons un exposant relativement grand et positif au voisinage de r_0 . En d'autres termes, dans un volume donné, il est *beaucoup plus* probable qu'elles se trouvent à la distance d'énergie minimum plutôt que très éloignées. Lorsque la température diminue, les atomes se rassemblent, s'accumulent en amas et se réduisent à l'état de liquides, de solides et de molécules et lorsque vous les chauffez ils s'évaporent.

Afin de déterminer comment exactement l'évaporation se produit, comment exactement les choses doivent se passer dans une circonstance donnée, il faut connaître ce qui suit. Premièrement, découvrir la loi correcte des forces moléculaires $V(r)$, qui doit venir de quelque chose d'autre, de la mécanique quantique, par exemple ou de l'expérience. Mais étant donné la loi des forces entre les molécules, découvrir ce qu'un milliard de molécules vont faire consiste simplement à étudier la fonction $e^{-\sum V_{ij}/kT}$. Il est tout à fait surprenant, une fois le potentiel donné, puisque c'est une fonction aussi simple et une idée aussi élémentaire, que le travail soit si *énormément compliqué*; la difficulté provient du nombre considérable de variables.

Malgré de telles difficultés, le sujet est tout à fait passionnant et intéressant. C'est souvent appelé un exemple d'un « problème à N corps » et c'est effectivement une chose extrêmement intéressante. Dans cette seule formule doivent être contenus tous les détails, par exemple sur la solidification des gaz, ou les formes de cristaux qu'un solide peut prendre et les gens ont essayé d'en sortir ces résultats, mais les difficultés mathématiques sont très grandes, non pas pour écrire la loi, mais pour travailler avec un aussi grand nombre de variables.

Ceci donc est la distribution des particules dans l'espace. C'est la fin de la mécanique statistique classique, pour parler pratiquement, car si nous connaissons les forces, nous pouvons, en principe, trouver la distribution dans l'espace et la distribution de la vitesse peut être déterminée une fois pour toutes, ce n'est pas quelque chose qui varie selon les cas. Les grands problèmes sont d'obtenir des informations particulières à partir de notre solution formelle et c'est le principal objet de la mécanique statistique classique.

40-4 La distribution des vitesses moléculaires

Nous allons maintenant parler de la distribution des vitesses, parce que quelquefois il est intéressant ou utile de connaître combien de particules se déplacent à des vitesses différentes. Pour ce faire, nous pouvons utiliser les résultats découverts pour un gaz dans l'atmosphère. Nous le considérons comme un gaz parfait, comme nous l'avons déjà fait en écrivant l'énergie potentielle, en négligeant l'énergie d'attraction mutuelle entre les atomes. La seule énergie potentielle que nous avons incluse dans notre premier exemple était la gravitation. Nous aurions, bien sûr, quelque chose de plus compliqué s'il y avait des forces entre les atomes. C'est pourquoi nous supposons qu'il n'y a pas de forces entre les atomes et que pour le moment nous ne considérons pas les collisions, revenant plus tard à la justification de ceci. Nous voyons maintenant qu'il y a moins de molécules à la hauteur h qu'il n'y en a à la hauteur 0; d'après la formule (40.1), elles décroissent en nombre exponentiellement avec la hauteur. Comment peut-il y en avoir moins à des hauteurs plus élevées? Après tout, est-ce que toutes les molécules qui vont vers le haut à la hauteur 0 n'arrivent pas en h ? Non! parce que certaines de celles qui se déplacent vers le haut en 0 vont trop lentement, et ne peuvent pas gravir la barrière de potentiel jusqu'en h . A l'aide de ce considération nous pouvons calculer combien il y en a qui se déplacent

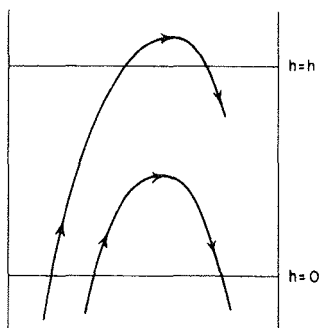


Fig. 40-4. Seules les molécules allant vers le haut en $h=0$ avec une vitesse suffisante peuvent atteindre la hauteur h .

à diverses vitesses, parce qu'à partir de (40.1) nous savons *combien* il y en a qui se déplacent avec moins de la vitesse nécessaire pour atteindre une distance donnée h . Celles-là sont exactement celles qui rendent compte du fait que la densité en h est plus faible qu'en 0.

Précisons un peu plus cette idée: comptons combien de molécules passent du bas vers le haut au travers du plan $h=0$ (en l'appelant hauteur 0, nous ne voulons pas dire que c'est le sol; c'est simplement une dénomination commode et il y a du gaz à des valeurs négatives de h). Ces molécules de gaz se déplacent dans toutes les directions, mais certaines d'entre elles traversent le plan et à chaque instant un certain nombre par seconde traversent le plan du bas vers le haut avec des vitesses différentes. Nous remarquons maintenant la chose suivante: si nous appelons u la vitesse qui est tout juste nécessaire pour atteindre la hauteur h (énergie cinétique $mu^2/2 = mgh$), alors le nombre de molécules par seconde qui traversent vers le haut le plan le plus bas, dans une direction verticale avec une composante de vitesse plus grande que u est exactement le même que le nombre qui traverse le plan supérieur vers le haut avec une vitesse quelconque. Ces molécules dont la vitesse verticale ne dépasse pas u ne peuvent pas traverser le plan supérieur. Ainsi nous voyons que

Nombre de celles qui passent $h=0$ avec $v_z > u$ = nombre de celles qui passent $h=h$ avec $v_z > 0$.

Mais le nombre de celles qui passent au travers de h avec une vitesse quelconque plus grande que 0 est inférieur au nombre de celles qui traversent le niveau le plus bas avec une vitesse quelconque plus grande que 0, parce que le nombre d'atomes est plus élevé; c'est tout ce qu'il nous faut. Nous savons déjà que la distribution des vitesses est la même d'après l'hypothèse établie précédemment disant que la température reste constante tout au long de l'atmosphère. Ainsi, puisque les distributions des vitesses sont les mêmes, et qu'il y a simplement *plus d'atomes* plus bas, il est clair que le nombre $n_{>u}(h)$ passant avec des vitesses positives à la hauteur h , et le nombre $n_{>u}(0)$, passant avec des vitesses positives à la hauteur 0, sont dans le même rapport que les densités aux deux hauteurs, ce qui vaut $e^{-mgh/kT}$. Mais $n_{>u}(h) = n_{>u}(0)$, et de ce fait nous trouvons que

$$\frac{n_{>u}(0)}{n_{>0}(0)} = e^{-mgh/kT} = e^{-mu^2/2kT},$$

puisque $\frac{1}{2}mu^2 = mgh$. Ainsi, exprimé en mots, le nombre de molécules passant par unité de surface par seconde à la hauteur 0 avec une composante z de vitesse plus grande que u , vaut $e^{-mu^2/2kT}$ que multiplie le nombre total qui passe au travers du plan avec des vitesses plus grandes que zéro.

Ceci n'est pas seulement vrai à la hauteur 0 choisie arbitrairement, mais bien sûr à n'importe quelle hauteur, et ainsi les distributions de vitesses *sont* toutes les mêmes! (L'énoncé final ne contient pas la hauteur h , qui n'apparaît que dans la démonstration intermédiaire.) Le résultat est une proposition générale qui nous donne la distribution des vitesses. Elle nous dit que si nous perçons un petit trou dans un conduit de gaz, un très petit trou, de telle sorte que les collisions soient peu nombreuses et très écartées, c'est-à-dire qu'elles se réalisent à des distances plus grandes que le diamètre du trou, alors les particules qui sortent auront des vitesses différentes, mais la fraction des particules qui sortent à une vitesse plus grande que u vaudra $e^{-mu^2/2kT}$.

Revenons maintenant au fait d'avoir négligé les collisions: Pourquoi cela n'a-t-il pas d'importance? Nous aurions pu continuer le même raisonnement, non pas avec une hauteur finie h , mais avec une hauteur infinitésimale h qui soit si petite qu'il n'y ait pas de place pour des collisions entre 0 et h . Mais ceci n'était pas nécessaire: le raisonnement est évidemment fondé sur l'analyse des énergies en jeu, la conservation de l'énergie, et dans les collisions qui se produisent il y a échange des énergies entre les molécules. Cependant, nous ne nous préoccupons pas réellement de suivre la même molécule lorsque l'énergie est simplement échangée avec une autre molécule. Il apparaît donc que, même si le problème est traité avec plus de soin (et il est plus difficile, naturellement, de faire un travail rigoureux), cela n'a pas d'importance pour le résultat.

Il est intéressant de remarquer que la distribution de vitesse que nous avons trouvée est simplement

$$n > u \propto e^{-\text{énergie cinétique}/kT} \quad (40.4)$$

Cette manière d'écrire la distribution des vitesses, en donnant le nombre de molécules qui traversent une certaine surface avec une certaine composante z minimum, n'est pas la manière la plus commode de donner la distribution de vitesse. Par exemple à l'intérieur du gaz, on préfère souvent connaître combien de molécules se déplacent avec une composante z de vitesse comprise entre deux valeurs données, et ceci bien sûr n'est pas donné directement par l'équation (40.4). Nous aimerions énoncer notre résultat, sous une forme plus habituelle, bien que ce que nous ayons déjà écrit soit tout à fait général. *Remarquez qu'il n'est pas possible de dire qu'une molécule est exactement animée d'une certaine vitesse;*

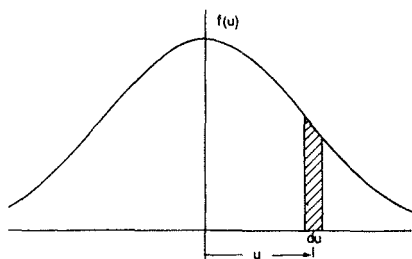


Fig. 40-5. Une fonction de distribution de vitesse. L'aire hachurée vaut $f(u) du$, fraction des molécules ayant des vitesses dans l'intervalle du autour de u .

aucune d'elles ne possède une vitesse *exactement égale* à 1,7962899173 mètre par seconde. Afin d'énoncer quelque chose qui ait un sens, nous devons donc donner le nombre de molécules qui se trouvent dans un certain *domaine* de vitesses. Nous devons dire combien de molécules ont une vitesse comprise entre 1,796 et 1,797, etc. En termes mathématiques, soit $f(u)du$ la fraction de toutes les molécules qui ont des vitesses entre u et $u + du$ ou, ce qui est la même chose (si du est infinitésimal), toutes celles qui ont une vitesse u à du près. La Figure 40-5 reproduit une forme possible de la fonction $f(u)$ et la partie hachurée, de largeur du et de hauteur moyenne $f(u)$ représente cette fraction $f(u)du$. C'est-à-dire que le rapport de la surface hachurée à la surface totale de la courbe est égale à la proportion relative de molécules ayant une vitesse u dans l'intervalle du . Si nous définissons $f(u)$ de telle sorte que la fraction ayant une vitesse dans cet intervalle soit directement donnée par la surface hachurée, la surface totale doit alors être égale à 100 pour cent des molécules, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1. \quad (40.5)$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à obtenir cette distribution en la comparant avec le théorème que nous avons décrit précédemment. Premièrement, nous cherchons en fonction de $f(u)$ quel est le nombre de molécules traversant par seconde une surface avec une vitesse plus grande que u ? A première vue, nous pouvons penser que c'est simplement l'intégrale de $\int_u^{\infty} f(u)du$, mais ce n'est pas le cas, parce que nous voulons le nombre qui traverse la surface *par seconde*. Les plus rapides passent plus souvent pour ainsi dire que les plus lentes, et pour exprimer le nombre de celles qui passent, il faut multiplier par la vitesse. (Nous avons discuté de cela dans le chapitre précédent lorsque nous parlions du nombre de collisions.) Pendant un intervalle de temps donné t les molécules qui traversent la surface sont toutes celles qui ont été capables d'arriver à cette surface, et celles qui arrivent proviennent d'une distance ut . Ainsi le nombre de molécules qui arrivent n'est pas simplement égal au nombre de celles qui sont là, mais au nombre de molécules par unité de volume, multiplié par la distance qu'elles balaient en se rapprochant de la surface qu'elles sont supposées traverser et cette distance est proportionnelle à u . Il nous faut donc l'intégrale de u que multiplie $f(u)du$, une intégrale infinie avec une limite inférieure u , et ceci doit être identique à ce que nous avons trouvé précédemment, à savoir $e^{-mu^2/2kT}$, avec une constante de proportionnalité que nous obtiendrons plus tard :

$$\int_u^{\infty} uf(u) du = \text{const} \cdot e^{-mu^2/2kT}. \quad (40.6)$$

Si nous différencions l'intégrale par rapport à u , nous obtenons ce qui se trouve sous le signe somme, c'est-à-dire l'intégrand (avec un signe moins, puisque u est la limite inférieure), et si nous différencions l'autre côté, nous obtenons u que multiplie la même exponentielle (plus certaines constantes). Les u se simplifient et nous trouvons

$$f(u) du = Ce^{-mu^2/2kT} du. \quad (40.7)$$

Nous conservons le du des deux côtés pour nous rappeler que c'est une *distribution*, et cela nous dit quelle est la proportion de trouver des molécules ayant une vitesse comprise entre u et $u + du$.

La constante C doit être déterminée de telle sorte que l'intégrale soit égale à l'unité, selon l'équation (40.5). Nous pouvons démontrer* maintenant que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Utilisant ce fait, il est facile de trouver que $C = \sqrt{m/2\pi kT}$.

Puisque la vitesse et la quantité de mouvement sont proportionnelles, nous pouvons dire que la distribution de quantité de mouvement est également proportionnelle à $e^{-E.C./kT}$ par unité de quantité de mouvement. Il se trouve que ce théorème est également vrai en relativité, s'il est exprimé en termes de quantité de mouvement, ce qui n'est pas le cas s'il est exprimé en termes de vitesse, il convient donc de l'apprendre en termes de quantité de mouvement plutôt qu'en termes de vitesse:

$$f(p) dp = C e^{-E.C./kT} dp. \quad (40.8)$$

Nous trouvons donc que la probabilité de différentes conditions d'énergie, cinétique et potentielle, sont toutes données par $e^{-\text{énergie}/kT}$, une chose très facile à se rappeler et une proposition assez jolie.

Pour le moment nous n'avons bien sûr que la distribution des vitesses « verticales ». Nous pouvons nous demander quelle est la probabilité qu'une molécule se déplace dans une autre direction? Bien sûr ces distributions sont reliées, et on peut obtenir la distribution complète à partir de celle que nous avons obtenue, parce que la distribution complète ne dépend que du carré de la grandeur de la vitesse, et non de la composante z . Cela doit être indépendant de la direction et on n'a besoin que d'une fonction, la probabilité d'obtenir différentes grandeurs de vitesse. Nous avons la distribution de la composante z et à partir d'elle nous pouvons obtenir la distribution des autres composantes. Le résultat est que la probabilité est encore proportionnelle à $e^{-E.C./kT}$, mais que maintenant l'énergie cinétique comprend trois parties, $mv_x^2/2$, $mv_y^2/2$ et $mv_z^2/2$, additionnées dans l'exposant. Ou nous pouvons l'écrire sous forme d'un produit:

$$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \\ \propto e^{-mv_x^2/2kT} \cdot e^{-mv_y^2/2kT} \cdot e^{-mv_z^2/2kT} dv_x dv_y dv_z. \quad (40.9)$$

Vous pouvez voir que cette formule est exacte parce que, d'abord, c'est une fonction seulement de v^2 , comme requis, et deuxièmement la probabilité de diverses valeurs de v_z obtenue en intégrant sur toutes les valeurs de v_x et v_y est exactement (40.7). Mais cette seule fonction (40.9) peut faire ces deux choses à la fois!

* Pour obtenir la valeur de l'intégrale, appelons:

Alors
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy dx,$$

qui est une intégrale double sur le plan xy tout entier. Mais ceci peut également être écrit en coordonnées polaires:

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot 2\pi r dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \pi.$$

40-5 Les chaleurs spécifiques des gaz

Nous allons maintenant envisager certaines manières de vérifier la théorie, et de voir quel est le succès de la théorie classique des gaz. Nous avons vu précédemment que si U est l'énergie interne de N molécules, on a quelquefois pour quelques gaz $pV = NkT = (\gamma - 1)U$. Si c'est un gaz monoatomique, nous savons que c'est aussi égal à $\frac{2}{3}$ de l'énergie cinétique du mouvement du centre de masse des atomes. Si c'est un gaz monoatomique, l'énergie cinétique est alors égale à l'énergie interne, et donc $\gamma - 1 = \frac{2}{3}$. Mais supposons par exemple que ce soit une molécule plus compliquée, qui peut tourner sur elle-même et vibrer, et supposons (il se trouve que c'est correct d'après la mécanique classique) que les énergies des mouvements internes soient également proportionnelles à kT . Alors à une température donnée, en plus de l'énergie cinétique kT , elle dispose d'une énergie interne de vibration ou de rotation. Ainsi l'énergie totale U comprend non seulement l'énergie cinétique interne, mais également l'énergie rotationnelle et nous obtenons une valeur différente de γ . La meilleure manière, techniquement parlant, de mesurer γ revient à mesurer la chaleur spécifique qui est le changement d'énergie avec la température. Nous retournerons à cette approche plus tard. Pour le moment, nous supposons que γ a été trouvé expérimentalement à partir de la courbe PV^γ pour une compression adiabatique.

Calculons γ dans certains cas. D'abord, pour un gaz monoatomique, U est l'énergie totale, la même que l'énergie cinétique et nous savons déjà que γ doit être égal à $\frac{5}{3}$. Pour un gaz diatomique, nous pouvons prendre comme exemple l'oxygène, l'hydrogène, l'iode, etc., et nous pouvons supposer que le gaz diatomique peut être représenté par deux atomes maintenus ensemble par un certain type de forme comme celle de la Figure 40-3. Nous pouvons également supposer et il se trouve que ceci est vrai, qu'aux températures qui présentent un intérêt pour le gaz diatomique, les paires d'atomes ont fortement tendance à être séparées d'une distance r_0 , la distance du potentiel minimum. Si ceci n'était pas vrai, si la probabilité n'était pas si rapidement variable, que la grande majorité se trouve au minimum, nous devrions considérer que l'oxygène est un mélange de O_2 et d'atomes d'oxygène dans un rapport qui n'est pas simple à établir. Nous savons qu'il y a, en fait, très peu d'atomes d'oxygène isolés, ce qui signifie que le minimum de l'énergie potentielle est beaucoup plus grand en valeur absolue que kT , comme nous l'avons vu. Puisqu'ils sont fortement concentrés autour de r_0 , la seule partie de la courbe qui soit nécessaire est la partie près du minimum qui peut être représentée approximativement par une parabole. Un potentiel parabolique implique un oscillateur harmonique et, en fait, à une excellente approximation, la molécule d'oxygène peut être représentée comme formée de deux atomes reliés par un ressort.

Quelle est alors l'énergie totale de cette molécule à la température T ? Nous savons que pour chacun des deux atomes, l'énergie cinétique doit être $\frac{1}{2}kT$, et donc l'énergie cinétique totale vaut $\frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT$. Nous pouvons également considérer ceci d'une manière différente: la même somme $\frac{1}{2}$ plus $\frac{1}{2}$ peut également être considérée comme l'énergie cinétique du centre de masse ($\frac{1}{2}$), l'énergie cinétique de rotation ($\frac{1}{2}$), et l'énergie cinétique de vibration ($\frac{1}{2}$). Nous savons que l'énergie cinétique de vibration est $\frac{1}{2}$, puisqu'il n'y a qu'une dimension en jeu et que chaque degré de liberté possède $\frac{1}{2}kT$. Considérant la rotation, elle peut tourner autour de l'un ou l'autre des deux axes, ce qui fait qu'il y a deux mouvements indépendants. Nous supposons que les atomes sont des sortes de points, et ne peuvent tourner sur eux-mêmes autour de la droite qui les joint; c'est quelque chose qu'il faut nous rappeler, car si nous tombons sur un désaccord, peut-être est-ce l'endroit

ou se trouve la difficulté. Mais nous avons quelque chose de plus qui est l'énergie *potentielle* de vibration; combien vaut-elle? Dans un oscillateur harmonique, l'énergie cinétique moyenne et l'énergie potentielle moyenne sont égales, et de ce fait l'énergie potentielle de vibration vaut également $\frac{1}{2}kT$. Le total complet de l'énergie est donc $U = \frac{3}{2}kT$, ou encore kT vaut $\frac{2}{3}U$ par atome. Cela signifie alors que γ vaut $\frac{5}{3}$ au lieu de $\frac{3}{2}$, c'est-à-dire $\gamma = 1,286$.

Nous pouvons comparer ces nombres avec les valeurs mesurées correspondantes indiquées au Tableau (40.1). En considérant d'abord l'hélium qui est un gaz monoatomique, nous trouvons presque $\frac{5}{3}$ et l'erreur est probablement expérimentale, bien que, à des températures aussi basses, il puisse y avoir certaines forces entre les atomes. Le krypton et l'argon, tous deux monoatomiques, sont également en accord avec la théorie à la précision de l'expérience.

Nous considérons ensuite les gaz diatomiques et trouvons que l'hydrogène avec 1,404, n'est pas en accord avec la théorie, 1,286. L'oxygène 1,399, est très voisin, mais à nouveau en désaccord. L'iodure d'hydrogène à son tour est voisin de 1,40. Il semble que la réponse correcte soit 1,40, mais ce n'est pas le cas, car si nous regardons un petit peu plus loin l'exemple du brome, nous voyons 1,32 et pour l'iode nous voyons 1,30. Puisque 1,30 est raisonnablement proche de 1,286, on peut considérer que l'iode est en accord assez correct, mais que l'oxygène est très éloigné de cet accord. Nous sommes donc en face d'un dilemme. Nous avons le bon résultat pour une molécule, et pour une autre molécule nous ne l'avons plus, nous devons donc être passablement habiles pour expliquer les deux résultats.

Tableau 40-1

Valeurs du rapport γ des chaleurs spécifiques
pour divers gaz.

Gas	T (°C)	γ
He	-180	1.660
Kr	19	1.68
Ar	15	1.668
H ₂	100	1.404
O ₂	100	1.399
HI	100	1.40
Br ₂	300	1.32
I ₂	185	1.30
NH ₃	15	1.310
C ₂ H ₆	15	1.22

Considérons une molécule encore plus compliquée avec un grand nombre de morceaux, par exemple, C₂H₆, qui est l'éthane. Elle possède huit atomes différents et ils sont tous en train de vibrer et de tourner dans des combinaisons diverses, de telle sorte que la quantité totale d'énergie interne doit être égale à un grand nombre de fois kT , au moins 12 kT pour l'énergie cinétique seulement et $\gamma - 1$ doit être très proche de zéro, ou γ presque exactement égal à 1. En fait il *est* plus faible, mais 1,22 n'est pas tellement plus faible et c'est plus grand que $1\frac{1}{2}$ calculé à partir de l'énergie cinétique seule, c'est tout simplement incompréhensible!

De plus, le mystère est profond, parce que la molécule diatomique ne peut être rendue rigide à la limite. Même si nous rendions les couplages de plus en plus durs, bien qu'elle

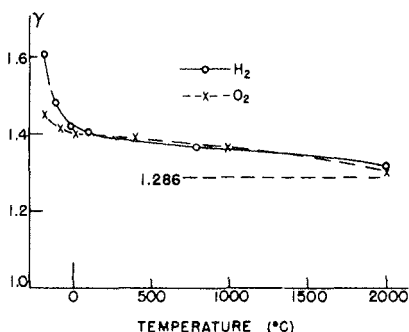


Fig. 40-6. Valeurs expérimentales de γ en fonction de la température pour l'hydrogène et l'oxygène. La théorie classique prédit $\gamma = 1,286$, indépendant de la température.

ne puisse guère vibrer, elle continuera néanmoins de vibrer. L'énergie vibrationnelle interne est encore kT , puisqu'elle ne dépend pas de la valeur du couplage. Mais si nous pouvions imaginer une rigidité absolue, arrêtant toute la vibration pour éliminer une variable, nous obtiendrions alors $U = \frac{5}{2}kT$ et $\gamma = 1,40$, dans le cas diatomique. Ceci nous paraît correct pour H_2 ou O_2 . D'un autre côté, nous aurions encore des problèmes, parce que pour l'hydrogène comme pour l'oxygène γ varie avec la température! A partir des valeurs mesurées, indiquées sur la Figure 40-6, nous voyons que pour H_2 , γ varie de environ 1,6 à $-185^\circ C$ à 1,3 à $2.000^\circ C$. La variation est plus importante dans le cas de l'hydrogène que dans celui de l'oxygène, mais néanmoins même pour l'oxygène γ tend sûrement à monter lorsque nous descendons en température.

40-6 L'échec de la physique classique

Ainsi, pour tout dire, nous devons reconnaître qu'il y a quelques difficultés. Nous pouvons essayer certaines lois de forces autres que celles d'un ressort, mais il apparaît que tout cela ne pourra qu'augmenter γ . Si nous augmentons le nombre de formes d'énergie, γ se rapproche de l'unité, contredisant les faits. Toutes les idées théoriques classiques auxquelles on peut penser ne peuvent que faire empirer la situation. Le fait est qu'il y a des électrons dans chaque atome, et nous savons à partir de leurs spectres qu'ils ont des mouvements internes; chaque électron doit avoir au moins $\frac{1}{2}kT$ d'énergie cinétique, et quelque chose pour l'énergie potentielle, et lorsque nous ajoutons cela, γ devient encore plus petit. C'est ridicule. C'est faux.

La première grande publication sur la théorie des gaz fut écrite par Maxwell en 1859. Sur la base des idées que nous venons de discuter, il était capable d'expliquer avec précision un grand nombre de relations connues comme la loi de Boyle (Mariotte), la théorie de la diffusion, la viscosité des gaz, et les choses dont nous parlerons au chapitre suivant. Il rassembla tous ces grands succès dans un résumé final, et à la fin il dit, «Finalement, en établissant une relation nécessaire entre les mouvements de translation et de rotation (il est en train de parler du théorème $\frac{1}{2}kT$) de toutes les particules non sphériques, nous avons montré qu'un système de telles particules ne peut pas satisfaire les relations connues entre les deux chaleurs spécifiques». Il fait référence à γ (que nous verrons plus tard être relié aux deux manières de mesurer les chaleurs spécifiques), et il dit que nous savons que nous ne pouvons pas obtenir la bonne réponse.

Dix ans plus tard, dans une conférence, il disait, « Je viens maintenant de vous présenter ce que je considère comme étant la difficulté la plus grande, rencontrée jusqu'à présent par la théorie moléculaire. » Ces mots représentent la première découverte que les lois de la physique classique étaient fausses. Ce fut la première indication qu'il y avait quelque chose de fondamentalement impossible, car un théorème rigoureusement démontré n'était pas en accord avec l'expérience. Aux environs de 1890, Jeans parla à nouveau de ce problème. On entend souvent dire que les physiciens dans la dernière partie du dix-neuvième siècle estimaient connaître toutes les lois de physique, et que la seule chose importante qui leur restait à faire était de calculer quelques décimales de plus. Quelqu'un a pu dire cela une fois, et d'autres l'ont copié. Mais une lecture attentive de la littérature de cette époque montre que quelque chose les préoccupait tous. Jeans disait de ce problème que c'est un phénomène très mystérieux, et qu'il semble que lorsque la température diminue, certains types de mouvement soient « gelés ».

Si nous pouvons supposer que le mouvement vibrationnel, par exemple, n'existe pas à basse température et existe à haute température, alors nous pouvons imaginer qu'un gaz puisse exister à une température suffisamment basse pour que le mouvement vibrationnel ne se produise plus, de telle sorte que $\gamma = 1,40$ ou à une température plus élevée à laquelle le mouvement commence d'apparaître, de telle sorte que γ diminue. La même chose peut être avancée pour la rotation. Si nous pouvons éliminer la rotation, si par exemple elle est « gelée » à une température suffisamment basse, nous pouvons comprendre le fait que le γ de l'hydrogène tende vers 1,66 lorsque nous diminuons la température. Comment pouvons-nous comprendre un tel phénomène? Il va de soi que nous ne pouvons pas comprendre par la mécanique classique que ces mouvements soient « gelés ». Cela ne fut compris que lorsque la mécanique quantique fut découverte.

Sans démonstration, nous pouvons énoncer le résultat de la mécanique statistique en théorie de mécanique quantique. Nous rappelons que selon la mécanique quantique, un système qui est lié par un potentiel, pour les vibrations par exemple, disposera d'un ensemble de niveaux d'énergie discrets, c'est-à-dire d'états de différentes énergies. La question maintenant est : comment la mécanique statistique doit-elle être modifiée selon la théorie de la mécanique quantique? Il se trouve que bien que la plupart des problèmes soient plus difficiles en mécanique quantique qu'en mécanique classique, les problèmes de mécanique statistique sont beaucoup plus faciles en théorie quantique! Le résultat simple en mécanique classique disant que $n = n_0 e^{-\text{énergie}/kT}$, devient le théorème suivant très important : Si les énergies de l'ensemble des états moléculaires sont appelées par exemple $E_0, E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$, la probabilité de trouver à l'équilibre thermique une molécule dans un état particulier ayant l'énergie E_i est proportionnelle à $e^{-E_i/kT}$. Ceci donne la probabilité de se trouver dans les différents états. En d'autres termes, la chance relative, la probabilité de se trouver dans l'état E_1 relativement à la chance de se trouver dans l'état E_0 , est

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{e^{-E_1/kT}}{e^{-E_0/kT}}, \quad (40.10)$$

ce qui bien sûr est la même chose que

$$n_1 = n_0 e^{-(E_1 - E_0)/kT}, \quad (40.11)$$

puisque $P_1 = n_1/N$ et $P_0 = n_0/N$. Ainsi il a moins de chance de se trouver dans un état d'énergie plus élevée que dans un état d'énergie plus faible. Le rapport du nombre d'atomes dans l'état supérieur et du

nombre d'atomes dans l'état inférieur est e élevé à la puissance (moins la différence en énergie sur kT) – une proposition extrêmement simple.

Il apparaît maintenant que pour un oscillateur harmonique les niveaux d'énergies sont également espacés. Si l'on appelle le niveau d'énergie le plus bas $E_0 = 0$ (en réalité il n'est pas nul, il est un petit peu différent, mais cela n'est pas important si nous déplaçons toutes les énergies d'une constante), le premier est alors $E_1 = \hbar\omega$, le second est $2\hbar\omega$, le troisième est $3\hbar\omega$, etc.

Voyons maintenant ce qui se passe. Nous supposons que nous étudions les vibrations d'une molécule diatomique, que nous décrivons d'une manière approchée par un oscillateur harmonique. Demandons-nous quelle est la chance relative de trouver une molécule dans l'état E_1 plutôt que dans l'état E_0 . La réponse est que la chance de la trouver dans l'état E_1 , par rapport à celle de la trouver dans l'état E_0 , diminue comme $e^{-\hbar\omega/kT}$. Supposons maintenant que kT soit beaucoup plus petit que $\hbar\omega$, et que nous soyons à basse température. La probabilité de se trouver dans l'état E_1 est extrêmement petite. Pratiquement tous les atomes sont dans un état E_0 . Si nous changeons la température, mais que celle-ci reste toujours très petite, la chance de se trouver dans l'état $E_1 = \hbar\omega$ reste infinitésimale, l'énergie de l'oscillateur reste pratiquement nulle; elle ne change pas avec la température, aussi longtemps que la température est très inférieure à $\hbar\omega$. Tous les oscillateurs sont dans l'état fondamental et leur mouvement est effectivement « gelé »; *il n'y a pas de contribution de leur part à la chaleur spécifique*. Nous pouvons voir alors à partir du Tableau 40-1, que à 100°C, qui vaut 373 degrés absolus, kT est beaucoup plus petit que l'énergie vibrationnelle dans les molécules d'oxygène ou d'hydrogène, mais que ce n'est pas le cas pour la molécule d'iode. La raison de cette différence est qu'un atome d'iode est très lourd, en comparaison avec un atome d'hydrogène et bien que les forces soient comparables dans l'iode et l'hydrogène, la molécule d'iode est si lourde que la fréquence naturelle de vibration est très faible par rapport à la fréquence naturelle de l'hydrogène. $\hbar\omega$ étant plus grand que kT à température ordinaire pour l'hydrogène, et plus petit pour l'iode, seul ce dernier, l'iode, manifestera une énergie vibrationnelle classique. Lorsque nous augmentons la température d'un gaz, partant d'une très faible valeur de T , avec les molécules presque toutes dans leur état fondamental, elles se mettent petit à petit à avoir une probabilité appréciable de se trouver dans le deuxième état, puis dans le suivant, etc. Lorsque la probabilité est appréciable pour plusieurs états, le comportement du gaz se rapproche de celui donné par la physique classique, parce que les états quantiques ne peuvent plus pratiquement se distinguer d'un continuum d'énergie, et le système peut avoir presque n'importe quelle énergie. Ainsi, lorsque la température monte, nous devons retrouver le résultat de la physique classique, comme cela semble être le cas sur la Figure 40-6. Il est possible de montrer de la même manière que les états rotationnels des atomes sont également quantifiés, mais les états sont si proches les uns des autres que dans les circonstances ordinaires, kT est plus grand que leur écartement. De nombreux niveaux sont excités, et l'énergie cinétique rotationnelle du système intervient de manière classique. L'exemple pour lequel ce n'est pas tout à fait vrai à la température ordinaire est l'hydrogène.

C'est la première fois que nous avons réellement établi, en comparant avec l'expérience, qu'il y avait quelque chose de faux dans la physique classique et que nous avons essayé de chercher une solution de cette difficulté dans la mécanique quantique, d'une manière très proche de celle suivie historiquement. Il a fallu 30 ou 40 ans avant que la difficulté suivante ne soit découverte, et ce fut encore une question de mécanique statistique, mais cette fois il s'agissait de la mécanique d'un gaz de photon. Ce problème fut résolu par Planck, dans les premières années de ce siècle.

Le mouvement Brownien

41-1 Équipartition de l'énergie

41-2 Équilibre thermique du rayonnement

41-3 Équipartition et l'oscillateur quantique

41-4 La marche aléatoire

41-1 Équipartition de l'énergie

Le mouvement Brownien fut découvert en 1827 par Robert Brown, un botaniste. Tandis qu'il était en train d'étudier la vie microscopique, il remarqua de petites particules de pollen de plantes s'agitant dans le liquide qu'il regardait à l'aide d'un microscope, et il fut suffisamment avisé pour réaliser que ces particules n'étaient pas vivantes, mais que c'était simplement de petites particules d'impuretés se déplaçant dans l'eau dans tous les sens. En fait, il contribua à la démonstration que ceci n'avait rien à voir avec la vie en extrayant du sol un vieux morceau de quartz dans lequel était enfermée un peu d'eau. Elle devait y avoir été enfermée pendant des millions et des millions d'années, mais à l'intérieur il pouvait encore observer le même mouvement. Ce que l'on voit, ce sont des particules extrêmement petites qui bougent tout le temps.

Plus tard, on démontra que ceci était un effet du *mouvement moléculaire*, et nous pouvons comprendre qualitativement ce qui se passe en imaginant une grande balle sur un terrain de jeu, vu de loin, avec beaucoup de monde sous la balle, la poussant dans diverses directions. Nous ne pouvons pas voir les personnes parce que nous imaginons que nous sommes trop éloignés, mais nous pouvons voir la balle et remarquons qu'elle se déplace de-ci, de-là assez irrégulièrement. Nous savons également, à partir des théorèmes traités au chapitre précédent, que l'énergie cinétique moyenne de la petite particule suspendue dans un liquide ou dans un gaz est $\frac{3}{2}kT$, même si elle est très lourde en comparaison d'une molécule. Si elle est très lourde, cela signifie que les vitesses sont relativement lentes, mais il apparaît qu'en réalité les vitesses ne sont pas réellement aussi faibles. En fait, nous ne pouvons pas très facilement voir la vitesse d'une telle particule, parce que bien que l'énergie cinétique moyenne soit $\frac{3}{2}kT$, ce qui représente une vitesse de un millimètre ou à peu près par seconde pour un objet de un micron ou deux de diamètre, ceci est très difficile à voir même au microscope, parce que la particule change continuellement de direction et ne va nulle part. La distance qu'elle parcourt sera examinée à la fin de ce chapitre. Einstein fut le premier à résoudre ce problème au début de notre siècle.

Incidemment, lorsque nous disons que l'énergie cinétique moyenne de cette particule est $\frac{3}{2}kT$, nous affirmons que nous avons déduit ce résultat de la théorie cinétique, c'est-à-dire des

lois de Newton. Nous verrons que nous pouvons déduire toutes sortes de choses – de choses merveilleuses – de la théorie cinétique, et il est tout à fait intéressant que nous puissions apparemment tirer autant de si peu. Bien sûr, nous ne voulons pas dire que les lois de Newton sont « peu de chose » – elles sont suffisantes pour produire cela – ce que nous voulons dire c'est que *nous* n'avons pas fait grand chose. Comment en obtenons-nous autant? La réponse est que nous avons fait en permanence une certaine hypothèse importante, qui est que si un système donné est en équilibre thermique à une certaine température, il sera également en équilibre thermique avec *n'importe quoi d'autre* à la même température. Par exemple, si nous désirons voir comment une particule se déplace, si elle est réellement en collision avec l'eau, nous pourrions imaginer qu'un gaz est présent, composé d'un autre type de particule, des petites boules fines, qui (nous supposons) n'interagissent pas avec l'eau, mais frappent simplement la particule avec des collisions « dures ». Supposons que la particule ait une sorte d'excroissance qui la prolonge; tout ce que nos petites balles ont à faire est de frapper cette excroissance. Nous savons tout sur ce gaz imaginaire de boules à la température T – c'est un gaz parfait. L'eau est compliquée, mais un gaz parfait est simple. *Notre particule doit être en équilibre avec le gaz de boules.* De ce fait, le mouvement moyen de la particule doit être ce que nous obtenons pour des collisions gazeuses, parce que si elle ne se déplaçait pas à la bonne vitesse relativement à l'eau, mais si, par exemple, elle se déplaçait plus rapidement, cela signifierait que les boules lui prendraient de l'énergie et qu'elles deviendraient plus chaudes que l'eau. Mais nous les avons démarrées à la même température, et nous supposons qu'une fois que quelque chose est à l'équilibre, elle reste à l'équilibre – certaines parties ne deviennent pas plus chaudes et d'autres plus froides spontanément.

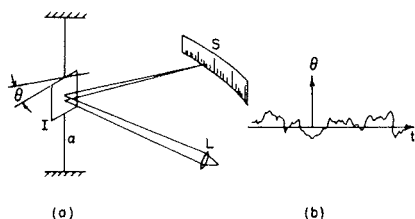


Fig. 41-1. (a) Un galvanomètre sensible à faisceau lumineux. La lumière issue d'une source L est renvoyée par un petit miroir sur une échelle graduée. (b) Un enregistrement schématisé de la lecture sur l'échelle en fonction du temps.

Cette proposition est vraie et peut être prouvée à partir des lois de la mécanique, mais la preuve est très compliquée et ne peut être établie qu'en utilisant la mécanique avancée. Il est beaucoup plus facile de le prouver en mécanique quantique qu'en mécanique classique. Cela fut d'abord démontré par Boltzmann, mais pour le moment nous le prenons simplement pour vrai, et nous pouvons alors dire que notre particule doit avoir $\frac{1}{2}kT$ d'énergie si elle est frappée par des boules artificielles, ce qui fait qu'elle doit avoir également $\frac{1}{2}kT$ lorsqu'elle est frappée par l'eau à la même température et que nous retirons les boules; ainsi c'est donc $\frac{1}{2}kT$. C'est une étrange chaîne de démonstrations, mais tout à fait valable.

En plus du mouvement des particules colloïdales pour lesquelles le mouvement Brownien fut découvert, il existe un grand nombre d'autres phénomènes, à la fois dans le laboratoire et dans d'autres cas, où l'on peut observer le mouvement Brownien. Si nous essayons de construire l'équipement le plus délicat possible, par exemple un très petit miroir suspendu à une fine fibre de quartz pour un galvanomètre ballistique extrêmement sensible (Fig. 41-1), le miroir ne reste pas au repos, mais s'agite tout le temps – *tout le temps* – de telle sorte que lorsque nous

envoyons de la lumière sur lui et que nous cherchons la position de la tâche réfléchie, nous n'obtenons pas un instrument parfait parce que le miroir est toujours en train de s'agiter. Pourquoi? Parce que l'énergie cinétique moyenne de rotation de ce miroir doit être, en moyenne, $\frac{1}{2}kT$.

Quelle est la moyenne quadratique de l'angle d'oscillation du miroir? Supposons que nous trouvions la période de vibration naturelle du miroir en tapant sur un des côtés et en voyant combien de temps il lui faut pour osciller, et que nous connaissions le moment d'inertie, I . Nous connaissons la formule de l'énergie cinétique de rotation donnée par l'équation (19.8): $T = \frac{1}{2}I\omega^2$. C'est l'énergie cinétique, et l'énergie potentielle qui l'accompagne sera proportionnelle au carré de l'angle – elle vaut $V = \frac{1}{2}a\theta^2$. Mais si nous connaissons la période t_0 , et calculons à partir d'elle la fréquence naturelle $\omega_0 = 2\pi/t_0$, alors l'énergie potentielle vaut $V = \frac{1}{2}I\omega_0^2\theta^2$. Nous savons que l'énergie cinétique moyenne est $\frac{1}{2}kT$, mais puisque c'est un oscillateur harmonique l'énergie potentielle moyenne vaut également $\frac{1}{2}kT$. Ainsi

$$\text{ou} \quad \frac{1}{2}I\omega_0^2\langle\theta^2\rangle = \frac{1}{2}kT,$$

$$\langle\theta^2\rangle = kT/I\omega_0^2. \quad (41.1)$$

De cette manière, nous pouvons calculer les oscillations du miroir d'un galvanomètre, et ainsi quelles sont les limites de notre instrument. Si nous voulons obtenir des oscillations plus faibles, il nous faudra refroidir le miroir. Une question intéressante est de savoir où le refroidir. Ceci dépend de l'endroit où il reçoit des « chocs ». Si c'est par la fibre, nous le refroidissons en haut – si le miroir est entouré par un gaz et est essentiellement affecté par des collisions du gaz, il est préférable de refroidir le gaz. En fait, si nous savons d'où provient l'amortissement des oscillations, il apparaît que c'est toujours également la source de fluctuations, un point sur lequel nous reviendrons.

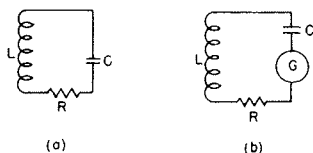


Fig. 41–2. Un circuit résonnant de grand Q . (a) Circuit réel, à la température T . (b) Circuit artificiel, avec une résistance parfaite (sans bruit) et un « générateur de bruit » G .

La même chose s'applique, d'une manière assez surprenante, aux *circuits électriques*. Supposez que nous soyons en train de construire un amplificateur extrêmement sensible et précis, pour une fréquence définie et que nous ayons un circuit résonnant (Fig. 41-2) à l'entrée, afin de le rendre extrêmement sensible à cette fréquence particulière, comme pour un récepteur de radio, mais un récepteur vraiment bon. Supposez que nous voulions atteindre les limites de notre appareil, et que nous prenions la tension par exemple aux bornes de l'inductance et l'envoyions dans le reste de l'amplificateur. Bien sûr, dans tout circuit tel que celui-ci, il y a une certaine quantité de pertes. Ce n'est pas un circuit parfaitement résonnant, mais c'en est un excellent et il y a une petite résistance, (nous avons mis une résistance de telle manière que l'on puisse la voir, mais elle est supposée être petite). Nous voudrions maintenant savoir: De combien fluctue la tension aux bornes de l'inductance? Réponse. Nous savons que $\frac{1}{2}LI^2$ est l'« énergie cinétique » – l'énergie associée à un bobinage dans un circuit résonnant (Chapitre 25, Vol. I). De ce fait, la valeur moyenne de $\frac{1}{2}LI^2$ est égale à $\frac{1}{2}kT$ – cela nous dit ce qu'est la moyenne quadratique du courant et nous pouvons trouver ce que vaut la moyenne quadratique de la tension à partir de la moyenne quadratique du courant.

Car si nous voulons la tension aux bornes de l'inductance, la formule est $\hat{V}_L = i\omega L \hat{I}$, et la moyenne absolue du carré de la tension sur l'inductance est $\langle V_L^2 \rangle = L^2 \omega_0^2 \langle I^2 \rangle$, et en introduisant $\frac{1}{2} L \langle I^2 \rangle = \frac{1}{2} kT$, nous obtenons

$$\langle V_L^2 \rangle = L \omega_0^2 kT. \quad (41.2)$$

Ainsi nous pouvons maintenant concevoir des circuits et dire à quel moment nous allons obtenir ce qui est appelé le *bruit Johnson*, le bruit associé aux fluctuations thermiques!

D'où proviennent les fluctuations cette fois-ci? Elles proviennent à nouveau de la *résistance* – elles proviennent du fait que les électrons dans la résistance s'agitent en tous sens parce qu'ils sont en équilibre avec le matériau dans la résistance et qu'ils produisent des fluctuations dans la densité des électrons. Il produisent donc de très petits champs électriques qui excitent le circuit résonnant.

Les ingénieurs électriciens présentent la réponse d'une autre manière. Physiquement, la résistance est effectivement la source du bruit. Cependant nous pouvons remplacer le circuit réel ayant une résistance bien réelle, et vraiment physique qui produit du bruit, par un circuit artificiel qui contient un petit générateur qui *représente* le bruit et une résistance qui devient alors parfaite – ne produisant aucun bruit. Tout le bruit est dans le générateur artificiel. Et si nous connaissons les caractéristiques du bruit créé par la résistance, si nous avons une formule pour cela, nous pouvons alors calculer quelle sera la réponse du circuit à ce bruit. Il nous faut donc une formule pour les fluctuations formant le bruit. Le bruit qui est créé par la résistance possède toutes les fréquences, puisque la résistance par elle-même n'est pas résonnante. Bien entendu, le circuit résonnant « n'écoute » que la partie qui est proche de la fréquence correcte, mais la résistance engendre diverses fréquences différentes. Nous pouvons décrire la puissance du générateur de la manière suivante: La puissance moyenne que la résistance devrait absorber si elle était reliée directement aux bornes du générateur du bruit serait $\langle E^2 \rangle / R$, où E est la tension du générateur. Mais nous aimerions savoir plus en détail quelle est la puissance à chaque fréquence. Il y a très peu de puissance à chaque fréquence; c'est une distribution. Soit $P(\omega) d\omega$ la puissance que le générateur peut délivrer dans le domaine de fréquence $d\omega$ dans cette même résistance. Alors nous pouvons démontrer (nous le démontrerons dans un autre cas, mais les mathématiques sont exactement les mêmes) que la puissance est

$$P(\omega) d\omega = (2/\pi) kT d\omega, \quad (41.3)$$

et qu'elle est *indépendante de la résistance* lorsque nous l'exprimons de cette manière.

41-2 Équilibre thermique du rayonnement

Nous allons maintenant considérer une proposition encore plus avancée et plus intéressante qui est ce qui suit. Supposons que nous ayons un oscillateur chargé, tel que ceux dont nous parlions lorsque nous discutons de la lumière, par exemple un électron oscillant dans un atome. S'il oscille, il émet de la lumière. Maintenant, supposons que cet oscillateur se trouve dans un gaz très dilué et que de temps en temps les atomes cognent celui-ci. Alors à l'équilibre, après un long moment, cet oscillateur va acquérir de l'énergie de telle sorte que son énergie cinétique d'oscillation soit $\frac{1}{2} kT$, et puisque c'est un oscillateur

harmonique, son énergie entière de mouvement deviendra kT . C'est, bien entendu, une fausse description jusqu'à présent, puisque l'oscillateur porte une *charge électrique*, et s'il a l'énergie kT il oscille et *émet donc de la lumière*. De ce fait, il est impossible d'obtenir l'équilibre de la matière réelle isolée sans que les charges qui s'y trouvent n'émettent de la lumière, et lorsque la lumière est émise, de l'énergie s'en va, l'oscillateur perd son kT au fur et à mesure, et ainsi le gaz entier en collision avec l'oscillateur se refroidit progressivement. Et c'est bien sûr la manière dont un fourneau chaud se refroidit par une nuit froide en émettant de la lumière vers le ciel, parce que les atomes agitent leurs charges et qu'ils émettent continuellement, et peu à peu, à cause de ce rayonnement, le mouvement d'oscillation se ralentit.

D'autre part, si nous enfermons l'ensemble dans une boîte de telle sorte que la lumière ne puisse s'en aller à l'infini, nous *pouvons* alors éventuellement obtenir l'équilibre thermique. Nous pouvons, soit mettre le gaz dans une boîte, dans les parois de laquelle nous pouvons dire qu'il y a d'autres émetteurs renvoyant la lumière ou, pour prendre un exemple encore meilleur, nous pouvons supposer que la boîte possède des parois réfléchissantes. Il est plus facile de considérer ce cas. Ainsi nous supposons que le rayonnement qui sort de l'oscillateur continue de se déplacer en restant à l'intérieur de la boîte. Alors, bien sûr, il est vrai que l'oscillateur se met à émettre, mais assez rapidement il peut maintenir son kT d'énergie cinétique malgré le fait qu'il émet, parce qu'il est éclairé en quelque sorte par sa propre lumière réfléchie sur les parois de la boîte. Après un certain temps, il y a donc une grande quantité de lumière se propageant à l'intérieur de la boîte, et bien que l'oscillateur en émette un peu, la lumière revient et lui rend un peu de l'énergie émise.

Nous allons maintenant déterminer combien de lumière il doit y avoir dans une boîte à la température T , afin que l'éclairement de la lumière sur cet oscillateur puisse créer juste assez d'énergie pour rendre compte de la lumière qu'il émet.

Supposons les atomes de gaz très peu nombreux et très éloignés les uns des autres, de telle sorte que nous ayons un oscillateur parfait sans résistance, à l'exception de la résistance de rayonnement. Nous considérons qu'à l'équilibre thermique l'oscillateur fait deux choses en même temps. Premièrement, il a une énergie moyenne kT , et nous calculons quelle quantité de rayonnement il émet. Deuxièmement, ce rayonnement doit être exactement égal à la quantité qui résulterait du fait que la lumière envoyée sur l'oscillateur est diffusée. Puisqu'il n'y a aucun endroit où l'énergie puisse aller, ce rayonnement effectif est simplement de la lumière diffusée à partir de la lumière enfermée là.

Ainsi, nous commençons par calculer l'énergie qui est rayonnée par seconde par l'oscillateur, lorsque celui-ci a une certaine énergie. (Nous empruntons au Chapitre 32 sur la résistance de rayonnement un certain nombre d'équations sans revenir sur leur démonstration.) L'énergie émise par radian divisée par l'énergie de l'oscillateur est appelée $1/Q$ et (Éq. 32.8): $1/Q = (dW/dt)/\omega_0 W$. En utilisant la quantité γ , la constante d'amortissement, ceci peut également être écrit comme $1/Q = \gamma/\omega_0$, où ω_0 est la fréquence naturelle de l'oscillateur – lorsque γ est très petit, Q est très grand. L'énergie rayonnée par seconde est alors

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\omega_0 W}{Q} = \frac{\omega_0 W \gamma}{\omega_0} = \gamma W. \quad (41.4)$$

L'énergie émise par seconde est donc simplement gamma que multiplie l'énergie de l'oscillateur. Or l'oscillateur doit avoir une énergie moyenne kT , ainsi nous voyons que

γkT est la quantité moyenne d'énergie émise par seconde :

$$\langle dW/dt \rangle = \gamma kT. \quad (41.5)$$

Il nous faut maintenant simplement savoir ce que vaut γ . γ est facilement calculé à partir de l'équation (32.12). C'est

$$\gamma = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2}{3} \frac{r_0 \omega_0^2}{c}, \quad (41.6)$$

où $r_0 = e^2/mc^2$ est le rayon classique de l'électron, et nous avons posé $\lambda = 2\pi c/\omega_0$.

Notre résultat définitif pour la vitesse moyenne d'émission de la lumière près de la fréquence ω_0 est donc

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{r_0 \omega_0^2 kT}{c}. \quad (41.7)$$

Ensuite nous cherchons combien de lumière doit être envoyée sur l'oscillateur. Elle doit être en quantité suffisante pour que l'énergie lumineuse absorbée (puis diffusée) soit exactement égale à la quantité précédente. En d'autres termes, on rend compte de la lumière émise comme étant de la lumière *diffusée* à partir de la lumière qui est envoyée sur l'oscillateur dans la cavité. Ainsi, nous devons maintenant calculer la quantité de lumière diffusée par l'oscillateur lorsqu'il y a une certaine quantité – inconnue – de rayonnement incident sur lui. Soit $I(\omega)d\omega$ la quantité d'énergie lumineuse à la fréquence ω , dans un certain intervalle $d\omega$, (parce qu'il n'y a pas de lumière *exactement* à une certaine fréquence; elle est répartie sur tout le spectre). Ainsi $I(\omega)$ est une certaine *distribution spectrale* que nous allons maintenant essayer de trouver – c'est la couleur d'un fourneau à la température T que nous voyons lorsque nous ouvrons la porte et que nous regardons dans le trou. Combien de lumière est absorbée? Nous avons calculé la quantité de rayonnement absorbé provenant d'un faisceau de lumière incident donné et nous avons exprimé ceci en terme d'une *section efficace*. C'est exactement comme si nous avions dit que toute la lumière qui tombe sur une certaine surface est absorbée. Ainsi la quantité totale qui est re-rayonnée (diffusée) est égale à l'intensité incidente $I(\omega)d\omega$ multipliée par la section efficace σ .

La formule que nous avons établie pour la section efficace (Éq. 31.19) ne comportait pas de facteur d'amortissement. Il n'est pas très difficile de reprendre cette démonstration et d'y introduire le terme de résistance que nous avions négligé. Si nous le faisons, et calculons la section efficace de la même manière, nous obtenons

$$\sigma_s = \frac{8\pi r_0^2}{3} \left(\frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right). \quad (41.8)$$

En tant que fonction de la fréquence, σ_s n'a de valeur significative que lorsque ω est très proche de la fréquence naturelle ω_0 . (Souvenez-vous que le Q pour un oscillateur rayonnant est environ 10^8 .) L'oscillateur diffuse très fortement lorsque ω est égal à ω_0 , et très faiblement pour d'autres valeurs de ω . Nous pouvons donc remplacer ω par ω_0 et $\omega^2 - \omega_0^2$ par $2\omega_0(\omega - \omega_0)$, et nous obtenons

$$\sigma_s = \frac{2\pi r_0^2 \omega_0^2}{3[(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]}. \quad (41.9)$$

Toute la courbe est située près de $\omega = \omega_0$. (Il n'est pas réellement nécessaire de faire

des approximations, mais il est beaucoup plus facile de calculer les intégrales si nous simplifions un peu l'équation.) Nous multiplions maintenant l'intensité dans un domaine de fréquence donné par la section efficace de diffusion, pour obtenir la quantité d'énergie diffusée dans le domaine $d\omega$. L'énergie totale diffusée est alors l'intégrale de ceci pour toutes les valeurs de ω . Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{dW_s}{dt} &= \int_0^\infty I(\omega) \sigma_s(\omega) d\omega \\ &= \int_0^\infty \frac{2\pi r_0^2 \omega_0^2 I(\omega) d\omega}{3[(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]}. \end{aligned} \quad (41.10)$$

Nous écrivons $dW_s/dt = 3\gamma kT$. Pourquoi *trois*? Parce que lorsque nous avons fait notre calcul de la section efficace au Chapitre 32, nous avons supposé que la polarisation était telle que la lumière pouvait piloter l'oscillateur. Si nous avions utilisé un oscillateur qui ne pouvait se déplacer que dans une direction, et si la lumière, par exemple, était polarisée dans la mauvaise direction, cela n'aurait donné aucune diffusion. Ainsi nous devons soit prendre la moyenne de la section efficace de l'oscillateur qui ne peut vibrer que dans une direction, sur toutes les directions d'incidence et de polarisation de la lumière, ou, plus facilement, nous pouvons imaginer l'oscillateur qui suivra le champ quelle que soit la direction dans laquelle pointe le champ. Un tel oscillateur qui peut osciller également dans les trois directions aura $3kT$ d'énergie moyenne, parce qu'il y a trois degrés de liberté dans cet oscillateur. Ainsi, nous devons utiliser $3\gamma kT$ parce qu'il y a trois degrés de liberté.

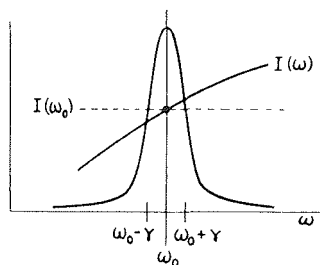


Fig. 41-3. Les facteurs sous le signe somme dans (41.10). Le pic représente la courbe de résonance $1/[(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]$. Le facteur $I(\omega)$ peut être remplacé en bonne approximation par $I(\omega_0)$.

Il nous faut maintenant calculer l'intégrale. Supposons que la distribution spectrale inconnue de la lumière $I(\omega)$ soit une courbe lentement variable et qu'elle ne varie pas beaucoup sur l'intervalle très étroit de fréquence où σ_s possède son maximum (Fig. 41-3). Alors la seule contribution significative apparaît lorsque ω est très proche de ω_0 , l'écart très petit étant de l'ordre de gamma. Ainsi, bien que $I(\omega)$ puisse être une fonction compliquée et inconnue, le seul endroit où elle est importante se trouve près de $\omega = \omega_0$, et là nous pouvons remplacer la courbe douce par une courbe plate — une « constante » — à la même hauteur. En d'autres termes, nous sortons simplement $I(\omega)$ du signe intégral et nous l'appelons $I(\omega_0)$. Nous pouvons également sortir le reste des constantes à l'extérieur de l'intégrale, et ce que nous avons laissé donne

$$\frac{2}{3} \pi r_0^2 \omega_0^2 I(\omega_0) \int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} = 3\gamma kT. \quad (41.11)$$

L'intégrale doit aller de 0 à l' ∞ , mais 0 est si loin de ω_0 que la courbe est tout à fait négligeable à cet endroit, aussi nous choisissons $-\infty$ au lieu de 0 – cela ne fait pas de différence et il est alors beaucoup plus facile de calculer l'intégrale. L'intégrale est une fonction arctangente de la forme $\int dx/(x^2 + a^2)$. Si nous regardons dans une table, nous voyons que ceci est égal à π/a . Ainsi, ce qui sort dans notre cas vaut $2\pi/\gamma$. De ce fait, nous obtenons après quelques manipulations

$$I(\omega_0) = \frac{9\gamma^2 kT}{4\pi^2 r_0^2 \omega_0^2}. \quad (41.12)$$

Puis nous substituons la formule (41.6) pour gamma (ne vous préoccupez pas d'écrire ω_0 ; puisque c'est vrai pour n'importe quel ω_0 , nous pouvons simplement l'appeler ω) et la formule pour $I(\omega)$ devient alors

$$I(\omega) = \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^2}. \quad (41.13)$$

Et ceci nous donne la distribution de lumière dans un fourneau chaud. C'est appelé *rayonnement du corps noir*. Noir, parce que le trou dans le fourneau au travers duquel nous regardons est noir lorsque la température est nulle.

A l'intérieur d'une boîte fermée à la température T , (41.13) est la distribution d'énergie du rayonnement selon la théorie classique. Remarquons d'abord une caractéristique intéressante de cette expression. La charge de l'oscillateur, la masse de l'oscillateur, toutes les propriétés spécifiques de l'oscillateur, se *simplifient*, parce qu'une fois que l'on a atteint l'équilibre avec un oscillateur, on doit être à l'équilibre avec n'importe quel oscillateur de masse différente, ou bien quelque chose n'irait pas. Aussi ceci est un type important de vérification de la proposition que l'équilibre ne dépend pas de ce qui se trouve en équilibre, mais *seulement de la température*. Traçons maintenant un schéma de la courbe $I(\omega)$ (Fig. 41.4). Cela nous indique combien de lumière nous obtenons aux différentes fréquences.

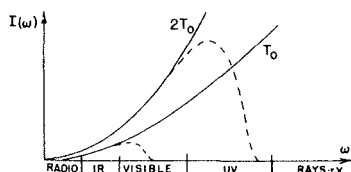


Fig. 41-4. La distribution d'intensité du corps noir à deux températures, selon la physique classique (courbes solides). Ces courbes en pointillé indiquent la distribution réelle.

La quantité d'intensité qu'il y a dans notre boîte par domaine de fréquence unité varie, comme nous le voyons, comme le carré de la fréquence, ce qui signifie que si nous avons une boîte à une température arbitraire, et si nous regardons les rayons X qui en sortent, il y en aura une bonne quantité!

Bien sûr, nous savons que c'est faux. Lorsque nous ouvrons le fourneau et que nous le regardons, nous ne nous brûlons pas les yeux avec des rayons X. C'est complètement faux. De plus l'énergie totale dans la boîte, le total de toutes ces intensités additionnées sur toutes les fréquences serait la surface sous cette courbe infinie. Aussi quelque chose est fondamentalement, puissamment, et absolument faux.

Ainsi la théorie classique était *absolument incapable* de décrire correctement la distribution de la lumière d'un corps noir, de même qu'elle était incapable de décrire correctement la

chaleur spécifique des gaz. Les physiciens revinrent plusieurs fois de différentes manières sur cette démonstration, mais il n'y a aucune échappatoire. Ceci est la prédiction de la physique classique. L'équation (41.13) est appelée la *loi de Rayleigh*, c'est la prédiction de la physique classique et c'est évidemment absurde.

41-3 Équipartition et l'oscillateur quantique

La difficulté précédente était un autre aspect du problème continu de la physique classique, qui a commencé avec la difficulté de la chaleur spécifique des gaz, et qui est maintenant centré sur la distribution de la lumière dans le corps noir. Au moment, bien sûr, où les théoriciens étudiaient ces problèmes, il y avait déjà de nombreuses *mesures* de la courbe effective. Et il apparaissait que la courbe correcte ressemblait aux courbes en pointillé sur la Figure (41-4). Les rayons X ne s'y trouvaient pas. Si nous baissions la température, toute la courbe descend proportionnellement à T , selon la théorie classique, mais la courbe observée s'arrête plus tôt à des températures plus basses. Ainsi l'extrémité basse fréquence de la courbe est correcte, mais son extrémité haute fréquence est fautive. Pourquoi? Lorsque Sir James Jeans se préoccupait de la chaleur spécifique des gaz, il remarqua que les mouvements de hautes fréquences sont «gelés» lorsque la température descend trop bas. C'est-à-dire que si la température est trop basse, si la fréquence est trop élevée, l'oscillateur *ne possède pas* kT d'énergie en moyenne. Maintenant, rappelons comment nous avons déduit (41.13): Cela dépendait entièrement de l'énergie de l'oscillateur à l'équilibre thermique. Ce qu'était le kT de (41.5), et ce que vaut le même kT dans (41.13), c'est l'énergie moyenne de l'oscillateur harmonique de fréquence ω à la température T . Classiquement ceci vaut kT , mais pas expérimentalement! — non pas lorsque la température est trop basse ou lorsque la fréquence de l'oscillateur est trop élevée. Et ainsi la raison pour laquelle la courbe redescend est la même raison pour laquelle la chaleur spécifique des gaz ne convient pas. Il est plus facile d'étudier la courbe du corps noir que d'étudier les chaleurs spécifiques des gaz qui sont si compliquées; de ce fait notre attention est centrée sur la détermination de la vraie courbe du corps noir, parce que cette courbe est une courbe qui nous dit correctement, à chaque fréquence, ce que vaut en réalité l'énergie moyenne de l'oscillateur harmonique en fonction de la température.

Planck étudia cette courbe. Il détermina d'abord la réponse empiriquement, en adaptant la courbe observée avec une bonne fonction qui lui correspondait très bien. Il possédait alors une formule empirique pour l'énergie moyenne d'un oscillateur harmonique en fonction de la fréquence. En d'autres termes, il avait la formule *correcte* au lieu de kT , et puis en cherchant un peu, il lui trouva une démonstration simple qui contient une hypothèse extrêmement particulière. Cette hypothèse était que l'*oscillateur harmonique ne peut recevoir de l'énergie que pour un montant $\hbar\omega$ à chaque fois*. L'idée qu'ils peuvent avoir *n'importe quelle énergie* est fautive. Bien entendu, ce fut le commencement de la fin de la mécanique classique.

La toute première formule de mécanique quantique correctement déterminée va maintenant être démontrée. Supposons que les niveaux d'énergie permis d'un oscillateur harmonique soient équidistants d'une quantité $\hbar\omega_0$, de telle sorte que l'oscillateur ne puisse avoir que ces diverses énergies (Fig. 41-5). Planck proposa un argument quelque peu plus compliqué que celui qui est donné ici, parce que c'était le tout début de la mécanique quantique et il devait prouver certaines choses. Mais nous allons considérer comme un fait (ce qu'il avait démontré dans ce cas) que la probabilité d'occuper un niveau

N_4	$E_4 = 4\hbar\omega$	$P_4 = A \exp(-4\hbar\omega/kT)$
N_3	$E_3 = 3\hbar\omega$	$P_3 = A \exp(-3\hbar\omega/kT)$
N_2	$E_2 = 2\hbar\omega$	$P_2 = A \exp(-2\hbar\omega/kT)$
N_1	$E_1 = \hbar\omega$	$P_1 = A \exp(-\hbar\omega/kT)$
N_0	$E_0 = 0$	$P_0 = A$

Fig. 41-5. Les niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique sont espacés par valeurs égales: $E_n = n\hbar\omega$.

d'énergie E est $P(E) = ae^{-E/kT}$. Si nous acceptons cela, nous obtiendrons le résultat correct.

Supposez maintenant que nous ayons un ensemble d'oscillateurs et que chacun vibre à une fréquence ω_0 . Certains de ces oscillateurs seront dans l'état quantique fondamental, certains seront dans le suivant, etc. Ce que nous aimerions connaître, c'est l'énergie moyenne de tous ces oscillateurs. Pour la trouver, calculons l'énergie totale de tous les oscillateurs et divisons par le nombre d'oscillateurs. Ce sera l'énergie moyenne par oscillateur à l'équilibre thermique, et ce sera également l'énergie thermique qui est en équilibre avec le rayonnement du corps noir et cela doit remplacer kT dans l'équation (41.13). Ainsi nous appelons N_0 le nombre d'oscillateurs qui se trouvent dans l'état fondamental (l'état d'énergie la plus faible); N_1 le nombre d'oscillateurs dans l'état E_1 et N_2 le nombre de ceux qui sont dans l'état E_2 ; etc. Selon l'hypothèse (que nous n'avons pas démontrée) que, en mécanique quantique, la loi qui remplace la probabilité $e^{-E.P./kT}$ où $e^{-E.C./kT}$ en mécanique classique est que la probabilité diminue comme $e^{-\Delta E/kT}$ où ΔE est l'accroissement d'énergie, nous supposons que le nombre N_1 de ceux qui sont dans le premier état est égal au nombre N_0 de ceux qui sont dans l'état fondamental que multiplie $e^{-\hbar\omega/kT}$. De la même manière, N_2 , le nombre d'oscillateurs dans le deuxième état, est $N_2 = N_0 e^{-2\hbar\omega/kT}$. Pour simplifier l'algèbre, appelons $e^{-\hbar\omega/kT} = x$. Alors nous avons simplement $N_1 = N_0 x$, $N_2 = N_0 x^2$, ..., $N_n = N_0 x^n$.

On doit d'abord calculer l'énergie totale de tous les oscillateurs. Si un oscillateur est dans l'état fondamental, il n'y a pas d'énergie. S'il est dans le premier état, l'énergie est $\hbar\omega_0$, et il y en a N_1 . Ainsi $N_1\hbar\omega$, ou $\hbar\omega N_0 x$ est la quantité d'énergie que nous obtenons à partir de ceux-ci. Ceux qui se trouvent dans le deuxième état ont $2\hbar\omega_0$, et il y en a N_2 , ainsi $N_2 \cdot 2\hbar\omega = 2\hbar\omega N_0 x^2$ est la quantité d'énergie que nous obtenons de leur part, etc. Puis nous additionnons le tout pour obtenir $E_{\text{total}} = N_0\hbar\omega(0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)$.

Et maintenant, combien y a-t-il d'oscillateurs? Bien sûr, N_0 est le nombre de ceux dans l'état fondamental N_1 dans le premier état, etc., et nous les additionnons tous ensemble: $N_{\text{total}} = N_0(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$. Ainsi l'énergie moyenne est

$$\langle E \rangle = \frac{E_{\text{tot}}}{N_{\text{tot}}} = \frac{N_0\hbar\omega(0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)}{N_0(1 + x + x^2 + \dots)}. \quad (41.14)$$

Nous laisserons aux lecteurs le soin de se débrouiller avec les deux sommes qui apparaissent ici et d'avoir un petit peu d'amusement pour en trouver la solution. Lorsque nous avons terminé d'additionner et d'exprimer x dans la somme, nous devons obtenir – si nous n'avons pas fait de fautes dans la somme –

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (41.15)$$

Ceci fut la première formule de mécanique quantique à être connue ou à être discutée, et ce fut le splendide point culminant de dizaines d'années de difficultés. Maxwell savait que quelque chose n'allait pas, et le problème était de savoir: qu'est-ce qui était *correct*? Nous venons de trouver la réponse quantitative de ce qui est correct au lieu de kT . Cette expression doit, bien sûr, tendre vers kT lorsque $\omega \rightarrow 0$ ou lorsque $T \rightarrow \infty$. Voyez si vous pouvez prouver que cela est vrai – apprenez comment faire cette démonstration mathématique.

C'est le fameux facteur de diminution que Jeans cherchait, et si nous l'utilisons dans (41.13) à la place de kT , nous obtenons pour la distribution de la lumière dans une boîte noire

$$I(\omega) d\omega = \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar \omega / kT} - 1)}. \quad (41.16)$$

Nous voyons que pour les grandes valeurs de ω , bien que nous ayons ω^3 au numérateur, on trouve au dénominateur un e élevé à une énorme puissance dans le dénominateur, de telle sorte que la courbe diminue à nouveau et ne « s'envole » pas – nous n'obtenons pas de lumière ultra-violette ou des rayons X là où nous ne nous les attendons pas!

On peut se plaindre que dans notre démonstration de (41.16) nous ayons utilisé la théorie quantique pour les niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique, et la théorie classique pour déterminer la section efficace σ_s . Mais la théorie quantique de la lumière interagissant avec un oscillateur harmonique donne exactement le même résultat que celui donné par la théorie classique. Ceci, en fait, justifie la raison pour laquelle nous avons passé autant de temps à analyser l'indice de réfraction et la diffusion de la lumière, en utilisant un modèle d'atomes semblables à de petits oscillateurs – les formules quantiques sont essentiellement les mêmes.

Revenons maintenant au bruit Johnson dans une résistance. Nous avons déjà remarqué que la théorie de ce bruit est en fait la même théorie que celle de la distribution classique du corps noir. En fait, d'une manière assez amusante, nous avons déjà dit que si la résistance dans un circuit n'était pas une résistance réelle, mais était une antenne (une antenne agit comme une résistance parce qu'elle émet de l'énergie), une résistance de rayonnement, il nous serait plus facile de calculer quelle serait la puissance. Ce serait simplement la puissance qui entre dans l'antenne venant de la lumière qui est tout autour, et nous obtiendrions la même distribution, modifiée simplement par un ou deux facteurs. Nous pouvons supposer que la résistance est un générateur avec un spectre de puissance inconnue $P(\omega)$. Le spectre est déterminé par le fait que ce même générateur relié à un circuit résonnant de *fréquence quelconque*, comme sur la Figure (41.2[b]), engendre dans l'inductance une tension de grandeur donnée par l'équation (41.2). On est alors conduit à la même intégrale que dans l'équation (41.10), et la même méthode s'applique pour donner l'équation (41.3). Pour des basses températures, le kT dans (41.3) doit, bien sûr, être remplacé par (41.15). Les deux théories (rayonnement du corps noir et bruit Johnson) sont également étroitement reliées physiquement, car nous pouvons bien sûr relier un circuit résonnant à une *antenne*, ce qui fait que la résistance R est une pure *résistance de rayonnement*. Puisque (41.2) ne dépend pas de l'origine physique de la résistance, nous savons que le générateur G est le même pour une résistance réelle et pour une résistance de rayonnement. Quelle est l'origine de la puissance engendrée $P(\omega)$ si la résistance R est simplement une antenne parfaite en équilibre avec son environnement à la température T ? C'est le rayonnement $I(\omega)$ dans l'espace à la température T qui frappe l'antenne et qui en tant que « signaux reçus » crée un générateur effectif. De ce fait, on peut déduire une relation directe entre $P(\omega)$ et $I(\omega)$ conduisant de (41.13) à (41.3).

Toutes les choses dont nous avons parlé – le bruit Johnson, la distribution de Planck et la théorie correcte du mouvement Brownien que nous allons maintenant décrire – sont les développements réalisés au cours de la première décennie ou à peu près de ce siècle. Maintenant, gardant en mémoire ces faits et ce développement historique, revenons au mouvement Brownien.

41-4 La marche aléatoire

Voyons comment la position d'une particule agitée doit se modifier avec le temps pour des temps très longs comparés à l'intervalle de temps entre deux « chocs ». Considérons une petite particule animée d'un mouvement Brownien qui s'agite parce qu'elle est bombardée de tous les côtés par des molécules d'eau s'agitant irrégulièrement. Question : Après un certain intervalle de temps, à quelle distance de l'endroit où elle est partie est-il probable qu'on trouvera la particule ? Ce problème a été résolu par Einstein et Smoluchowski. Si nous imaginons que nous divisons le temps en petits intervalles, par exemple un centième de seconde ou à peu près, alors après le premier centième de seconde elle se déplace ici, et dans le centième suivant elle se déplace un peu plus, dans le centième d'après elle se déplace quelque part ailleurs, etc. En termes de vitesse de bombardement, un centième de seconde est un temps très long. Le lecteur peut facilement vérifier que le nombre de collisions qu'une seule molécule d'eau reçoit en une seconde est environ 10^{14} , de telle sorte qu'en un centième de seconde elle reçoit 10^{12} collisions, ce qui est déjà énorme ! De ce fait, après un centième de seconde elle ne se souviendra pas de ce qui s'est passé précédemment. En d'autres termes, les collisions sont toutes « au hasard », de telle sorte que chaque « pas » n'est pas reliée au « pas » précédent. Ça ressemble au problème fameux du marin ivre : le marin sort du bar et suit un chemin aléatoire, mais chaque parcours est choisi faisant un angle arbitraire, au hasard, par rapport au précédent (Figure 41-6). La question est alors : Après un temps long, où se trouve le marin ? Bien sûr nous ne savons pas ! C'est impossible à dire. Ce que nous voulons dire – c'est qu'il est simplement quelque part plus ou moins loin au hasard. Bien, alors en moyenne, où se trouve-t-il ? *En moyenne de quelle distance s'est-il éloigné du bar ?*



Fig. 41-6. Une marche aléatoire de 36 pas de longueur l . A quelle distance de B se trouve S_{36} ? Réponse : en moyenne à $6l$.

Nous avons déjà répondu à cette question, parce que nous avons à un certain moment traité la superposition de la lumière issue de tout un ensemble de sources différentes, ayant des phases différentes et ce qui revenait à additionner un grand nombre de flèches avec des angles différents (Chapitre 32). Nous avons découvert que le carré moyen de la distance entre les extrémités de la chaîne des pas aléatoires, qui était l'intensité de la lumière, est la somme des intensités des parties séparées. Et ainsi, par le même type de déduction mathématique, nous pouvons prouver immédiatement que si R_N est la distance vectorielle à partir de l'origine après N étapes, le carré moyen de la distance à partir de l'origine est proportionnel au nombre N d'étapes. C'est-à-dire $\langle R_N^2 \rangle = NL^2$, où L est la longueur de chaque étape. Puisque le nombre d'étapes est proportionnel au temps dans notre problème actuel, *la moyenne du carré*

de la distance est proportionnelle au temps :

$$\langle R^2 \rangle = \alpha t. \quad (41.17)$$

Ceci ne signifie pas que la *distance moyenne* soit proportionnelle au temps. Si la distance moyenne était proportionnelle au temps, cela signifierait que la dérive se fait à vitesse uniforme. Le marin *parcourt* une distance qui n'est pas négligeable, mais seulement de telle sorte que le *carré* de la distance moyenne soit proportionnel au temps. C'est la caractéristique de la marche aléatoire.

Nous pouvons montrer très facilement que dans chaque étape successive le carré de la distance augmente en moyenne de L^2 . Car si nous écrivons $\mathbf{R}_N = \mathbf{R}_{N-1} + \mathbf{L}$, nous trouvons que $\mathbf{R}_N^2$ est

$$\mathbf{R}_N \cdot \mathbf{R}_N = R_N^2 = R_{N-1}^2 + 2\mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{L} + L^2,$$

et prenant la moyenne sur plusieurs essais, nous trouvons $\langle R_N^2 \rangle = \langle R_{N-1}^2 \rangle + L^2$, puisque $\langle \mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{L} \rangle = 0$. Et ainsi par induction,

$$R_N^2 = NL^2. \quad (41.18)$$

Nous souhaiterions maintenant calculer le coefficient α de l'équation (41.17), et pour ce faire nous devons ajouter un élément. Nous allons supposer que si nous ajoutons une force agissant sur cette particule (n'ayant rien à voir avec le mouvement Brownien – nous ouvrons ici une parenthèse), celle-ci réagirait de la manière suivante sous l'effet de la force. Premièrement, il y aurait l'inertie. Soit m le coefficient d'inertie, la masse effective de l'objet (pas nécessairement la même que la masse réelle de la particule réelle, parce que l'eau doit se déplacer autour de la particule lorsque nous tirons sur elle). Si donc nous parlons du mouvement dans une direction, il y a un terme en $m(d^2x/dt^2)$ d'un côté. Puis nous voulons également supposer que si nous exerçons une traction constante sur l'objet, il y aura une résistance à l'avancement due au fluide, proportionnelle à sa vitesse. A côté de l'inertie du fluide, il y a la résistance à l'écoulement due à la viscosité et la complexité du fluide. Il est absolument essentiel qu'il y ait certains processus de pertes irréversibles, quelque chose comme une résistance, afin qu'il y ait des fluctuations. Il n'y a aucune manière de produire le kT tant qu'il n'y a pas également des pertes. La source des fluctuations est très étroitement reliée à ces pertes. Nous discuterons bientôt de ce qu'est le mécanisme de cette résistance à l'avancement – nous parlerons de forces qui sont proportionnelles à la vitesse et de leurs origines. Mais supposons simplement pour le moment qu'il existe une telle résistance. Alors la formule du mouvement sous l'effet d'une force externe, lorsque nous tirons sur la particule d'une manière normale, est

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} = F_{\text{ext}}. \quad (41.19)$$

La quantité μ peut être déterminée directement à partir de l'expérience. Par exemple, nous pouvons regarder la goutte tomber sous l'effet de la gravitation. Alors nous savons que la force est mg , et μ est égal à mg divisé par la vitesse de chute que la goutte acquiert en définitive. Ou encore nous pourrions placer la goutte dans une centrifugeuse et voir à quelle vitesse elle se dépose. Ou si elle est chargée, nous pouvons appliquer un champ électrique sur elle. Ainsi μ est mesurable, ce n'est pas quelque chose d'artificiel, et on connaît sa valeur pour de nombreuses particules colloïdales, etc.

Utilisons la même formule dans le cas où la force n'est pas externe, mais est égale aux forces irrégulières du mouvement Brownien. Nous essayerons alors de déterminer le carré moyen de la distance parcourue par l'objet. Au lieu de considérer la distance à trois dimensions, considérons simplement une seule dimension et cherchons la moyenne de x^2 , afin de nous entraîner. (Évidemment la moyenne de x^2 est la même que celle de y^2 et la même que celle de z^2 , et de ce fait le carré moyen de la distance est simplement 3 fois ce que nous allons calculer.) La composante x des forces irrégulières est, bien sûr, aussi irrégulière que n'importe quelle autre composante. Quel est le taux de variation de x^2 ? C'est $d(x^2)/dt = 2x(dx/dt)$, ce qui fait que nous devons trouver la moyenne du produit de la position par la vitesse. Nous allons montrer que ceci est une constante, et que de ce fait le rayon carré moyen va augmenter proportionnellement au temps, et à une certaine vitesse. Maintenant si nous multiplions l'équation (41.19) par x , $mx(d^2x/dt^2) + \mu x(dx/dt) = xF_x$. Nous voulons la moyenne temporelle de $x(dx/dt)$, aussi prenons la moyenne de l'équation totale et étudions les trois termes. Mais qu'en est-il de x que multiplie la force? S'il arrive que la particule se soit déplacée d'une certaine distance x , alors puisque la force irrégulière est *complètement* irrégulière et ne sait pas d'où la particule est partie, l'impulsion suivante peut être dans n'importe quelle direction relativement à x . Si x est positif, il n'y a aucune raison pour que la force moyenne soit également dans cette direction. Il est tout à fait aussi probable qu'elle soit dans une direction ou dans l'autre. Les forces de bombardement n'entraînent pas dans une direction définie. Ainsi la valeur moyenne de x que multiplie F est zéro. D'un autre côté, pour le terme $mx(d^2x/dt^2)$ nous devons faire preuve d'un peu d'imagination, et écrire ceci sous la forme

$$mx \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d[x(dx/dt)]}{dt} - m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2.$$

Nous introduisons ces deux termes et en prenons la moyenne. Voyons alors ce que doit valoir x que multiplie la vitesse. x que multiplie la vitesse possède une moyenne qui ne change pas avec le temps, parce que lorsque la particule arrive en un certain endroit, elle n'a pas de souvenir de l'endroit où elle se trouvait précédemment, ce qui fait que cela ne change pas avec le temps. Ainsi cette quantité en moyenne est nulle. Il nous reste la quantité mv^2 , et c'est la seule chose que que nous connaissons: $mv^2/2$ possède une valeur moyenne $\frac{1}{2}kT$. De ce fait, nous trouvons que

$$\left\langle mx \frac{d^2x}{dt^2} \right\rangle + \mu \left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle = \langle xF_x \rangle$$

implique

$$-\langle mv^2 \rangle + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 0,$$

ou

$$\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = 2 \frac{kT}{\mu}. \quad (41.20)$$

De ce fait l'objet se déplace du carré moyen de la distance $\langle R^2 \rangle$ à la fin d'un certain intervalle de temps t , égal à

$$\langle R^2 \rangle = 6kT \frac{t}{\mu}. \quad (41.21)$$

Et ainsi nous pouvons déterminer réellement *quelle distance* parcourt la particule! Nous devons d'abord déterminer comment elle réagit à une force constante, à quelle vitesse elle est entraînée sous une force connue (pour trouver μ), puis nous pouvons déterminer quelle distance elle parcourt dans un mouvement aléatoire. Cette équation a été d'une importance considérable du point de vue historique, parce que ce fut une des premières façons de déterminer la constante k . Après tout, nous pouvons mesurer μ , le temps, la distance parcourue par les particules, et faire une moyenne. La raison pour laquelle cette détermination de k était si importante est que dans la loi $PV = RT$ pour une mole, nous savons que R , qui peut également être mesuré, est égal au nombre d'atomes dans une mole que multiplie k . Une mole fut originellement définie comme tant de *grammes* d'oxygène – 16 (on utilise maintenant le carbone), et le nombre d'*atomes* dans une mole n'était pas connu, initialement. C'est, bien sûr, un problème très intéressant et important. Quelles sont les dimensions des atomes? Combien y en a-t-il? Ainsi une des premières déterminations du nombre des atomes fut obtenue par la détermination de la distance parcourue par une petite particule d'impureté lorsque nous la regardons avec patience au microscope pendant un certain temps. Et ainsi la constante de Boltzmann k et le nombre d'Avogadro N_0 furent déterminés parce que R avait déjà été mesuré.

Applications de la théorie cinétique

42-1 Évaporation

42-2 Émission thermoionique

42-3 Ionisation thermique

42-4 Cinétique chimique

42-5 Les lois du rayonnement d'Einstein

42-1 Évaporation

Dans ce chapitre, nous allons traiter certaines applications supplémentaires de la théorie cinétique. Dans le chapitre précédent, nous avons insisté sur un aspect particulier de la théorie cinétique, à savoir que l'énergie cinétique moyenne pour tout degré de liberté d'une molécule ou de tout autre objet est $\frac{1}{2}kT$. La caractéristique centrale qui va maintenant nous occuper est, par ailleurs, le fait que la probabilité de trouver une particule en différents endroits par unité de volume varie comme $e^{-\text{énergie potentielle}/kT}$; nous allons trouver plusieurs applications de ceci.

Les phénomènes que nous voulons étudier sont relativement compliqués: un liquide qui s'évapore, ou des électrons dans un métal sortant de la surface, ou une réaction chimique dans laquelle interviennent un grand nombre d'atomes. Dans de tels cas, il n'est plus possible de faire, à partir de la théorie cinétique, des analyses simples et correctes, parce que la situation est trop compliquée. De ce fait, ce chapitre, sauf quelques exceptions qui seront précisées, sera assez inexact. L'idée sur laquelle nous voulons insister est simplement que nous pouvons, à partir de la théorie cinétique, *plus ou moins* comprendre comment les choses doivent se comporter. En utilisant des raisonnements thermodynamiques, ou des mesures empiriques de certaines quantités critiques, nous pouvons obtenir une représentation plus précise des phénomènes.

Cependant, il est très utile de savoir même approximativement, pourquoi une chose se comporte comme elle le fait, de telle sorte que lorsque la situation est nouvelle ou telle que nous n'ayons pas encore commencé de l'analyser, nous puissions dire plus ou moins ce qui va se passer. Ainsi cette discussion est hautement imprécise mais essentiellement correcte – correcte pour le principe, mais un petit peu simplifiée, par exemple, pour ce qui est des détails spécifiques.

Le premier exemple que nous allons considérer est l'évaporation d'un liquide. Supposons que nous ayons une boîte de grand volume, partiellement remplie avec un liquide en équilibre, avec sa vapeur à une certaine température. Nous supposons que les molécules de la vapeur sont relativement éloignées, et qu'à l'intérieur du liquide les molécules sont empilées proches les unes des autres. Le problème est de trouver combien de molécules se trouvent

dans la phase vapeur, comparée avec le nombre de celles qui se trouvent dans le liquide. Quelle est la densité de la vapeur à une certaine température et comment cela dépend-il de la température?

Appelons n le nombre de molécules par unité de volume dans la vapeur. Ce nombre, bien sûr, varie avec la température. Si nous apportons de la chaleur, nous augmentons l'évaporation. Soit alors une autre quantité $1/V_a$, égale au nombre d'atomes par unité de volume du liquide: Nous supposons que chaque molécule du liquide occupe un certain volume, de telle sorte que s'il y a davantage de molécules dans le liquide, elles occupent toutes ensemble un volume plus grand. Ainsi, si V_a est le volume occupé par une molécule, le nombre de molécules dans un volume unité est égal au volume unité divisé par le volume de chaque molécule. De plus, nous supposons qu'il y a une force d'attraction entre les molécules pour les maintenir ensemble dans le liquide. Autrement, nous ne pourrions pas comprendre pourquoi il se condense. Ainsi supposons qu'il y ait une telle force et qu'il y ait une énergie de liaison des molécules au sein du liquide qui disparaît lorsqu'elles passent à l'état vapeur. Nous allons donc supposer que, pour sortir une molécule du liquide et l'amener à la vapeur, il faut fournir une certaine quantité de travail W . Il existe une certaine différence W entre l'énergie d'une molécule dans le liquide et sa valeur si elle était dans l'état de vapeur, parce que nous devons l'arracher des autres molécules qui l'attirent.

Nous utilisons maintenant le principe général que le nombre d'atomes par unité de volume dans deux régions différentes est $n_2/n_1 = e^{-(E_2 - E_1)/kT}$. Ainsi le nombre n par unité de volume dans la vapeur, divisé par le nombre $1/V_a$ par unité de volume dans le liquide est égal à

$$nV_a = e^{-W/kT}, \quad (42.1)$$

parce que c'est la règle générale. C'est semblable à l'atmosphère en équilibre sous l'effet de la gravitation, où le gaz vers le bas est plus dense que celui au sommet à cause du travail mgh nécessaire pour soulever les molécules de gaz jusqu'à la hauteur h . Dans le liquide, les molécules sont plus denses que dans la vapeur parce que nous devons les tirer hors du liquide par-dessus la colline d'énergie W , et le rapport des densités est $e^{-W/kT}$.

C'est ce que nous voulions déduire – à savoir que la densité de vapeur varie comme e à la puissance moins une certaine énergie divisée par kT . Les termes devant ne nous intéressent pas beaucoup, parce que dans la plupart des cas la densité de vapeur est beaucoup plus faible que la densité du liquide. Dans les conditions où nous ne sommes pas près du point critique, pour lequel elles sont presque les mêmes, mais lorsque la densité de vapeur est beaucoup plus faible que la densité du liquide, alors le fait que n soit beaucoup plus faible que $1/V_a$ est dû au fait que W est beaucoup plus élevé que kT . Ainsi des formules telles que (42.1) ne sont intéressantes que lorsque W est bien plus grand que kT , parce que, dans ce cas, puisque nous élevons e à une puissance énorme avec un signe moins, si nous modifions T d'une petite quantité, cet énorme exposant change un peu et le changement produit dans le facteur exponentiel est bien plus important que n'importe quel changement qui peut apparaître dans les facteurs devant l'expression. Pourquoi devrait-il y avoir un changement dans des facteurs tel que V_a ? Parce que notre analyse était une analyse approchée. Après tout, il n'y a pas réellement de volume défini pour chacune des molécules; lorsque nous changeons la température, le volume V_a ne reste pas constant – le liquide se dilate. Il y a d'autres aspects de peu d'importance à l'image de celui-là, et de ce fait, la situation réelle est plus compliquée. Il y a partout des termes variant peu avec la température.

En fait, nous pourrions dire que W lui-même varie lentement avec la température, parce qu'à une température plus élevée, pour un volume moléculaire différent, il y aurait des attractions moyennes différentes, etc. Si ainsi nous pensons avoir une formule dans laquelle tout varie d'une manière inconnue avec la température, alors nous n'avons plus aucune formule, si nous réalisons que l'exposant W/kT est, en général, très grand, nous voyons que dans la courbe de la densité de vapeur en fonction de la température la plus grande partie de la variation est provoquée par le facteur exponentiel, et si nous prenons W comme constante et le coefficient $1/V_a$ comme presque constant, c'est une bonne approximation pour de courts intervalles le long de cette courbe. La plupart de la variation, en d'autres termes, est de nature générale sous la forme $e^{-W/kT}$.

Il apparaît qu'il y a de très nombreux phénomènes dans la nature qui sont caractérisés par l'emprunt d'une énergie à quelque part, et dans lequel la caractéristique principale de la variation avec la température est e à la puissance moins l'énergie sur kT . Ceci est un fait utile seulement lorsque l'énergie est grande en comparaison de kT , de telle sorte que la plus grande partie de la variation soit contenue dans la variation de kT et non pas dans la constante ou dans d'autres facteurs.

Considérons maintenant une autre manière d'obtenir un résultat quelque peu semblable pour l'évaporation, mais en y regardant plus en détail. Pour obtenir (42.1), nous avons simplement appliqué une règle qui est valable à l'équilibre, mais afin de comprendre les choses un peu mieux, il n'y a pas de mal d'essayer de regarder un peu plus les détails de ce qui se passe. Nous pouvons également décrire ce qui se passe de la manière suivante : les molécules qui sont dans la vapeur bombardent continuellement la surface du liquide ; lorsqu'elles la frappent, elles peuvent être réfléchies ou au contraire être capturées. La proportion en est inconnue – peut-être 50-50, peut-être 10-90 – nous ne savons pas. Supposons qu'elles soient capturées toutes les fois, – nous pouvons recommencer la même analyse plus tard avec l'hypothèse qu'elles ne sont pas toujours capturées à chaque fois. Alors à un moment donné il y aura un certain nombre d'atomes se condensant à la surface du liquide. Le nombre de molécules qui se condensent, le nombre de celles qui arrivent sur une surface unité est égal au nombre n par unité de volume que multiplie la vitesse v . Cette vitesse des molécules est liée à la température, parce que nous savons que $\frac{1}{2}mv^2$ est égal à $\frac{3}{2}kT$ en moyenne. Ainsi v est une sorte de vitesse moyenne. Bien sûr, nous devons intégrer sur tous les angles et obtenir un certain type de moyenne, mais c'est grossièrement proportionnel à la moyenne quadratique de la vitesse, à un certain facteur près. Ainsi

$$N_c = nv \quad (42.2)$$

est le nombre de celles qui arrivent par unité de surface et qui se condensent.

Au même moment, cependant, les atomes dans le liquide s'agitent et de temps en temps l'un d'entre eux est éjecté. Nous devons maintenant estimer à quelle vitesse ils sont éjectés. L'idée sera qu'à l'équilibre le nombre de ceux qui sont éjectés par seconde et le nombre de ceux qui arrivent par seconde sont égaux.

Combien y en a-t-il qui sont éjectés ? Afin d'être éjectée, une molécule particulière doit acquérir par accident une énergie en excès sur celle de ses voisines – une énergie considérablement en excès, parce qu'elle est attirée très fortement par les autres molécules dans le liquide. Habituellement elle ne les quitte pas, parce qu'elle est fortement attachée, mais dans les collisions il peut arriver que l'une d'entre elles reçoive une énergie plus grande par accident, et la chance qu'elle reçoive l'énergie en plus W qui est nécessaire dans notre cas est très petite si $W \gg kT$.

En fait, $e^{-W/kT}$ est la chance qu'un atome puisse recevoir plus que cette quantité d'énergie. C'est le principe général de la théorie cinétique: les chances d'emprunter une énergie W en excès par rapport à la moyenne, sont e à la puissance moins l'énergie que vous devez emprunter divisée par kT . Supposez maintenant que certaines molécules aient emprunté cette énergie. Nous devons maintenant estimer combien d'entre elles quittent la surface par seconde. Bien sûr, le simple fait qu'une molécule ait l'énergie nécessaire ne signifie pas automatiquement qu'elle s'évapore effectivement, puisqu'elle est peut-être enfermée trop profondément à l'intérieur du liquide ou, même si elle est proche de la surface, elle peut se déplacer dans une mauvaise direction. Le nombre de celles qui vont quitter la surface unité par seconde sera quelque chose comme ceci: le nombre d'atomes qui sont près de la surface par unité de surface divisé par le temps qu'il faut à l'un d'eux pour s'échapper, multiplié par la probabilité $e^{-W/kT}$ qu'il soit prêt à s'échapper au sens où il a suffisamment d'énergie.

Nous supposons que chaque molécule à la surface du liquide occupe une certaine surface de section efficace A . Alors le nombre de molécules par unité de surface du liquide sera $1/A$. Et maintenant, combien de temps faut-il à une molécule pour s'échapper? Si la molécule possède une certaine vitesse moyenne v , et doit se déplacer, disons, d'un diamètre moléculaire D , l'épaisseur de la première couche, alors le temps qu'il faut pour traverser cette épaisseur est le temps nécessaire pour s'échapper, si la molécule possède suffisamment d'énergie. Le temps sera D/v . Ce qui fait que le nombre de molécules s'évaporant doit être approximativement

$$N_e = (1/A)(v/D)e^{-W/kT}. \quad (42.3)$$

La surface de chaque atome que multiplie l'épaisseur de la couche est approximativement la même chose que le volume V_a occupé par un seul atome. Et ainsi, afin d'obtenir l'équilibre, nous devons avoir $N_c = N_e$, ou

$$nv = (v/V_a)e^{-W/kT}. \quad (42.4)$$

Nous pouvons simplifier les v , puisqu'ils sont égaux; bien que l'un soit la vitesse des molécules dans la vapeur et l'autre la vitesse d'une molécule qui s'évapore, ils sont les mêmes parce que nous savons que leur énergie cinétique moyenne (dans une direction) est $\frac{1}{2}kT$. Mais on peut objecter, «Non! Non! Celles-ci sont celles qui se déplacent exceptionnellement rapidement; celles-ci sont celles qui ont acquis une certaine énergie en excès». Pas réellement, parce qu'au moment où elles commencent à sortir du liquide, elles doivent *perdre* cette énergie en excès au détriment de l'énergie potentielle. Ce qui fait que lorsqu'elles atteignent la surface, elles ont été ralenties jusqu'à la vitesse v ! C'est le même effet déjà vu dans notre discussion de la distribution des vitesses moléculaires dans l'atmosphère — en bas, les molécules avaient une certaine distribution en énergie. Celles qui arrivent au sommet ont la *même* distribution d'énergie, parce que celles qui sont lentes n'arrivent pas du tout, et celles qui sont rapides ont été ralenties. Les molécules qui s'évaporent ont la même distribution en énergie que celles à l'intérieur — un fait assez remarquable. De toute manière, il est inutile d'essayer de commenter de trop près notre formule à cause d'autres imprécisions, telles que la probabilité d'être réfléchi plutôt que de pénétrer dans le liquide, etc. Ainsi, nous obtenons une idée approximative de la vitesse d'évaporation et de condensation, et nous voyons, bien sûr, que la densité de vapeur n varie de la même manière que précédemment, mais maintenant nous avons compris les détails sans plus se limiter à une formule arbitraire.

Cette compréhension plus profonde nous permet d'analyser certaines choses. Par exemple, supposez que nous voulions pomper de la vapeur à une vitesse telle que nous éliminions la vapeur aussi rapidement qu'elle est formée (si nous avions de très bonnes pompes et que le liquide s'évapore très lentement), à quelle vitesse devrait se produire l'évaporation si nous maintenons le liquide à la température T ? Supposez que nous ayons déjà expérimentalement mesuré la densité de vapeur à l'équilibre, de telle sorte que nous sachions, à la température donnée, combien de molécules par unité de volume sont en équilibre avec le liquide. Nous voudrions savoir à quelle vitesse il va s'évaporer. Bien que nous n'ayons utilisé qu'une analyse approximative, en ce qui concerne l'évaporation, le nombre de molécules de vapeur *incidentes* n'a pas été calculé d'une manière si mauvaise, à l'exception du facteur inconnu du coefficient de réflexion. Ainsi, nous pouvons utiliser le fait que le nombre de celles qui quittent, à l'équilibre, est le même que le nombre de celles qui arrivent. Bien sûr, la vapeur est éliminée et il n'y a que des molécules sortantes, mais si la vapeur était livrée à elle-même, elle atteindrait la densité d'équilibre, condition suivant laquelle le nombre de molécules qui reviennent serait égal au nombre de celles qui s'évaporent. De ce fait, nous pouvons facilement voir que le nombre de celles qui sortent de la surface par seconde est égal au coefficient de réflexion inconnu R que multiplie le nombre de celles qui viendraient vers la surface par seconde si la vapeur était toujours là, parce que c'est la quantité de celles qui équilibrent l'évaporation à l'équilibre :

$$N_e = nvR = (vR/V_a)e^{-W/kT}. \quad (42.5)$$

Bien sûr, le nombre de molécules qui frappent le liquide venant de la vapeur est facile à calculer, puisque nous n'avons pas à en savoir autant sur les forces que lorsque nous nous préoccupons du nombre de celles qui peuvent s'échapper de la surface du liquide; il est beaucoup plus facile de retourner le raisonnement dans l'autre sens.

42-2 Émission thermoionique

Nous pouvons donner un autre exemple d'un cas très pratique qui est analogue à l'évaporation d'un liquide — si semblable qu'il n'est pas nécessaire d'en faire une analyse séparée. C'est essentiellement le même problème. Dans un tube de radio il y a une source d'électrons, à savoir un filament de tungstène chauffé et une plaque chargée positivement pour attirer les électrons. Tout électron qui s'échappe de la surface du tungstène est immédiatement attiré vers la plaque. C'est notre « pompe » idéale qui « pompe » les électrons tout le temps. La question est alors : Combien d'électrons par seconde pouvons-nous extraire d'un morceau de tungstène et comment ce nombre varie-t-il avec la température? La réponse à ce problème est la même que (42.5), parce qu'il apparaît que dans un morceau de métal, les électrons sont attirés par les ions, ou par les atomes, du métal. Ils sont attirés, grossièrement parlant, par le métal. Afin de faire sortir un électron d'un morceau de métal, il faut une certaine quantité d'énergie ou de travail pour le tirer à l'extérieur. Ce travail varie suivant les différents types de métaux. En fait, il varie même avec l'état de la surface d'un métal donné, mais le travail total peut être de quelques électrons-volts, ce qui, incidemment, est typique de l'énergie qui est en jeu dans les réactions chimiques. Nous pouvons nous souvenir de ce fait en nous rappelant

que la tension dans une cellule chimique, telle qu'une pile de lampes de poche, qui est produite par des réactions chimiques est environ un volt.

Comment pouvons-nous trouver le nombre d'électrons qui sortent par seconde? Ce serait bien difficile d'analyser les effets agissant sur les électrons sortant; il est plus facile d'analyser la situation dans l'autre sens. Ainsi, nous pouvons débiter en imaginant que nous n'extrayons pas d'électrons vers l'extérieur et que les électrons sont comme un gaz, et peuvent revenir vers le métal. Alors il y aurait une certaine densité d'électrons à l'équilibre qui, bien sûr, serait donnée par exactement la même formule que (42.1), où V_a est approximativement le volume par électron dans le métal, et W est égal à $q_e \phi$, où ϕ est ce qu'on appelle le *travail d'extraction*, ou la tension nécessaire pour extraire un électron de la surface. Ceci nous dirait combien d'électrons devraient se trouver dans l'espace environnant et devraient frapper le métal afin d'équilibrer ceux qui sortent. Et ainsi, il est facile de calculer combien d'électrons sortent lorsque nous les enlevons tous, parce que le nombre qui sort est exactement égal au nombre de ceux qui rentreraient avec la densité de « vapeur » électronique utilisée ci-dessus. En d'autres termes, la réponse est que le courant électrique qui rentre par unité de surface est égal à la charge sur chacun, que multiplie le nombre qui arrive par seconde par unité de surface, qui est le nombre par unité de volume que multiplie la vitesse, comme nous l'avons vu plusieurs fois:

$$I = q_e n v = (q_e v / V_a) e^{-q_e \phi / kT}. \quad (42.6)$$

Or un électron-volt correspond à kT , à une température de 11.600 degrés. Le filament du tube peut travailler à une température de 1.100 degrés, par exemple, ce qui fait que le facteur exponentiel est quelque chose comme e^{-10} ; lorsque nous modifions la température un petit peu, le facteur exponentiel change beaucoup. Ainsi, à nouveau, le facteur principal de la formule est $e^{-q_e \phi / kT}$. En fait, le facteur devant est tout à fait faux – il apparaît que le comportement des électrons dans le métal n'est pas correctement décrit par la théorie classique, mais par la mécanique quantique, mais ceci ne fait que légèrement modifier ce premier facteur. En réalité, personne n'a été jusqu'ici capable d'obtenir un calcul satisfaisant, bien que de nombreuses personnes aient utilisé une mécanique quantique de haute performance pour leurs calculs. Le grand problème est de savoir si W change lentement avec la température. S'il change, on ne peut pas distinguer un W changeant lentement avec la température d'un coefficient de tête différent. C'est-à-dire, si W change par exemple, linéairement avec la température, de telle sorte que $W = W_0 + \alpha kT$, alors nous aurons

$$e^{-W/kT} = e^{-(W_0 + \alpha kT)/kT} = e^{-\alpha} e^{-W_0/kT}.$$

Ainsi un W dépendant linéairement de la température est équivalent à une « constante » décalée. Il est en réalité assez difficile et habituellement sans intérêt d'essayer d'obtenir avec précision ce premier coefficient.

42-3 Ionisation thermique

Nous allons maintenant aborder une autre illustration de la même idée; toujours la même idée. Il s'agira de l'ionisation. Supposez que dans un gaz nous ayons tout un ensemble d'atomes qui soient dans un état neutre, par exemple, mais le gaz est chaud et les atomes peuvent

s'ioniser. Nous voudrions savoir combien on peut trouver d'ions dans des conditions données, lorsque nous avons une certaine densité d'atomes par unité de volume à une certaine température. A nouveau nous considérons une boîte dans laquelle il y a N atomes qui contiennent des électrons. (Lorsqu'un électron a quitté un atome, celui-ci est appelé un *ion*, et lorsque l'atome est neutre, nous l'appelons simplement un atome.) Supposons alors que, à n'importe quel moment, le nombre d'atomes neutres soit n_a , le nombre d'ions soit n_i , et le nombre d'électrons soit n_e , chaque fois par unité de volume. Le problème est : Quelle est la relation entre ces trois nombres ?

En premier lieu, nous avons deux conditions ou contraintes sur ces nombres. Par exemple, lorsque nous modifions différentes conditions, telles que la température, etc., $n_a + n_i$ doit rester constant, parce que ce nombre représente simplement le nombre N de noyaux atomiques qui se trouvent dans la boîte. Si nous maintenons le nombre de noyaux fixe par unité de volume et modifions par exemple la température, alors, au fur et à mesure que l'ionisation se produit certains atomes vont se transformer en ions, mais le nombre total des atomes et des ions restera inchangé. C'est-à-dire, $n_a + n_i = N$. Une autre condition est que si le gaz entier doit être électriquement neutre (et si nous négligeons l'ionisation double ou triple), cela signifie que le nombre d'ions est égal au nombre d'électrons à chaque instant, ou $n_i = n_e$. Ce sont des équations subsidiaires qui expriment simplement la conservation de la charge et la conservation des atomes.

Ces équations sont vraies, et nous devons les utiliser lorsque nous considérons un problème réel. Mais nous voulons obtenir une autre relation entre ces quantités. Nous pouvons faire comme suit. Nous utilisons à nouveau l'idée qu'il faut une certaine quantité d'énergie pour sortir un électron de l'atome, que nous appelons *l'énergie d'ionisation*, et que nous écrirons comme W , afin que toutes les formules se ressemblent. Ainsi W est égal à l'énergie nécessaire pour extraire un électron de l'atome et pour fabriquer un ion. A nouveau nous disons que le nombre d'électrons libres par unité de volume dans la « vapeur » est égal au nombre d'électrons liés par unité de volume dans les atomes, que multiplie e à la puissance moins la différence d'énergie entre état lié et état libre, divisée par kT . C'est à nouveau l'équation de base. Comment pouvons-nous l'écrire ? Le nombre d'électrons libres par unité de volume va, bien sûr, être n_e , parce que c'est la définition de n_e . Qu'en est-il du nombre d'électrons par unité de volume qui sont liés aux atomes ? Le nombre total de places où nous pouvons placer les électrons est apparemment $n_a + n_i$, et nous supposons que lorsqu'il est lié, chaque électron est lié dans un certain volume V_a . Ainsi la quantité totale du volume qui est disponible pour les électrons qui sont liés est $(n_a + n_i)V_a$, ainsi nous pouvons écrire notre formule sous la forme

$$n_e = \frac{n_a}{(n_a + n_i)V_a} e^{-W/kT}.$$

La formule est fautive, cependant, pour une raison essentielle qui est la suivante : Lorsqu'un électron est déjà sur un atome, un autre électron ne peut venir dans ce même volume ! En d'autres termes, tous les volumes de tous les sites possibles ne sont pas réellement disponibles pour l'électron qui essaie de se décider si, oui ou non, il restera dans la vapeur ou ira dans la position condensée, parce que dans ce problème on doit ajouter un élément supplémentaire qui est que, lorsqu'un électron se trouve là ou un autre électron se trouve déjà, on ne lui permet pas de s'y rendre – il est repoussé. Pour cette raison il apparaît que nous devons compter

uniquement cette partie du volume qui est disponible à l'éventuel établissement d'un électron. C'est-à-dire que ceux qui sont déjà occupés ne comptent pas dans le volume total disponible, mais le seul volume permis est celui des ions, où il y a des places vacantes que les électrons peuvent occuper. Dans ce cas, nous trouvons une meilleure manière d'écrire notre formule qui est

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{1}{V_a} e^{-W/kT}. \quad (42.7)$$

Cette formule est appelée *l'équation d'ionisation de Saha*. Voyons maintenant si nous pouvons comprendre qualitativement pourquoi une formule telle que celle-ci est correcte, en réfléchissant à propos de la cinétique des événements qui lui sont liés.

D'abord, de temps en temps, un électron se rapproche d'un ion et ils se combinent pour former un atome. Et également de temps en temps, un atome entre en collision et se décompose en un ion et un électron. Maintenant ces deux taux doivent être égaux. A quelle vitesse les électrons et les ions se rencontrent-ils les uns les autres? Le taux est certainement augmenté si le nombre d'électrons par unité de volume est augmenté. Il est également augmenté si le nombre d'ions par unité de volume est augmenté. C'est-à-dire que le taux total suivant lequel la recombinaison se produit est certainement proportionnel au nombre d'électrons que multiplie le nombre d'ions. Le taux total suivant lequel l'ionisation se produit à cause des collisions doit dépendre linéairement du nombre d'atomes à ioniser. Et ainsi les taux vont s'équilibrer lorsque il y aura une certaine relation entre le produit $n_e n_i$ et le nombre d'atomes n_a . Le fait que cette relation soit donnée par cette formule particulière, où W est l'énergie d'ionisation, est bien sûr une information un petit peu plus détaillée, mais nous pouvons facilement comprendre que la formule doit nécessairement comporter la concentration des électrons, des ions et des atomes dans la combinaison $n_e n_i / n_a$ pour produire une constante indépendante des n , ne dépendant que de la température, des sections efficaces atomiques et d'autres facteurs constants.

Nous pouvons également remarquer que, puisque l'équation comporte les nombres *par unité de volume*, si nous voulons réaliser deux expériences avec un nombre total donné N d'atomes et d'ions, c'est-à-dire un certain nombre fixe de noyaux, mais en utilisant des récipients de volumes différents, les n seraient tous plus petits dans le récipient le plus grand. Mais puisque le rapport $n_e n_i / n_a$ reste le même, le *nombre total* d'électrons et d'ions doit être plus grand dans le récipient le plus grand. Pour le voir, supposez qu'il y ait N noyaux à l'intérieur d'une boîte de volume V et qu'une fraction f d'entre eux soit ionisée. Alors $n_e = fN/V = n_i$, et $n_a = (1 - f)N/V$. Alors notre équation devient

$$\frac{f^2}{1 - f} \frac{N}{V} = \frac{e^{-W/kT}}{V_a}. \quad (42.8)$$

En d'autres termes, si nous prenons des densités de plus en plus petites d'atomes, ou si nous rendons les volumes du récipient de plus en plus grands, la fraction f des électrons et des ions doit augmenter. Cette ionisation simplement due à « l'expansion » lorsque la densité diminue, est la raison pour laquelle nous pensons qu'à des densités très faibles, comme dans l'espace froid entre les étoiles, il peut y avoir des ions, même si nous ne comprenons pas cela du point de vue de l'énergie disponible. Bien qu'il faille énormément de kT d'énergie pour les créer, des ions sont présents.

Pourquoi peut-il y avoir des ions présents lorsqu'il y a autant de place tout autour, tandis que si nous augmentons la densité, les ions tendent à disparaître? *Réponse.* Considérons un atome. De temps en temps, la lumière ou un autre atome, ou un ion, ou quoi que ce soit qui maintient l'équilibre thermique, le frappe. Très rarement, parce qu'il faut un excès tellement considérable d'énergie, un électron sort et un ion est fabriqué. Cet électron, si l'espace disponible est énorme, se déplace, avance et ne se rapproche de rien pendant des années, peut-être. Mais une fois dans un très grand laps de temps, il s'approche d'un ion et se recombine pour former un atome. Ainsi, les taux suivant lesquels les électrons sortent des atomes sont très petits. Mais si le volume est énorme, un électron qui s'est échappé passe tellement de temps à trouver un autre ion pour se recombinaison avec lui que sa probabilité de recombinaison est très, très petite; aussi, malgré la grande quantité d'énergie nécessaire, il peut y avoir un nombre raisonnable d'électrons.

42-4 Cinétique chimique

Les mêmes circonstances que nous venons d'appeler ionisation sont également rencontrées dans une réaction chimique. Par exemple, si deux objets A et B se combinent en un composé AB , si nous considérons cela pendant un certain temps, nous voyons que AB est ce que nous avons appelé un atome, B est ce que nous appelons un électron, et A est ce que nous appelons un ion. Ces substitutions faites, les équations d'équilibre ont exactement la même forme:

$$\frac{n_A n_B}{n_{AB}} = c e^{-W/kT}. \quad (42.9)$$

Cette formule, bien sûr, n'est pas exacte, puisque la « constante » c dépend du volume attribué pour que A et B puissent se combiner, etc., mais par des arguments thermodynamiques, on peut identifier la signification de W dans le facteur exponentiel, et il apparaît que c'est très proche de l'énergie nécessitée dans la réaction.

Supposez que nous essayions de comprendre cette formule comme le résultat de collisions, tout à fait de la même manière que nous avons compris la formule d'évaporation, en évaluant le nombre d'électrons qui sortent et ceux qui peuvent revenir par unité de temps. Supposez que A et B se combinent de temps en temps dans une collision pour former un composé AB . Et supposez que le composé AB soit une molécule compliquée qui s'agit en tout sens et qui soit frappée par d'autres molécules, et que de temps en temps elle reçoive suffisamment d'énergie pour exploser et se décomposer à nouveau en A et B .

Il se trouve en réalité, dans les réactions chimiques, que si les atomes s'approchent avec une énergie trop faible, même si de l'énergie doit être libérée dans la réaction $A + B \rightarrow AB$, le fait que A et B puissent se toucher l'un l'autre ne signifie pas nécessairement que la réaction soit amorcée. Il faut habituellement, en fait, que la collision soit plutôt forte pour amorcer la réaction – une collision « molle » entre A et B ne peut pas le provoquer, même si de l'énergie est libérée dans le processus. Aussi, supposons qu'il soit très courant dans les réactions chimiques, que, afin que A et B puissent former AB , ils ne doivent pas simplement se frapper l'un l'autre, mais qu'ils doivent se frapper avec une énergie suffisante. Cette énergie est appelée l'énergie d'activation – l'énergie nécessaire pour « activer » la réaction. Appelons A^* l'énergie d'activation, l'énergie en excès requise dans une collision

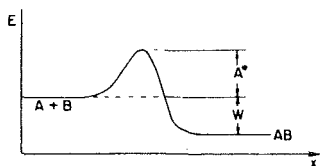


Fig. 42-1. La forme de l'énergie pour la réaction $A + B \rightarrow AB$.

afin que la réaction puisse effectivement se passer. Alors le taux R_f suivant lequel A et B produisent AB va comporter le nombre d'atomes de A , que multiplie le nombre d'atomes de B , que multiplie la fréquence suivant laquelle un seul atome frappe une certaine section efficace σ_{AB} , que multiplie un facteur $e^{-A^*/kT}$, qui est la probabilité qu'ils aient suffisamment d'énergie :

$$R_f = n_A n_B v \sigma_{AB} e^{-A^*/kT}. \quad (42.10)$$

Nous devons maintenant trouver le taux opposé, R_r . AB a une certaine chance de se casser en deux. Afin de pouvoir se casser, il doit non seulement avoir une énergie W nécessaire afin de pouvoir se décomposer en morceaux, mais de la même manière qu'il était difficile pour A et B de se rapprocher, de la même manière il existe une sorte de colline que A et B doivent escalader pour se séparer à nouveau ; ils doivent non seulement avoir suffisamment d'énergie pour être simplement prêts à se séparer, mais une certaine quantité en plus. C'est comme monter sur une colline pour descendre dans une vallée profonde ; ils doivent monter sur la colline en s'y rendant et ils doivent sortir de la vallée et monter sur la colline pour en revenir (Fig. 42-1). Ainsi le taux suivant lequel AB se transforme en A et B sera proportionnel au nombre n_{AB} de ceux qui sont présents, que multiplie $e^{-(W+A^*)/kT}$:

$$R_r = c' n_{AB} e^{-(W+A^*)/kT}. \quad (42.11)$$

Le c' contient le volume des atomes et le taux de collisions, que nous pouvons calculer, comme nous l'avons fait dans le cas de l'évaporation, avec des surfaces, des temps et des épaisseurs ; mais nous ne le ferons pas. Le trait essentiel qui présente un intérêt pour nous est que lorsque ces deux vitesses sont égales, leur rapport est égal à un. Ceci nous dit que $n_A n_B / n_{AB} = c e^{-W/kT}$, comme précédemment, où c contient les sections efficaces, les vitesses et d'autres facteurs indépendants des n .

La chose intéressante est que la vitesse de réaction varie également comme $e^{-\text{constante}/kT}$, bien que la constante ne soit pas la même que celle qui gouverne les concentrations ; l'énergie d'activation A^* est différente de l'énergie W . W gouverne les proportions de A , B , et AB que nous avons à l'équilibre, mais si nous voulons savoir à quelle vitesse $A + B$ se transforme en AB , ce n'est pas une question d'équilibre, et ici dans ce cas une énergie différente, l'énergie d'activation, gouverne la vitesse de réaction par l'intermédiaire d'un facteur exponentiel.

De plus, A^* n'est pas une constante fondamentale comme W . Supposez qu'à la surface de la paroi — ou en certains autres endroits — A et B puissent temporairement se fixer, de telle manière qu'ils puissent se combiner plus facilement. En d'autres termes, nous pouvons trouver un « tunnel » au travers de la colline, ou peut-être une colline moins élevée. Par conservation de l'énergie, lorsque nous avons terminé, nous avons encore formé AB à partir de A et B , ce qui fait que la différence d'énergie W sera tout à fait indépendante de la manière dont la réaction se passe,

mais l'énergie d'activation A^* va dépendre *très fortement* de la manière dont la réaction se passe. C'est pourquoi les vitesses de réactions chimiques sont si sensibles aux conditions extérieures. Nous pouvons changer les vitesses en introduisant une surface d'un type différent, nous pouvons les mettre dans un « autre récipient » et la vitesse sera différente, si cela dépend de la nature de la surface. Où si nous introduisons un troisième type d'objet, cela peut changer la vitesse très fortement; certains objets produisent des modifications énormes dans les vitesses, simplement en changeant un petit peu le A^* – ils sont appelés des *catalyseurs*. Une réaction peut pratiquement ne pas se produire du tout parce que A^* est beaucoup trop grand à la température donnée, mais lorsque nous introduisons cette matière spéciale, le catalyseur, la réaction se produit en fait très rapidement, parce que A^* est diminué.

Incidentement, on rencontre certaines difficultés avec de telles réactions, A plus B , formant AB , parce que nous ne pouvons pas conserver à la fois l'énergie et les quantités de mouvement lorsque nous essayons de fixer deux objets ensemble pour en faire un qui soit plus stable. De ce fait, il nous faut au moins un troisième objet C , aussi la réaction réelle est beaucoup plus compliquée. La vitesse dans un sens contiendra le produit $n_A n_B n_C$, et il peut sembler que notre formule va devenir fausse, mais non! Lorsque nous regardons le taux suivant lequel AB se transforme dans l'autre sens, nous trouvons qu'elle doit aussi entrer en collision avec C , de telle sorte qu'il y a $n_{AB} n_C$ dans le taux inverse; les n se simplifient dans la formule des concentrations à l'équilibre. La loi de l'équilibre (42.9), la première que nous ayons écrite est garantie absolument correcte, quel que soit le mécanisme de la réaction.

42-5 Les lois du rayonnement d'Einstein

Nous nous tournons maintenant vers un cas analogue et intéressant qui se rapporte à la loi du rayonnement du corps noir. Au chapitre précédent, nous avons établi la loi de distribution pour le rayonnement dans une cavité, à la manière de Planck, en considérant le rayonnement d'un oscillateur. L'oscillateur devait avoir une certaine énergie moyenne et puisqu'il oscillait, il émettait de la lumière et continuait de pomper le rayonnement dans la cavité, jusqu'à ce qu'il ait émis suffisamment de rayonnement pour équilibrer l'absorption et l'émission. De cette manière, nous avons trouvé que l'intensité du rayonnement à la fréquence ω était donnée par la formule

$$I(\omega) d\omega = \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar \omega / kT} - 1)} \quad (42.12)$$

Ce résultat contenait l'hypothèse que l'oscillateur qui crée le rayonnement possédait des niveaux d'énergie, définis et également espacés. Nous n'avions pas dit que la lumière devait être un photon ou quelque chose d'analogue. Il n'y avait eu aucune discussion sur la manière dont, lorsqu'un atome passe d'un niveau à un autre, l'énergie doit sortir en unité d'énergie, $\hbar \omega$, sous forme de lumière. L'idée originale de Planck était que la matière était quantifiée, mais pas la lumière: les oscillateurs matériels ne peuvent pas prendre n'importe quelle énergie, mais doivent la prendre par quantités discrètes. De plus, la difficulté de cette démonstration était qu'elle était en partie classique. Nous avons calculé le taux de rayonnement d'un oscillateur selon la physique classique; puis nous nous étions retournés et avons dit, « Non, cet oscillateur possède beaucoup de niveaux d'énergie ». Ainsi progressivement, afin de trouver le résultat correct, le résultat complet de mécanique quantique, il y eut un long développement qui trouva son point culminant dans la mécanique quantique de 1927. Mais entre-temps, Einstein essaya de transformer le point de vue de Planck, selon lequel seuls les oscillateurs

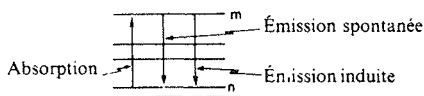


Fig. 42-2. Transitions entre deux niveaux d'énergie d'un atome.

de matière étaient quantifiés, en l'idée que la lumière était réellement formée de photons et pouvait être considérée d'une certaine manière comme formée de particules d'énergie $h\nu$. De plus, Bohr avait montré que *tout* système d'atomes possède des niveaux d'énergie, mais ils ne sont pas nécessairement également espacés comme dans l'oscillateur de Planck. Et ainsi, il devient nécessaire de redéfinir ou au moins de rediscuter la loi du rayonnement d'un point de vue plus complet en mécanique quantique.

Einstein supposa que la formule finale de Planck était correcte, et il utilisa cette formule pour obtenir certaines informations nouvelles, inconnues auparavant, sur l'interaction du rayonnement et de la matière. Son argumentation se présente comme suit : Considérons deux niveaux d'énergie quelconques parmi tous ceux d'un atome, par exemple le niveau m et le niveau n , (Fig. 42-2). Einstein proposa que lorsqu'un tel atome reçoit de la lumière à la fréquence correcte, il peut absorber un photon de lumière et effectuer une transition de l'état n à l'état m , et que la probabilité que ceci se produise par seconde dépend des deux niveaux, bien sûr, mais est *proportionnelle aussi à l'intensité de la lumière* envoyée sur l'atome. Appelons B_{nm} la constante de proportionnalité, simplement pour nous rappeler que ceci n'est pas une constante universelle de la nature, mais dépend des deux niveaux particuliers choisis : certains niveaux sont faciles à exciter ; certains autres sont difficiles à exciter. Quelle est maintenant la formule qui va nous donner le taux d'émission de m vers n ? Einstein proposa qu'elle devait contenir deux parties. Premièrement, même s'il n'y a pas de lumière présente, un atome dans un état excité a certaines chances de tomber vers l'état fondamental en émettant un photon ; nous appelons cela *l'émission spontanée*. C'est semblable à l'idée qu'un oscillateur ayant une certaine quantité d'énergie, même en physique classique, ne conserve pas cette énergie, mais la perd par rayonnement. Ainsi l'analogie du rayonnement spontané d'un système classique est que si l'atome est dans un état excité, il a une certaine probabilité A_{mn} , qui dépend à nouveau des niveaux d'énergie, de tomber de m vers n , et cette probabilité est indépendante de la présence de la lumière sur cet atome. Mais Einstein continua, et par comparaison avec la théorie classique et par d'autres arguments, conclut que l'émission était également influencée par la présence de lumière – que lorsque de la lumière à la fréquence correcte est envoyée sur un atome, il aura un taux supplémentaire d'émission d'un photon proportionnel à l'intensité de la lumière, avec une constante de proportionnalité B_{mn} . Plus tard, si nous établissons que ce coefficient est nul, alors nous établirons qu'Einstein avait tort. Bien entendu nous trouverons qu'il avait raison.

Ainsi Einstein supposa qu'il y avait trois types de processus : une absorption proportionnelle à l'intensité de la lumière, une émission proportionnelle à l'intensité de la lumière, appelée *émission induite*, ou quelquefois *émission stimulée*, et une émission spontanée indépendante de la lumière.

Supposons maintenant que nous ayons, en équilibre à la température T , un certain nombre d'atomes N_n dans l'état n et un autre nombre N_m dans l'état m . Le nombre total d'atomes allant de n vers m est le nombre de ceux dans l'état n ,

que multiplie le taux par seconde que, si l'un d'entre eux est en n , il aille en m . Ainsi nous avons une formule pour le nombre de ceux qui vont aller de n en m par seconde:

$$R_{n \rightarrow m} = N_n B_{nm} I(\omega). \quad (42.13)$$

Le nombre des atomes qui vont descendre de m en n est exprimé de la même manière, comme le nombre N_m de ceux en m , que multiplie la chance par seconde que chacun descende vers n . Cette fois-ci notre expression est

$$R_{m \rightarrow n} = N_m [A_{mn} + B_{mn} I(\omega)]. \quad (42.14)$$

Nous supposons maintenant qu'à l'équilibre thermique le nombre d'atomes allant vers le haut doit être égal au nombre d'atomes descendant. C'est une des manières, au moins, par laquelle le nombre d'atomes sera certainement constant à chaque niveau*. Ainsi nous considérons les deux taux comme égaux à l'équilibre. Mais nous avons un autre élément d'information: nous savons quelle est l'importance de N_m en comparaison de N_n - leur rapport étant $e^{-(E_m - E_n)/kT}$. Alors Einstein supposa que la seule lumière provoquant les transitions de n vers m est la lumière qui a la fréquence correspondant à la différence d'énergie, de telle sorte que $E_m - E_n = h\omega$ dans toutes nos formules. Alors

$$N_m = N_n e^{-h\omega/kT}. \quad (42.15)$$

Si donc nous écrivons que les deux taux sont égaux: $N_n B_{nm} I(\omega) = N_m [A_{mn} + B_{mn} I(\omega)]$, et divisons par N_m , nous obtenons

$$B_{nm} I(\omega) e^{h\omega/kT} = A_{mn} + B_{mn} I(\omega). \quad (42.16)$$

Par cette équation, nous pouvons calculer $I(\omega)$. C'est simplement

$$I(\omega) = \frac{A_{mn}}{B_{nm} e^{h\omega/kT} - B_{mn}}. \quad (42.17)$$

Mais Planck nous avait déjà dit que cette formule devait être (42.12). De ce fait, nous pouvons déduire quelque chose: Premièrement que B_{nm} doit être égal à B_{mn} , puis que sinon nous ne pouvons obtenir le facteur ($e^{h\omega/kT} - 1$). Ainsi Einstein découvrit certaines choses qu'il ne savait pas comment calculer, à savoir *que la probabilité d'émission induite et la probabilité d'absorption devaient être égales*. Ceci est intéressant. Et de plus, afin de faire s'accorder (42.17) et (42.12),

$$A_{mn}/B_{mn} \text{ doit être égal à } h\omega^3/\pi^2 c^2. \quad (42.18)$$

Si donc nous connaissons, par exemple, le taux d'absorption pour un niveau donné, nous pouvons déduire le taux d'émission spontanée et le taux d'émission induite ou toute combinaison de ces taux.

C'est le plus loin qu'Einstein ou quiconque d'autre pouvait aller en utilisant de tels arguments. Pour effectivement calculer le taux d'émission spontanée absolu ou les autres taux pour une transition atomique particulière, il faut bien sûr une connaissance du mécanisme de l'atome, appelée électrodynamique quantique, qui ne fut découverte que onze ans plus tard. Ce travail d'Einstein fut réalisé en 1916.

* Ceci n'est pas la seule manière par laquelle nous pouvons maintenir constant le nombre d'atomes dans les différents niveaux, mais c'est la manière effectivement réalisée par l'expérience. L'hypothèse que chaque processus à l'équilibre thermique est équilibré par son opposé exact, est appelé le *principe du bilan détaillé*.

La possibilité d'une émission induite a aujourd'hui trouvé des applications intéressantes. S'il y a de la lumière, elle va tendre à induire les transitions vers le bas. La transition ajoute alors son $\hbar\omega$ à l'énergie lumineuse disponible, s'il y avait certains atomes se trouvant dans l'état supérieur. Nous pouvons maintenant faire en sorte que par des méthodes non thermiques, nous ayons un gaz dans lequel le nombre des atomes à l'état m est bien plus élevé que le nombre des atomes à l'état n . Ceci est très éloigné de l'équilibre, et n'est donc pas représenté par la formule $e^{-\hbar\omega/kT}$, qui concerne l'équilibre. Nous pouvons même faire en sorte que le nombre d'atomes dans l'état supérieur soit très grand, tandis que le nombre dans l'état inférieur est pratiquement nul. Alors la lumière qui possède la fréquence correspondant à la différence d'énergie $E_m - E_n$ ne sera pas fortement absorbée, parce qu'il n'y a pas beaucoup d'atomes dans l'état n pour l'absorber. D'un autre côté, lorsque cette lumière est présente, elle va induire l'émission à partir de cet état supérieur! Si donc nous avons un grand nombre d'atomes à l'état supérieur, il y aura une sorte de réaction en chaîne, dans laquelle, au moment où les atomes commencent à émettre, davantage seront provoqués dans leur émission, et l'ensemble de ces atomes descendra vers l'état inférieur. C'est ce qu'on appelle un *laser*, ou dans le cas de l'infra-rouge lointain, un *maser*.

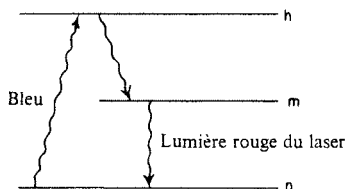


Fig. 42-3. En excitant, par exemple avec de la lumière bleue, un état h plus élevé, qui peut émettre un photon et laisser les atomes dans l'état m , le nombre d'atomes dans l'état m peut devenir suffisant pour amorcer l'action laser.

Diverses astuces peuvent être utilisées pour obtenir les atomes dans l'état m . Il peut y avoir des niveaux d'énergie plus élevés vers lesquels les atomes peuvent aller si nous envoyons un intense faisceau de lumière de haute fréquence. De ces niveaux d'énergie plus élevés, ils peuvent redescendre en cascade, en émettant différents photons, jusqu'à ce qu'ils soient fixés dans l'état m . S'ils tendent à rester dans l'état m sans émettre, l'état est appelée *métastable*. Et puis ils sont tous désexcités ensemble par les émissions induites. Un aspect technique supplémentaire – si nous plaçons ce système dans une boîte ordinaire, il émettra spontanément dans tant de directions différentes en comparaison avec l'effet induit, que nous serons toujours en difficulté. Mais nous pouvons augmenter l'effet induit, augmenter son efficacité en plaçant des miroirs presque parfaitement réfléchissants de chaque côté de la boîte, de telle sorte que la lumière qui est émise possède une autre chance, et une autre chance, et une autre chance encore d'induire l'émission. Bien que les miroirs soient presque à cent pour cent réfléchissants, une certaine transmission est possible et un peu de lumière sort. A la fin, bien sûr, selon le principe de la conservation de l'énergie, toute la lumière sort dans une direction bien droite et uniforme, ce qui est la cause de ces faisceaux de lumière intenses qui sont possibles aujourd'hui avec les *lasers*.

Diffusion

43-1 Collisions entre molécules

43-2 Le libre parcours moyen

43-3 La vitesse d'entraînement

43-4 Conductivité ionique

43-5 Diffusion moléculaire

43-6 Conductivité thermique

43-1 Collisions entre molécules

Nous n'avons considéré jusqu'à présent que les mouvements moléculaires dans un gaz qui est à l'équilibre thermique. Nous allons maintenant examiner ce qui se passe lorsque les choses sont près, mais pas exactement à l'équilibre. Dans un état loin de l'équilibre, les choses sont extrêmement compliquées, mais dans les états très proches de l'équilibre nous pouvons facilement trouver ce qui se passe. Pour voir ce qui se passe, nous devons cependant revenir à la théorie cinétique. La mécanique statistique et la thermodynamique s'occupent de l'état d'équilibre, mais loin de l'équilibre nous pouvons seulement analyser ce qui se passe pour ainsi dire atome par atome.

Comme exemple simple d'un cas de non-équilibre, nous considérons la diffusion des ions dans un gaz. Supposez que dans un gaz, il y ait une concentration relativement petite d'ions – de molécules chargées électriquement. Si nous appliquons un champ électrique au gaz, alors chaque ion subira une force qui est différente des forces exercées sur les molécules neutres du gaz. S'il n'y avait pas d'autres molécules présentes, un ion aurait une accélération constante jusqu'à ce qu'il ait atteint la paroi du récipient. Mais à cause de la présence des autres molécules, il ne peut le faire; sa vitesse n'augmente que jusqu'à ce qu'il rencontre une autre molécule et qu'il perde sa quantité de mouvement. Il repart, prenant à nouveau de la vitesse, puis il perd à nouveau sa quantité de mouvement. Le résultat net est qu'un ion suit une trajectoire aléatoire, mais avec un mouvement résultant dans la direction de la force électrique. Nous verrons que l'ion est animé d'une « dérive » moyenne dont la vitesse moyenne est proportionnelle au champ électrique – plus le champ est fort, plus vite il se déplace. Tant que le champ est appliqué, et tant que l'ion se déplace, il est, bien sûr, dans une situation qui n'est *pas* à l'équilibre thermique, il essaye d'atteindre l'équilibre, c'est-à-dire l'extrémité du récipient. Par l'intermédiaire de la théorie cinétique, nous pouvons calculer la vitesse d'entraînement.

Il se trouve qu'avec nos capacités mathématiques présentes, nous ne pouvons pas calculer *précisément* ce qui se passe, mais nous pouvons obtenir des résultats approchés qui montreront toutes les caractéristiques essentielles du phénomène. Nous pouvons trouver comment les choses vont varier avec la pression,

avec la température, etc., mais il ne sera pas possible d'obtenir les facteurs numériques corrects inclus dans tous ces termes. Nous ne nous préoccupons donc pas, dans nos démonstrations, des valeurs précises des facteurs numériques. Ils ne peuvent être obtenus que par un traitement mathématique bien plus élaboré.

Avant de considérer ce qui se passe dans des situations qui ne sont pas à l'équilibre, nous devons regarder d'un petit peu plus près ce qui se passe dans un gaz à l'équilibre thermique. Nous devons connaître par exemple ce que vaut le temps moyen entre deux collisions successives d'une molécule.

Toute molécule subit une suite de collisions avec d'autres molécules – bien sûr, d'une manière aléatoire. Une molécule particulière subira pendant une longue période de temps T , un certain nombre N , de collisions. Si nous doublons la longueur de l'intervalle de temps, il y aura deux fois plus de collisions. Le nombre de collisions est donc proportionnel au temps T . Nous aimerions écrire cela ainsi :

$$N = T/\tau \quad (43.1)$$

Nous avons écrit la constante de proportionnalité sous la forme de $1/\tau$, où τ a les dimensions d'un temps. La constante τ est le temps moyen entre les collisions. Supposez, par exemple, que dans une heure il y ait 60 collisions; alors τ vaut une minute. Nous dirons que τ (une minute) est le *temps moyen* entre les collisions.

Nous aimerions souvent poser la question suivante: « Quelle est la *chance* qu'une molécule subisse une collision pendant le *petit intervalle* de temps dt suivant? » La réponse que nous pouvons comprendre intuitivement est dt/τ . Mais essayons de proposer un argument un peu plus convaincant. Supposons qu'il y ait un grand nombre N de molécules. Combien d'entre elles subiront une collision dans l'intervalle de temps dt suivant? Si nous sommes à l'équilibre, rien ne change *en moyenne* avec le temps. Ainsi N molécules attendant le temps dt subiront le même nombre de collisions qu'une molécule attendant pendant de temps Ndt . Nous connaissons ce nombre qui vaut Ndt . Ainsi le nombre de chocs des N molécules est Ndt/τ pendant un temps dt , et la chance, ou probabilité, d'un choc pour n'importe quelle molécule est $1/N$ fois plus petit, ou $(1/N)(Ndt/\tau) = dt/\tau$, comme nous l'avions estimé précédemment. C'est-à-dire que la fraction des molécules qui subira une collision dans le temps dt est dt/τ . Pour prendre un exemple, si τ vaut une minute, la fraction des particules qui subissent des collisions en une seconde est $1/60$. Cela signifie, bien sûr, que $1/60$ des molécules se trouvent suffisamment proches de ce qu'elles vont frapper pour que *leurs* collisions s'effectuent dans la seconde suivante.

Lorsque nous disons que τ , le temps moyen entre collisions, vaut une minute, nous ne voulons pas dire que toutes les collisions vont se passer à des instants séparés exactement par une minute. On ne peut pas dire qu'une molécule particulière subisse une collision, attende une minute puis subisse une autre collision. Le temps entre collisions successives est très variable. Nous n'en aurons pas besoin pour la suite de notre étude, mais nous pouvons faire une petite digression pour répondre à la question: « Quels *sont* les temps entre les collisions? » Nous savons que dans le cas ci-dessus, le temps *moyen* vaut une minute, mais nous aimerions savoir par exemple quelle est la chance que nous n'obtenions aucune collision en deux minutes?

Nous devons trouver la réponse à la question générale: « Quelle est la probabilité qu'une molécule se déplace pendant un temps t sans subir de collisions? » A un certain instant arbitraire – que nous appelons $t = 0$ – nous commençons à regarder une molécule particulière. Quelle est

la chance qu'elle avance jusqu'à l'instant t sans cogner une autre molécule? Pour calculer la probabilité, nous observons ce qui arrive à l'ensemble N_0 des molécules dans un récipient. Après avoir attendu un temps t , certaines d'entre elles auront subi des collisions. Soit $N(t)$ le nombre de celles qui n'ont *pas* subi de collisions jusqu'au temps t . $N(t)$ est bien sûr inférieur à N_0 . Nous pouvons trouver $N(t)$ parce que nous savons comment il varie avec le temps. Si nous savons que $N(t)$ molécules sont arrivées jusqu'au temps t , $N(t + dt)$, le nombre de celles qui arrivent jusqu'au temps $t + dt$, est *inférieur* à $N(t)$ du nombre de celles qui subiront des collisions dans le temps dt . Le nombre de celles qui subissent des collisions dans le temps dt – nous l'avons écrit ci-dessus en fonction du temps moyen τ – vaut $dN = N(t) dt/\tau$. Nous avons l'équation

$$N(t + dt) = N(t) - N(t) \frac{dt}{\tau}. \quad (43.2)$$

La quantité sur la gauche $N(t + dt)$, peut être écrite selon les définitions des mathématiques sous la forme $N(t) + (dN/dt)dt$. En faisant cette substitution l'équation (43.2) donne

$$\frac{dN(t)}{dt} = - \frac{N(t)}{\tau}. \quad (43.3)$$

Le nombre de celles qui vont être perdues dans l'intervalle dt est proportionnel au nombre de celles encore présentes et inversement proportionnel au temps de vie moyen τ . L'équation (43.3) est facilement intégrée, si nous l'écrivons sous la forme

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = - \frac{dt}{\tau}. \quad (43.4)$$

Chaque côté est une différentielle parfaite, ainsi l'intégrale vaut

$$\ln N(t) = -t/\tau + (\text{une constante}) \quad (43.5)$$

ce qui est la même chose que

$$N(t) = (\text{constante}) e^{-t/\tau} \quad (43.6)$$

Nous savons que la constante doit être N_0 , le nombre total de molécules présentes, puisque toutes commencent au temps $t=0$ d'attendre leur «prochaine» collision. Nous pouvons écrire notre résultat sous la forme

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}. \quad (43.7)$$

Si nous voulons la *probabilité* de ne pas subir de collisions, $P(t)$, nous pouvons l'obtenir en divisant $N(t)$ par N_0 , ainsi

$$P(t) = e^{-t/\tau}. \quad (43.8)$$

Notre résultat est: la probabilité qu'une molécule particulière survive au temps t sans collision est $e^{-t/\tau}$, où τ est le temps moyen entre les collisions. La probabilité commence à 1 (ou certitude) pour $t=0$, et diminue au fur et à mesure que t devient de plus en plus grand. La probabilité que la molécule évite une collision pendant un temps égal à τ est $e^{-1} = 0,37...$ La chance est inférieure à un demi, qu'elle passe un temps entre les collisions plus grand que le

temps de vie moyen. Ceci est correct, parce qu'il y a suffisamment de molécules qui se déplacent sans collision pour des temps beaucoup plus *longs* que le temps moyen entre collisions, de telle sorte que le temps moyen peut encore être τ .

Nous avons initialement défini τ comme étant le temps moyen *entre* les collisions. Le résultat que nous avons obtenu dans l'équation (43.7) dit que le temps moyen à partir d'un instant de départ *arbitraire* jusqu'à la collision *suivante* vaut également τ . Nous pouvons démontrer ce fait assez surprenant de la manière suivante. Le nombre de molécules qui subissent leur collision *suivante* dans l'intervalle de temps dt au temps t après un temps initial arbitrairement choisi est $N(t)dt/\tau$. Leur « temps jusqu'à la collision suivante » est bien sûr exactement t . Le « temps moyen jusqu'à la nouvelle collision » est obtenu de la manière habituelle :

$$\text{Temps moyen jusqu'à la nouvelle collision} = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \frac{N(t)dt}{\tau}.$$

Utilisant $N(t)$ obtenu dans (43.7) et évaluant l'intégrale, nous trouvons en fait que τ est le temps moyen à partir de *n'importe* quel instant jusqu'à la collision suivante.

43-2 Le libre parcours moyen

Une autre manière de décrire les collisions moléculaires est de parler non pas du *temps* entre les collisions mais de la *distance* que les particules parcourent entre les collisions. Si nous disons que le temps moyen entre les collisions est τ , et que les molécules possèdent une vitesse moyenne v , nous pouvons prévoir que la *distance* moyenne entre collisions, que nous appellerons l , est simplement le produit de τ et de v . Cette distance entre collisions est habituellement appelée le *libre parcours moyen*.

$$\text{Libre parcours moyen } l = \tau v. \quad (43.9)$$

Dans ce chapitre, nous ne ferons pas très attention au *type de moyenne* que nous envisagerons dans chaque cas particulier. Les différentes moyennes possibles – la moyenne arithmétique, la moyenne quadratique, etc. – sont toutes presque égales et ne diffèrent que par des facteurs qui sont voisins de un. Puisque, de toutes manières, il faut une analyse détaillée pour obtenir les facteurs numériques corrects, nous n'avons pas à nous préoccuper du type de moyenne dont nous avons besoin pour un point particulier. Nous devons également avertir le lecteur que les symboles algébriques que nous utiliserons pour certaines de ces quantités physiques (par exemple l pour le libre parcours moyen) ne suivent pas une convention généralement acceptée, essentiellement parce qu'il n'y a pas d'accord général.

De même que la chance qu'une molécule subisse une collision dans un court intervalle de temps dt est égale à dt/τ , la chance qu'elle subisse une collision en parcourant une distance dx vaut dx/l . Suivant le même type de raisonnement que ci-dessus, le lecteur peut démontrer que la probabilité qu'une molécule puisse se déplacer au moins d'une distance x avant de subir la collision suivante est $e^{-x/l}$.

La distance moyenne qu'une molécule parcourt avant la collision avec une autre molécule – le libre parcours moyen l – dépendra du nombre de molécules qui se trouvent autour et de la « dimension » des molécules, c'est-à-dire de la taille de la cible qu'elles représentent. La « dimension » effective de la cible dans une collision est habituellement décrite par une « section efficace de collision », la même notion qui est utilisée en physique nucléaire, ou dans les problèmes de diffusion de la lumière.

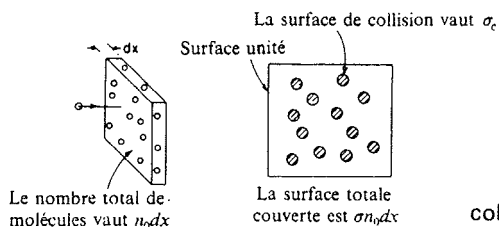


Fig. 43-1. Section efficace de collision.

Considérons une particule en mouvement, qui parcourt une distance dx au travers d'un gaz qui possède n_0 centres diffuseurs (molécules) par unité de volume (Fig. 43-1). Si nous considérons chaque unité de surface perpendiculaire à la direction du mouvement de la particule que nous avons sélectionnée, nous allons trouver qu'il y a $n_0 dx$ molécules. Si chacune présente une surface de collision effective ou, comme on dit habituellement, une « section efficace de collision » σ_c , la surface totale couverte par les centres diffuseurs est $\sigma_c n_0 dx$.

Par « section efficace de collision » nous voulons dire la surface à l'intérieur de laquelle le centre de notre particule doit être situé si elle doit cogner une molécule particulière. Si les molécules étaient de petites sphères (une description classique) nous nous attendrions à ce que $\sigma_c = \pi(r_1 + r_2)^2$, où r_1 et r_2 sont les rayons des deux objets qui se cognent. La chance que notre particule subisse une collision est égale au rapport de la surface couverte par les molécules qui diffusent à la surface totale, qui a été prise égale à l'unité. Ainsi la probabilité de collision durant le parcours dx vaut simplement $\sigma_c n_0 dx$:

$$\text{Chance d'une collision sur } dx = \sigma_c n_0 dx. \quad (43.10)$$

Nous avons vu ci-dessus que la chance d'une collision sur dx peut être également écrite en fonction du libre parcours moyen l sous la forme dx/l . Comparant ceci avec (43.1), nous pouvons relier le libre parcours moyen à la section efficace de collision :

$$\frac{1}{l} = \sigma_c n_0, \quad (43.11)$$

et il est plus facile de se la rappeler si nous l'écrivons

$$\sigma_c n_0 l = 1. \quad (43.12)$$

On peut considérer que cette formule veut dire qu'il peut y avoir une collision en moyenne lorsque la particule se déplace d'une distance l sur laquelle les molécules qui diffusent *peuvent* exactement couvrir la surface totale. Dans un volume cylindrique de longueur l et de base une surface unité, il y a $n_0 l$ centres diffuseurs ; si chacun possède une surface σ_c , la surface totale couverte est $n_0 l \sigma_c$, qui est exactement une unité de surface. Toute la surface n'est *pas* couverte, bien sûr parce que certaines molécules sont partiellement cachées derrière d'autres. C'est pourquoi certaines molécules vont plus loin que l avant de subir une collision, c'est simplement *en moyenne* que les molécules ont subi une collision au moment où elles ont parcouru la distance l . A partir des mesures du libre parcours moyen l , nous pouvons déterminer la section efficace de diffusion σ_c , et comparer le résultat avec des calculs fondés sur les théories détaillées de la structure atomique. Mais ceci est un sujet différent ! Aussi allons-nous retourner au problème des états hors d'équilibre.

43-3 La vitesse d'entraînement

Nous voulons décrire ce qui se passe pour une molécule ou pour plusieurs molécules qui sont différentes d'une certaine façon de la grande majorité des molécules dans un gaz. Nous nous référons à la « majorité » des molécules comme les molécules « environnantes », et nous appellerons les molécules qui sont différentes des molécules environnantes, des molécules « spéciales », ou pour tout dire des molécules S . Une molécule peut être spéciale pour diverses raisons: Elle peut être plus lourde que les molécules environnantes. Elle peut être d'une espèce chimique différente. Elle peut avoir une charge électrique – c'est-à-dire être un ion dans un environnement de molécules non chargées. A cause de leurs masses ou de leurs charges différentes, une molécule S peut subir des forces qui sont différentes des forces sur une molécule environnante. En considérant ce qui arrive à cette molécule S , nous pouvons comprendre les effets fondamentaux qui interviennent de manière similaire dans de nombreux phénomènes différents. Pour en citer quelques-uns: la diffusion des gaz, les courants électriques dans les piles, la sédimentation, la séparation centrifuge, etc.

Nous commençons par nous concentrer sur le processus de base: une molécule S dans un gaz environnant est soumise à l'action d'une certaine force particulière F (qui peut être par exemple gravitationnelle, ou électrique) et *de plus* à celles de forces moins particulières qui sont dues aux collisions avec les molécules environnantes. Nous aimerions décrire le comportement *général* de la molécule S . *Dans le détail*, elle file dans tous les sens au fur et à mesure qu'elle cogne d'autres molécules. Mais si nous la considérons avec attention, nous voyons qu'elle avance au total dans la direction de la force F . Nous disons qu'une *dérive* s'est superposée à son mouvement au hasard. Nous voudrions savoir quelle est la vitesse de cette dérive – sa *vitesse d'entraînement* – due à la force F .

Si nous observons une molécule S à partir d'un certain instant nous pouvons prévoir qu'elle est quelque part entre deux collisions. En plus de la vitesse qui lui était restée après sa dernière collision, elle acquiert une certaine composante de vitesse due à la force F . Dans un court intervalle de temps (en moyenne dans un temps τ) elle va subir une collision, et repart sur une nouvelle trajectoire. Elle aura une nouvelle vitesse au départ, mais la même accélération provoquée par F .

Pour rester simple pour le moment, nous supposons que, après chaque collision, notre molécule S refait un départ tout à fait « nouveau ». C'est-à-dire qu'elle ne garde aucun souvenir de son accélération passée due à la force F . Ceci peut être une hypothèse raisonnable si notre molécule S est beaucoup plus légère que les molécules environnantes, mais ce n'est certainement pas valable en général. Nous discuterons plus tard une hypothèse améliorée.

Pour le moment, donc, notre hypothèse est que la molécule S repart à l'issue de chaque collision avec une vitesse qui peut être dirigée dans n'importe quelle direction avec une égale probabilité. La vitesse de départ la conduira également dans toutes les directions et ne contribuera à aucun mouvement résultant, de telle sorte que nous n'avons pas à nous préoccuper davantage de sa vitesse initiale après une collision. En plus de son mouvement aléatoire, chaque molécule S aura, à n'importe quel moment, une vitesse supplémentaire dans la direction de la force F , qu'elle a acquise *depuis* la dernière collision. Quelle est la valeur *moyenne* de cette partie de la vitesse? C'est simplement l'accélération F/m (où m est la masse de la molécule S) que multiplie le temps *moyen* écoulé *depuis* la dernière collision. Le temps moyen *depuis* la dernière collision doit être le même que le temps moyen *jusqu'à* la collision *suivante* que nous avons appelé

τ , ci-dessus. La vitesse *moyenne* due à F est, bien sûr, ce qu'on appelle la vitesse d'entraînement. Ainsi nous avons la relation

$$V_{\text{entraînement}} = \frac{F\tau}{m} \quad (43.13)$$

Cette relation de base est au cœur de notre sujet. Il peut y avoir certaine complication dans la détermination de τ , mais le processus de base est défini par l'équation (43.13).

Vous remarquerez que la vitesse d'entraînement est *proportionnelle* à la force. Il n'y a pas, malheureusement, de nom utilisé de manière générale pour dénommer la constante de proportionnalité. Des noms différents ont été utilisés pour chaque type de force différent. Si dans un problème électrique la force est écrite comme la charge que multiplie le champ électrique $F = qE$, la constante de proportionnalité entre la vitesse et le champ électrique E est habituellement appelée la « mobilité ». Malgré la possibilité de certaines confusions, nous utiliserons le terme de *mobilité* pour le rapport de la vitesse de dérive à la force pour *n'importe quelle* force. Nous écrirons en général

$$v_{\text{entraînement}} = \mu E, \quad (43.14)$$

et nous appellerons μ la mobilité. Nous avons à partir de l'équation (43.13)

$$\mu = \tau/m. \quad (43.15)$$

La mobilité est proportionnelle au temps moyen entre collisions (il y a moins de collisions pour la ralentir) et inversement proportionnelle à la masse (plus d'inertie signifie moins de vitesse acquise entre les collisions).

Obtenir le coefficient numérique correct dans l'équation (43.13), qui est correct tel qu'il est donné, nécessite un certain soin. Sans avoir l'intention de semer la confusion, nous devons encore insister sur le fait que les arguments sont d'une subtilité qui ne peut être appréciée que par une étude attentive et détaillée. Pour montrer qu'il y a des difficultés, malgré les apparences, nous referons à nouveau la démonstration qui a conduit à l'équation (43.13) selon une manière raisonnable *mais fausse* (c'est la manière d'ailleurs que l'on rencontre dans de nombreux ouvrages à l'heure actuelle!).

Nous aurions pu dire: Le temps moyen entre collisions est τ . Après une collision, la particule part avec une vitesse au hasard, mais elle acquiert une vitesse supplémentaire entre les collisions, qui est égale à l'accélération que multiplie le temps. Puisqu'il faut le temps τ pour arriver à la collision *suivante*, elle arrive à cet endroit avec la vitesse $(F/m)\tau$. Au début de la collision, elle avait une vitesse nulle. Ainsi, entre les deux collisions, elle a en moyenne une vitesse moitié de la vitesse finale, la vitesse de dérive moyenne est donc $\frac{1}{2}F\tau/m$. (Faux!) Ce résultat est faux et le résultat de l'équation (43.13) est correct, bien que les arguments puissent sembler à première vue également satisfaisants. La raison pour laquelle le second résultat est faux, est quelque peu subtile et est liée à ceci: Le raisonnement est mené comme si toutes les collisions étaient séparées par le temps moyen τ . En fait, certains de ces temps sont plus courts et d'autres sont plus longs que le temps moyen. Les temps plus courts apparaissent *plus souvent*, mais contribuent *moins* à la vitesse de dérive, parce qu'ils ont moins de chance de « laisser vraiment aller la particule ». Si l'on prend correctement en compte la *distribution* des temps libres entre collisions, on peut montrer qu'il ne doit pas y avoir le facteur $1/2$ qui était obtenu à partir de la deuxième démonstration. L'erreur a été faite en essayant de relier par un raisonnement simple la vitesse *moyenne finale* à la vitesse moyenne elle-même.

Cette relation n'est pas simple, aussi vaut-il mieux se concentrer sur ce qui est demandé : la vitesse moyenne elle-même. La première démonstration que nous avons donnée détermine la vitesse moyenne directement – et correctement ! Mais nous pouvons peut-être voir pourquoi nous ne devons pas en général essayer d'obtenir exactement tous les coefficients numériques corrects dans nos démonstrations élémentaires !

Revenons maintenant à notre hypothèse simplificatrice que chaque collision fait perdre toute mémoire du mouvement passé – qu'un nouveau départ est pris après chaque collision. Supposez que notre molécule S soit un objet lourd dans un environnement de molécules légères. Notre molécule S ne perdra pas sa quantité de mouvement « vers l'avant » dans chaque collision. Il faudra de nombreuses collisions avant que son mouvement soit rendu à nouveau « aléatoire ». Nous supposons au lieu de cela qu'à chaque collision – dans chaque intervalle de temps τ en moyenne – elle perd une certaine fraction de sa quantité de mouvement. Nous ne résoudrons pas les détails, mais simplement dirons que le résultat revient à remplacer τ , le temps moyen entre collisions, par un temps nouveau – et plus long – qui correspond au « temps moyen d'oubli », c'est-à-dire au temps moyen pour oublier sa quantité de mouvement vers l'avant. Avec une telle interprétation de τ , nous pouvons utiliser notre formule (43.15) dans des cas qui ne sont pas aussi simples que nous l'avions supposé au départ.

43-4 Conductivité ionique

Nous allons maintenant appliquer nos résultats à un cas particulier. Supposons que nous ayons un gaz dans un récipient, dans lequel il y a également certains ions – des atomes ou des molécules avec une charge électrique non nulle. Nous montrons schématiquement la situation sur la Fig. 43-2. Si deux parois opposées du récipient sont des plaques métalliques, nous pouvons les relier aux extrémités d'une pile et ainsi produire un champ électrique dans le gaz. Le champ électrique créera une force sur les ions, qui vont être entraînés vers l'une ou l'autre des plaques. Il en résultera un courant électrique, et le gaz avec ses ions va se comporter comme une résistance. En calculant le flux d'ions à partir de la vitesse d'entraînement, nous pouvons calculer la résistance. Nous demandons précisément : Comment le flux de courant électrique dépend-il de la différence de potentiel V que nous appliquons entre les deux plaques ?

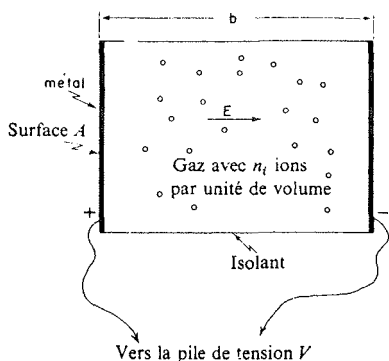


Fig. 43-2. Le courant électrique dans un gaz ionisé.

Nous considérons le cas où notre récipient est une boîte rectangulaire de longueur b et de section A (Fig. 43-2). Si la différence de potentiel, ou la tension, entre les plaques est V , le champ électrique E entre les plaques est V/b . (Le potentiel électrique est le travail réalisé en transportant une charge unité d'une plaque à l'autre. La force sur une charge unité est E . Si E est le même partout entre les plaques, ce qui est une approximation suffisamment bonne pour le moment, le travail réalisé sur une charge unité vaut simplement Eb , ainsi $V = Eb$.) La force particulière sur un ion du gaz est qE , où q est la charge d'un ion. La vitesse de dérive d'un ion est alors μ que multiplie cette force, ou

$$V_{\text{dérive}} = \mu F = \mu q E = \mu q \frac{V}{b}. \quad (43.16)$$

Un courant électrique I est le flux de charge par unité de temps. Le courant électrique vers l'une des plaques est donné par la charge totale des ions qui arrivent à la plaque par unité de temps. Si les ions dérivent vers la plaque avec une vitesse de dérive $v_{\text{dérive}}$, alors ceux qui se trouvent à moins d'une distance ($V_{\text{dérive}} T$) arrivent à la plaque dans le temps T . S'il y a n_i ions par unité de volume, le nombre de ceux qui atteignent la plaque dans le temps T vaut ($n_i \cdot A \cdot v_{\text{dérive}} \cdot T$). Chaque ion transporte la charge q , de telle sorte que

$$\text{Charge collectée pendant } T = q n_i A v_{\text{dérive}} T. \quad (43.17)$$

Le courant I est la charge collectée pendant T divisée par T , ainsi

$$I = q n_i A v_{\text{dérive}}. \quad (43.18)$$

Substituant $v_{\text{dérive}}$ de (43.16), nous avons

$$I = \mu q^2 n_i \frac{A}{b} V. \quad (43.19)$$

Nous trouvons que le courant est proportionnel à la tension, ce qui est simplement la forme de la loi d'Ohm, et la résistance R est l'inverse de la constante de proportionnalité:

$$\frac{1}{R} = \mu q^2 n_i \frac{A}{b}. \quad (43.20)$$

Nous avons une relation entre la résistance et les propriétés moléculaires n_i , q , et μ , qui dépendent à leur tour de m et τ . Si nous connaissons n_i et q à partir de mesures atomiques, une mesure de R peut être utilisée pour déterminer μ , et de μ également τ .

43-5 Diffusion moléculaire

Nous allons considérer maintenant un type différent de problème, et une analyse de caractère différent: la théorie de la diffusion. Supposons que nous ayons un récipient de gaz à l'équilibre thermique, et que nous introduisions une petite quantité de gaz de type différent en un certain endroit dans le récipient. Nous appellerons le gaz original le gaz « environnant » et le nouveau, le gaz « spécial ». Le gaz « spécial » va se répandre au travers

de tout le récipient, mais il se répandra lentement à cause de la présence du gaz environnant. Ce processus lent d'expansion est appelé *diffusion*. La diffusion est contrôlée essentiellement par les chocs entre les molécules du gaz spécial et les molécules du gaz environnant. Après un grand nombre de collisions, les molécules spéciales finissent par se répandre d'une manière plus ou moins homogène au travers de tout le volume. Nous devons prendre garde à ne *pas* confondre la diffusion d'un gaz avec le transport en grande quantité qui peut apparaître à cause d'un courant de convection. D'une manière générale, le mélange de deux gaz se fait par une combinaison de la convection et de la diffusion. Nous nous intéressons maintenant seulement au cas où il n'y a *pas* de « courant de gaz ». Le gaz se répand simplement par les mouvements moléculaires, par la diffusion. Nous voulons calculer à quelle vitesse la diffusion a lieu.

Nous calculons maintenant le *flux* résultant des molécules du gaz « spécial » dû aux mouvements moléculaires. Il n'y aura de flux résultant que lorsqu'il y a une certaine distribution non uniforme de molécules, ou sinon tous les mouvements moléculaires se combineront pour donner en moyenne un flux résultant nul. Considérons d'abord le flux dans la direction x . Pour trouver le flux, nous considérons une surface plane imaginaire perpendiculaire à l'axe des x et nous comptons le nombre de molécules spéciales qui traversent ce plan. Pour obtenir le flux résultant, nous devons compter comme positives les molécules qui traversent dans la direction des x positifs et *soustraire* de ce nombre le nombre de celles qui traversent dans la direction des x négatifs. Comme nous l'avons vu plusieurs fois, le nombre qui traverse une surface dans un temps ΔT est donné par le nombre qui se trouve au début de l'intervalle ΔT dans un volume qui s'étend sur la distance $v\Delta T$ à partir du plan. (Remarquez que v , ici, est la vitesse moléculaire réelle et non pas la vitesse de dérive.)

Nous simplifierons notre calcul en prenant une surface unité. Le nombre de molécules spéciales qui passent de la gauche vers la droite (prenant la direction plus x vers la droite) est $n_- v \Delta T$, où n_- est le nombre de molécules spéciales par unité de volume à gauche (à un facteur 2 près ou quelque chose de ce genre, mais nous ignorons de tels facteurs!). Le nombre qui traverse venant de la droite vers la gauche, est, d'une manière semblable, $n_+ v \Delta T$, où n_+ est la densité des molécules spéciales sur le côté droit du plan. Si nous appelons J le courant moléculaire, qui est le flux résultant de molécules par unité de surface et par unité de temps, nous avons

$$J = \frac{n_- v \Delta T - n_+ v \Delta T}{\Delta T}, \quad (43.21)$$

ou

$$J = (n_- - n_+)v. \quad (43.22)$$

Que devons-nous utiliser pour n_- et n_+ ? Lorsque nous disons « la densité sur la gauche », à quelle *distance* sur la gauche voulons-nous aller? Nous devons choisir la densité à l'endroit où les molécules commencent leur « envol », parce que le nombre qui *commence* de tels voyages est déterminé par le nombre présent à cet endroit. Ainsi par n_- nous devons comprendre la densité à une distance sur la gauche égale au libre parcours moyen l , et par n_+ , la densité à la distance l à droite de notre surface imaginaire.

Il est commode de considérer que la distribution de nos molécules spéciales dans l'espace est décrite par une fonction continue de x , y et z que nous appellerons n_a . Par $n_a(x, y, z)$ nous entendons la densité des molécules spéciales dans un petit élément

de volume centré autour de (x, y, z) . En fonction de n_a nous pouvons exprimer la différence $(n_+ - n_-)$ comme

$$(n_+ - n_-) = \frac{dn_a}{dx} \Delta x = \frac{dn_a}{dx} \cdot 2l. \quad (43.23)$$

Substituant ce résultat dans l'équation (43.22) et négligeant le facteur 2, nous obtenons

$$J_x = -lv \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.24)$$

Nous avons trouvé que le flux des molécules spéciales est proportionnel à la dérivée de la densité, ou à ce qui est quelquefois appelé le « gradient » de la densité.

Il est clair que nous avons fait plusieurs approximations grossières. En plus de divers facteurs deux que nous avons écartés, nous avons utilisé v là où nous aurions dû utiliser v_x , et nous avons supposé que n_+ et n_- se rapportaient à des endroits situés à la distance perpendiculaire l de notre surface, tandis que pour ces molécules qui ne traversent pas perpendiculairement à l'élément de surface, l doit faire correspondre la distance en *oblique* à la surface. Tous ces raffinements peuvent être introduits; le résultat d'une analyse plus précise montre que le terme de droite de l'équation (43.24) doit être multiplié par $1/3$. Ainsi une réponse meilleure est

$$J_x = -\frac{lv}{3} \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.25)$$

Des équations semblables peuvent être écrites pour les courants dans les directions y et z .

Le courant J_x et la densité de gradient dn_a/dx peuvent être mesurés par des observations macroscopiques. Leur rapport déterminé expérimentalement est appelé le « coefficient de diffusion » D . C'est-à-dire,

$$J_x = -D \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.26)$$

Nous aurons été capables de montrer que pour un gaz nous prévoyons que

$$D = \frac{1}{3}lv. \quad (43.27)$$

Jusqu'à présent dans ce chapitre nous avons considéré deux processus distincts: *mobilité*, la dérive des molécules due à des forces « extérieures »; et à la *diffusion*, la dispersion déterminée simplement par les forces internes, les collisions au hasard. Il y a cependant une relation entre elles, puisque tous les deux dépendent fondamentalement des mouvements thermiques, et le libre parcours moyen l apparaît dans les deux calculs.

Si, dans l'équation (43.25), nous substituons $l = v\tau$ et $\tau = \mu m$, nous avons

$$J_x = -\frac{1}{3}mv^2\mu \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.28)$$

Mais mv^2 ne dépend que de la température. Nous rappelons que

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT, \quad (43.29)$$

ainsi

$$J_x = -\mu kT \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.30)$$

Nous trouvons que D , le coefficient de *diffusion*, vaut simplement kT que multiplie μ , le coefficient de *mobilité*:

$$D = \mu kT. \quad (43.31)$$

Et il se trouve que le coefficient numérique dans (43.31) est correct – il n'est pas nécessaire d'injecter des facteurs supplémentaires pour compenser nos hypothèses approximatives. Nous pouvons montrer, en fait, que (43.31) doit *toujours* être correct – même dans des cas compliqués (par exemple, le cas d'une suspension dans un liquide) où les détails de nos calculs simples ne s'appliqueraient pas du tout.

Pour montrer que (43.31) doit être en général correct, nous l'établirons d'une manière différente, en utilisant nos principes de base de mécanique statistique. Imaginez une configuration pour laquelle il y ait un gradient de molécules «spéciales», et que nous ayons un courant de diffusion proportionnel au gradient de densité, selon l'équation (43.26). Nous appliquons maintenant un champ de force dans la direction x , de telle sorte que chaque molécule spéciale subisse la force F . Selon la *définition* de la mobilité μ , on aura une vitesse de dérive donnée par

$$v_{\text{dérive}} = \mu F. \quad (43.32)$$

Selon nos raisonnements habituels, le *courant de dérive* (le nombre *résultant* de molécules qui traversent l'unité de surface dans l'unité de temps) sera

$$J_{\text{dérive}} = n_a v_{\text{dérive}}, \quad (43.33)$$

ou

$$J_{\text{dérive}} = n_a \mu F. \quad (43.34)$$

Nous *ajustons* maintenant la force F , pour que le courant de dérive dû à F , *équilibre* exactement la diffusion, de telle sorte qu'il n'y ait *pas de flux résultant* de nos molécules spéciales. Nous avons $J_x + J_{\text{dérive}} = 0$, ou

$$D \frac{dn_a}{dx} = n_a \mu F. \quad (43.35)$$

Dans les conditions «d'équilibre» nous trouvons un gradient de densité constant (avec le temps) donné par

$$\frac{dn_a}{dx} = \frac{n_a \mu F}{D}. \quad (43.36)$$

Mais remarquez! Nous décrivons une condition d'*équilibre*, ce qui fait que nos lois d'*équilibre* de mécanique statistique doivent s'appliquer. Selon ces lois, la probabilité de trouver une molécule à la coordonnée x est proportionnelle à $e^{-U/kT}$, où U est l'énergie potentielle. En fonction de la densité n_a , ceci signifie que

$$n_a = n_0 e^{-U/kT}. \quad (43.37)$$

Si nous différencions (43.37) par rapport à x , nous trouvons

$$\frac{dn_a}{dx} = -n_0 e^{-U/kT} \cdot \frac{1}{kT} \frac{dU}{dx}, \quad (43.38)$$

ou

$$\frac{dn_a}{dx} = -\frac{n_a}{kT} \frac{dU}{dx}. \quad (43.39)$$

Dans notre cas, puisque la force F est appliquée dans la direction x , l'énergie potentielle U vaut simplement $-Fx$, et $-dU/dx = F$. L'équation (43.39) donne alors

$$\frac{dn_a}{dx} = \frac{n_a F}{kT}. \quad (43.40)$$

[Ceci est simplement l'équation (40.2), de laquelle nous avons déduit $e^{-U/kT}$, ce qui fait que nous tournons en rond.] Comparant (43.40) avec (43.36), nous obtenons exactement l'équation (43.31). Nous avons montré que l'équation (43.31), qui donne le courant de diffusion en fonction de la mobilité, possède le bon coefficient et est tout à fait générale. La mobilité et la diffusion sont intimement reliées. Cette relation fut primitivement établie par Einstein.

43-6 Conductivité thermique

Les méthodes de la théorie cinétique que nous avons utilisées ci-dessus peuvent être utilisées également pour calculer la *conductivité thermique* d'un gaz. Si le gaz au sommet d'un récipient est plus chaud que le gaz dans le bas, la chaleur va se déplacer du sommet vers le bas. (Nous considérons que le haut est plus chaud, car sinon des courants de convection vont se déclencher et le problème ne serait plus du tout un problème de *conduction* de chaleur.) Le transfert de chaleur du gaz le plus chaud vers le gaz le plus froid se fait par la diffusion des molécules « chaudes » – celles qui ont davantage d'énergie – vers le bas et la diffusion des molécules « froides » vers le haut. Pour calculer le flux d'énergie thermique, nous devons évaluer quelle est l'énergie transportée vers le bas au travers d'un élément de surface par les molécules se déplaçant vers le bas, et quelle est l'énergie transportée vers le haut à travers une même surface par les molécules se déplaçant vers le haut. La différence nous donnera le flux d'énergie résultant vers le bas.

La conductivité thermique k est définie comme le rapport de la vitesse à laquelle l'énergie thermique est transportée au travers d'une surface unité, au gradient de température :

$$\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = -\kappa \frac{dT}{dz}. \quad (43.41)$$

Puisque les détails des calculs ressemblent tout à fait à ceux que nous avons faits précédemment en considérant le flux du courant électrique dans un gaz ionisé, nous laisserons au lecteur le soin de montrer à titre d'exercice que

$$\kappa = \frac{knlv}{\gamma - 1}, \quad (43.42)$$

où $(\gamma - 1)kT$ est l'énergie moyenne d'une molécule à la température T .

Si nous utilisons notre relation $nl\sigma_c = 1$, la conductivité thermique peut être écrite sous la forme

$$\kappa = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{kv}{\sigma_c}. \quad (43.43)$$

Nous obtenons un résultat assez surprenant. Nous savons que la vitesse moyenne des molécules d'un gaz dépend de la température et *non de la densité*. Nous prévoyons que σ_c ne dépend que de la *dimension* des molécules. Notre résultat simple dit alors que la conductivité thermique k (et de ce fait le *taux* de transfert de chaleur dans n'importe quelle circonstance particulière)

est indépendante de la *densité* du gaz! Le changement dans le nombre des « porteurs » d'énergie avec un changement de densité est exactement compensé par la distance plus grande que les « porteurs » peuvent parcourir entre les collisions.

On peut demander : « Est-ce que le flux de chaleur est indépendant de la densité du gaz dans la limite où la densité tend vers zéro? Lorsqu'il n'y a plus de gaz du tout? » Certainement pas! La formule (43.43) fut établie, comme le furent toutes les autres dans ce chapitre, avec l'hypothèse que le libre parcours moyen entre les collisions est beaucoup plus petit qu'une quelconque des dimensions du récipient. Chaque fois que la densité du gaz est si faible qu'une molécule a une chance non négligeable de traverser d'une paroi du récipient jusqu'à l'autre sans subir de collision, aucun des calculs de ce chapitre ne peut s'appliquer. Nous devons, dans de tels cas, revenir à la théorie cinétique et calculer à nouveau les détails de ce qui se passe.

Les lois de la thermodynamique

44-1 Machines thermiques; la première loi

44-2 La deuxième loi

44-3 Machines réversibles

44-4 Le rendement d'une machine parfaite

44-5 La température thermodynamique

44-6 L'entropie

44-1 Machines thermiques; la première loi

Jusqu'à présent, nous avons traité les propriétés de la matière d'un point de vue atomique, en essayant de comprendre approximativement ce qui se passe à partir de l'hypothèse que les objets sont constitués d'atomes qui obéissent à certaines lois. Cependant, un certain nombre de relations entre les propriétés des substances peuvent être établies sans pour autant considérer la structure détaillée de ces matériaux. La détermination des relations entre les diverses propriétés des matériaux, sans connaître leur structure interne, fait l'objet de la *thermodynamique*. Historiquement, la thermodynamique fut développée avant de parvenir à la compréhension de la structure interne de la matière.

Donnons un exemple: nous savons par la théorie cinétique que la pression d'un gaz est causée par le bombardement moléculaire, et nous savons que si nous chauffons un gaz de telle sorte que le bombardement augmente, la pression doit augmenter. En sens inverse, si le piston dans un récipient de gaz est déplacé vers l'intérieur à l'encontre des forces de bombardement, l'énergie des molécules bombardant le piston va augmenter et donc aussi la température. Ainsi, d'un côté, si nous augmentons la température à volume donné, nous augmentons la pression. Par ailleurs, si nous comprimons le gaz, nous voyons que la température augmente. A partir de la théorie cinétique, on peut établir une relation quantitative entre ces deux effets, mais instinctivement on peut penser qu'ils sont reliés d'une manière nécessaire qui est indépendante du détail des collisions.

Considérons un autre exemple. De nombreuses personnes connaissent cette intéressante propriété du caoutchouc: Si nous tirons sur un ruban de caoutchouc, il s'échauffe. Si on le place par exemple entre ses lèvres et qu'on le tire, on peut sentir un échauffement et cet échauffement est réversible en ce sens que si nous relâchons rapidement le ruban de caoutchouc, tandis qu'il est encore toujours entre les lèvres, on sent qu'il se refroidit. Cela signifie que lorsque nous étirons un ruban de caoutchouc, il s'échauffe, et lorsque nous relâchons la tension sur le ruban,

il se refroidit. Maintenant, notre intuition peut nous suggérer que si nous chauffons un ruban, il va se contracter : que le fait d'échauffer un ruban lorsqu'on le tire peut impliquer qu'il se contracte lorsqu'on le chauffe. Et en fait, si nous envoyons une flamme gazeuse sur un ruban de caoutchouc soutenant un poids, nous voyons que le ruban se contracte brutalement (Fig. 44-1). Il est donc vrai que lorsque nous chauffons un ruban de caoutchouc, il se contracte, et ceci est définitivement relié au fait que lorsque nous relâchons la tension, il se refroidit.

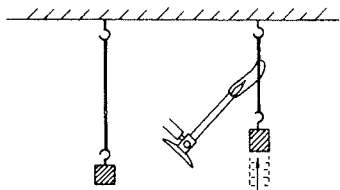


Fig. 44-1. Le ruban de caoutchouc chauffé.

Le mécanisme interne du caoutchouc qui cause cet effet est assez compliqué. Nous le décrirons jusqu'à un certain point d'un point de vue moléculaire, bien que notre but essentiel dans ce chapitre soit de comprendre la relation entre ces effets, indépendamment du modèle moléculaire. Néanmoins, nous pouvons montrer à partir du modèle moléculaire que les effets sont étroitement reliés. Une manière de comprendre le comportement du caoutchouc est de reconnaître que cette substance est formée d'un énorme enchevêtrement de longues chaînes de molécules, une sorte de « spaghetti moléculaire », avec une complication supplémentaire : il y a des liaisons croisées entre les chaînes – comme un spaghetti qui est quelquefois collé à un autre spaghetti à l'endroit où ils se croisent – un grand enchevêtrement. Lorsque nous tirons sur un tel enchevêtrement, certaines des chaînes tendent à s'aligner le long de la direction de traction. En même temps, les chaînes sont en mouvement thermique et donc elles se frappent mutuellement en permanence. Il en résulte qu'une telle chaîne, soumise à tension, ne restera pas tendue d'elle-même, parce qu'elle est frappée latéralement par les autres chaînes et les autres molécules, elle va donc tendre à nouveau à se recourber. Ainsi la raison réelle pour laquelle un ruban de caoutchouc tend à se contracter est celle-ci : lorsqu'on le tire, les chaînes prennent la direction de la longueur et l'agitation thermique des molécules sur le côté des chaînes tend à les déformer, et donc à les raccourcir. On peut alors comprendre que lorsque les chaînes sont maintenues tendues et que la température augmente, de telle sorte que la vigueur du bombardement latéral sur les chaînes soit également augmentée, les chaînes tendent à se contracter et elles sont capables de soulever un poids plus élevé lorsqu'elles sont chauffées. Si, après avoir été tendu pendant un certain temps, un ruban de caoutchouc peut se détendre, chaque chaîne se ramollit, et les molécules qui la frappent perdent de l'énergie lorsqu'elles cognent la chaîne détendue. Il en résulte que la température diminue.

Nous avons vu comment ces deux processus, contraction par échauffement et refroidissement au cours de la détente, peuvent être reliés par la théorie cinétique, mais ce serait un défi extraordinaire que de déterminer à partir de la théorie la relation précise entre les deux. Nous devrions savoir combien de collisions ont lieu par seconde, quel est l'aspect des chaînes et nous devrions tenir compte de beaucoup d'autres complications. Le mécanisme détaillé est si compliqué que nous ne pouvons pas, par la théorie cinétique, déterminer réellement exactement ce qui se passe ; cependant, une relation bien définie entre les deux

effets que nous observons peut être obtenue sans rien connaître sur le mécanisme interne!

Tout le sujet de la thermodynamique dépend essentiellement du type suivant de considération: parce qu'un ruban de caoutchouc est plus « rigide » à des températures élevées qu'aux basses températures, il doit être possible de soulever des poids, de les déplacer et ainsi de produire du travail avec de la chaleur. En fait, nous avons déjà vu expérimentalement qu'un ruban de caoutchouc chauffé peut soulever un poids. L'étude de la manière de produire du travail avec de la chaleur est le début de la science de la thermodynamique. Pouvons-nous fabriquer une machine qui utilise l'effet d'échauffement d'un ruban de caoutchouc pour produire du travail? On peut réaliser une machine d'allure stupide qui a exactement cette fonction. Elle est formée d'une roue de bicyclette dans laquelle tous les rayons sont des rubans en caoutchouc (Fig. 44-2). Si l'on chauffe les rubans de caoutchouc d'un côté de la roue avec une paire de lampes chauffantes, ils deviennent plus « rigides » que les rubans de l'autre côté. Le centre de gravité de la roue sera poussé de côté, écarté du support central, ce qui fait tourner la roue. En tournant, des rubans froids se rapprochent de la source de chaleur, et les rubans chauds s'en éloignent et se refroidissent, de telle sorte que la roue tourne lentement aussi longtemps qu'on envoie de la chaleur. Le rendement d'une telle machine est extrêmement faible. Quatre cents Watts de puissance sont dépensés dans les deux lampes, mais avec une telle machine il est à peine possible de soulever une mouche! Une question intéressante, cependant, est de savoir si nous pouvons obtenir du travail à partir de la chaleur d'une manière plus efficace.

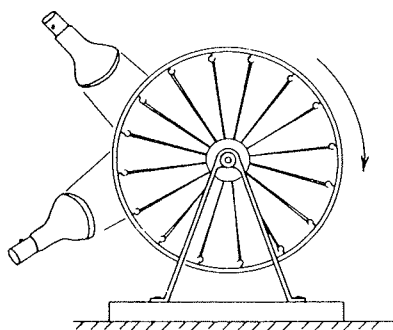


Fig. 44-2. La machine fonctionnant sur le principe du ruban chauffé.

En fait, la science de la thermodynamique a commencé avec une analyse, faite par le grand ingénieur Sadi Carnot, du problème de la conception de la machine la meilleure et la plus efficace, et ceci constitue un des rares cas notables dans lequel les sciences de l'ingénieur ont contribué fondamentalement à la théorie physique. Un autre exemple qui vient à l'esprit est l'analyse plus récente de la théorie de l'information par Claude Shannon. Ces deux analyses, incidemment, apparaissent étroitement reliées.

La manière dont une machine à vapeur fonctionne habituellement est celle-ci: La chaleur venant d'un feu fait bouillir de l'eau, et la vapeur ainsi formée se détend et pousse un piston qui fait tourner une roue. Ainsi la vapeur pousse le piston – quoi donc alors? On doit finir l'opération: une manière stupide de terminer le cycle serait de laisser la vapeur s'échapper dans l'air, car alors nous devons continuer d'alimenter en eau. C'est moins cher – plus efficace – d'envoyer la vapeur dans une autre boîte, où elle est condensée par de l'eau froide, puis de pomper

l'eau pour la ramener dans la chaudière, de telle sorte qu'elle circule continuellement. De la chaleur est donc fournie à la machine et convertie en travail. Vaudrait-il mieux utiliser de l'alcool? Quelles sont les propriétés que doit avoir une substance pour qu'elle permette la meilleure machine possible? C'était la question que Carnot se posait, et l'un des sous-produits fut la découverte du type de relation que nous venons d'expliquer plus haut.

Les résultats de la thermodynamique sont tous contenus implicitement dans certains énoncés apparemment simples, appelés *lois de la thermodynamique*. A l'époque de Carnot, la première loi de thermodynamique, la conservation de l'énergie, n'était pas connue. Les raisonnements de Carnot furent établis avec tant de soin, cependant, qu'ils restent valides bien que la première loi n'ait pas été connue en son temps! Quelque temps après, Clausius établit une démonstration plus simple qui pouvait être comprise plus facilement que le raisonnement extrêmement subtil de Carnot. Mais il se trouve que Clausius supposa, non pas la conservation de l'énergie en général, mais que la *chaleur* était conservée selon la théorie calorifique, ce qui ultérieurement se révéla faux. Ainsi on a souvent dit que la logique de Carnot était fausse. Mais sa logique était tout à fait correcte. Ce n'est que la version simplifiée de Clausius, que tout le monde lit, qui était incorrecte.

Ce qu'on appelle la deuxième loi de thermodynamique fut ainsi découverte par Carnot avant la première loi! Il serait intéressant de donner le raisonnement de Carnot qui n'utilisait pas la première loi, mais nous ne le ferons pas parce que nous voulons apprendre de la physique, non pas de l'histoire. Nous utiliserons la première loi dès le départ, malgré le fait que beaucoup de choses peuvent être obtenues sans elle.

Commençons par énoncer la première loi, la conservation de l'énergie: si on considère un système et qu'on lui injecte de la chaleur, et que l'on produise du travail sur ce système, son énergie augmente de la chaleur qu'on lui apporte et du travail que l'on réalise. Nous pouvons écrire ceci de la manière suivante: la chaleur Q injectée dans le système, plus le travail W réalisé sur le système est égale à l'augmentation de l'énergie U du système; cette dernière énergie est quelquefois appelé l'énergie interne:

$$\text{Changement de } U = Q + W. \quad (44.1)$$

Le changement de U peut être représenté par l'addition d'une petite quantité de chaleur ΔQ et d'une petite quantité de travail ΔW :

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W, \quad (44.2)$$

ce qui est une forme différentielle de la même loi. Nous connaissons cela très bien, car nous l'avons vu dans un chapitre précédent.

44-2 La deuxième loi

Qu'en est-il de la deuxième loi de la thermodynamique? Nous savons que si nous réalisons du travail contre le frottement par exemple, le travail perdu pour nous est égal à la chaleur produite. Si nous effectuons du travail dans une enceinte à température T , et que nous réalisons ce travail suffisamment lentement, la température de l'enceinte ne change guère, et nous avons converti du travail en chaleur à la température donnée. Et la possibilité opposée? Est-il possible de convertir de la chaleur en travail à une certaine température? La deuxième loi de la thermodynamique affirme que ce n'est pas possible. Ce serait extrêmement commode de pouvoir convertir

la chaleur en travail simplement en retournant un processus comme le frottement. Si nous considérons simplement la conservation de l'énergie, nous pouvons penser que l'énergie thermique, telle que celle dans les mouvements de vibration des molécules, peut fournir une bonne source d'énergie utile. Mais Carnot supposa qu'il est impossible d'extraire l'énergie de la chaleur à une seule température. En d'autres termes, si le monde entier était à la même température, on ne pourrait jamais convertir aucune de ses énergies thermiques en travail : tandis que le processus transformant du travail en chaleur peut avoir lieu à une température donnée, on ne peut le renverser pour réobtenir le travail. Précisément, Carnot supposa que la chaleur ne peut être apportée à une certaine température, puis convertie en travail sans *aucune autre modification* dans le système ou son environnement.

Cette dernière phrase est très importante. Supposons que nous ayons un récipient d'air comprimé à une certaine température, et que nous laissions l'air se détendre. Il peut produire du travail ; il peut faire taper des marteaux, par exemple. Il se refroidit un peu dans la détente, mais si nous disposons d'une mer importante, d'un océan, à une température donnée – un réservoir de chaleur – nous pouvons le réchauffer. Ainsi nous avons pris la chaleur de la mer et nous avons effectué du travail avec l'air comprimé. Mais Carnot n'avait pas tort, parce que *nous n'avons pas tout laissé dans l'état antérieur*. Si nous recomprimons l'air que nous avons laissé se détendre, nous verrons que nous produisons un travail supplémentaire, et lorsque nous aurons terminé, nous découvrirons que non seulement nous n'avons pas extrait du travail du système à la température T , mais qu'en réalité nous en avons injecté. Nous ne devons parler que de situations dans lesquelles le *résultat complet* du processus total consiste à prendre de la chaleur et à la convertir en travail, de même que le résultat complet du processus de produire du travail contre le frottement consiste à prendre du travail et à le convertir en chaleur. Si nous nous déplaçons sur un cycle, nous pouvons ramener le système précisément à son point de départ, avec le résultat net que nous avons effectué du travail contre le frottement et produit de la chaleur. Pouvons-nous renverser le processus ? Tournons le commutateur, de telle sorte que tout aille en sens inverse, le frottement produit du travail contre nous et refroidit la mer ? Selon Carnot : non ! Aussi supposons que ce soit impossible.

Si c'était possible cela signifierait, entre autres choses, que nous pourrions extraire de la chaleur d'un corps froid et la mettre dans un corps chaud sans qu'il nous en coûte. Or nous savons qu'il est naturel qu'un objet chaud puisse chauffer un objet froid ; si nous plaçons simplement un corps chaud et un corps froid ensemble et ne modifions rien d'autre, notre expérience nous assure que le corps chaud ne va pas devenir plus chaud et que celui qui est froid ne va pas encore se refroidir ! Mais si nous pouvions obtenir du travail en extrayant de la chaleur de l'océan, par exemple, ou de n'importe quelle autre chose à une température donnée, ce travail pourrait être converti à nouveau en chaleur par frottement à une autre température. Par exemple, l'autre bras de la machine produisant du travail pourrait frotter quelque chose qui est déjà chaud. Le résultat net reviendrait à prendre de la chaleur d'un corps « froid », l'océan, et à l'injecter dans un corps chaud. L'hypothèse de Carnot, la deuxième loi de thermodynamique, est quelquefois énoncée comme suit : la chaleur ne peut pas, d'elle-même, passer d'un corps froid à un corps chaud. Mais comme nous venons justement de le voir, ces deux énoncés sont équivalents : premièrement, que l'on ne peut pas mettre au point un processus dont le seul résultat est de convertir la chaleur en travail à une température unique, et deuxièmement, que l'on ne peut pas faire circuler la chaleur par elle-même d'un endroit froid vers un endroit chaud. Nous utiliserons principalement la première forme.

L'analyse de Carnot des machines thermiques est assez semblable au raisonnement que nous avons donné à propos des machines à soulever des poids dans notre discussion de la conservation de l'énergie

au Chapitre 4. En fait, ce raisonnement fut établi d'après le raisonnement de Carnot concernant les machines thermiques et ainsi le traitement actuel ressemble beaucoup à celui que vous avez déjà vu.

Supposons que nous construisions une machine thermique qui possède une «chaudière» quelque part à une température T_1 . Une certaine quantité de chaleur Q_1 est extraite de la chaudière, la machine à vapeur produit un certain travail W , puis elle fournit une certaine quantité de chaleur Q_2 à un «condenseur» à une autre température T_2 (Fig. 44-3). Carnot ne disait pas quelle quantité de chaleur, car il ne connaissait pas la première loi, et il n'utilisait pas la loi disant que Q_2 était égal à Q_1 parce qu'il n'y croyait pas. Bien que tout le monde pensât, d'après la théorie calorifique, que les chaleurs Q_1 et Q_2 devaient être les mêmes, Carnot n'a pas dit qu'elles étaient les mêmes – c'est là une partie de l'astuce de sa démonstration. Si nous utilisons la première loi, nous trouvons que la chaleur fournie Q_2 , est égale à la chaleur Q_1 injectée, moins le travail W réalisé:

$$Q_2 = Q_1 - W. \quad (44.3)$$

(Si nous avons un certain type de processus cyclique où l'eau est pompée dans la chaudière après avoir été condensée, nous dirons que la chaleur Q_1 a été absorbée et du travail W réalisé, au cours de chaque cycle, pour une certaine quantité d'eau qui parcourt ce cycle.)

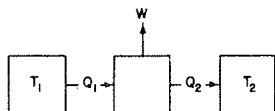


Fig. 44-3. Machine thermique.

Nous allons maintenant réaliser une autre machine, et voir si nous pouvons produire davantage de travail à partir de la même quantité de chaleur donnée à la température T_1 , avec le condenseur toujours à la température T_2 . Nous utiliserons la même quantité de chaleur Q_1 venant de la chaudière, et nous essayerons d'obtenir davantage de travail que nous avons obtenu avec notre machine à vapeur, peut-être, par exemple, en utilisant un autre fluide tel que l'alcool.

44-3 Machines réversibles

Nous devons maintenant étudier nos machines. Une chose est sûre: nous perdrons quelque chose si la machine contient des parties avec frottement. La meilleure machine sera une machine sans frottement. Nous supposons, alors, la même perfection idéale, que nous avons déjà supposée lorsque nous étudions la conservation de l'énergie; c'est-à-dire une machine absolument sans frottement.

Nous devons également considérer l'analogie du mouvement sans frottement: le transfert de chaleur «sans frottement». Si nous plaçons un objet chaud à une température élevée contre un objet froid, de telle sorte que la chaleur puisse s'écouler, il n'est pas possible, par une très petite modification de la température de l'un ou l'autre des objets, de faire en sorte que la chaleur s'écoule dans la direction opposée. Mais lorsque nous avons une machine pratiquement sans frottement, et que nous la poussons avec une petite force dans un sens, elle va dans ce sens, et si nous la poussons avec une petite force dans l'autre sens, elle va dans cet autre sens. Nous devons trouver l'analogie du mouvement sans frottement: le transfert de chaleur dont la direction peut être renversée par une très légère modification. Si la différence entre les températures est finie, ceci est impossible, mais si l'on s'arrange pour que la chaleur s'écoule toujours entre deux objets

essentiellement à la même température, ayant un écart infinitésimal pour la faire s'écouler dans la direction désirée, on dit que l'écoulement est réversible (Fig. 44-4). Si nous chauffons un petit peu l'objet de gauche, la chaleur va s'écouler vers la droite; si nous le refroidissons un petit peu, la chaleur va s'écouler vers la gauche. Ainsi nous trouvons que la machine idéale est ce qu'on appelle une machine *réversible*, dans laquelle tout processus est réversible, au sens où, par des changements infimes, nous pouvons faire tourner la machine dans la direction opposée. Cela signifie que nulle part dans la machine il n'y a de frottement appréciable, et nulle part dans la machine il ne peut y avoir d'endroit où la chaleur des thermostats, ou la flamme de la chaudière, est en contact direct avec quelque chose de définitivement plus froid ou plus chaud.

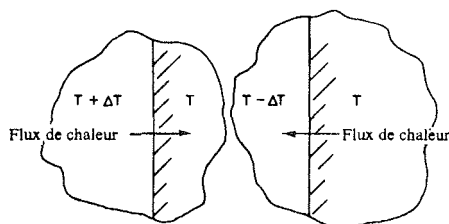


Fig. 44-4. Transfert de chaleur réversible.

Considérons maintenant une machine parfaite dans laquelle tous les processus sont réversibles. Pour montrer qu'une telle chose est possible en principe, nous donnerons l'exemple d'un cycle de machine qui peut être ou ne pas être pratique, mais qui au moins est réversible au sens de Carnot. Supposons que nous ayons un gaz dans un cylindre équipé d'un piston sans frottement. Le gaz n'est pas nécessairement un gaz parfait. Il n'est pas même nécessaire que le fluide soit un gaz, mais pour être précis, disons que nous avons un gaz parfait. Supposons également que nous ayons deux réservoirs de chaleur T_1 et T_2 — des réservoirs de grandes dimensions ayant des températures définies T_1 et T_2 . Nous supposons dans ce cas que T_1 est plus grand que T_2 . Commençons par chauffer le gaz et en même temps dilatoons-le, tandis qu'il est en contact avec le thermostat à T_1 . Ce faisant, c'est-à-dire en tirant le piston très lentement au fur et à mesure que la chaleur pénètre dans le gaz, nous nous assurons que la température de gaz ne s'éloigne jamais beaucoup de T_1 . Si nous tirons le piston trop vite, la température du gaz va tomber beaucoup trop en dessous de T_1 et le processus ne sera pas réversible, mais si nous tirons suffisamment lentement, la température du gaz ne s'écartera jamais beaucoup de T_1 . D'un autre côté, si nous enfonçons le piston lentement, la température sera seulement infinitésimalement plus élevée que T_1 , et la chaleur s'écoulera en sens inverse. Nous voyons qu'une telle détente isotherme (à température constante), réalisée lentement et délicatement, est un processus réversible.

Pour comprendre ce que nous faisons, nous utiliserons un diagramme (Fig. 44-6) de la pression du gaz en fonction de son volume. Lorsque le gaz se détend, la pression tombe. La courbe marquée (1) nous dit comment la pression et le volume se modifient lorsque la température est maintenue constante à la valeur T_1 . Pour un gaz parfait, cette courbe est $PV = NkT_1$. Au cours d'une détente isotherme, la pression diminue lorsque le volume augmente, jusqu'à ce que nous nous arrêtons au point b . En même temps, une certaine quantité de chaleur Q_1 doit passer du thermostat dans le gaz, car si le gaz était détendu sans être en contact avec le réservoir, il se serait refroidi, comme nous le savons déjà. Ayant terminé la détente isotherme, au point b , nous écartons le cylindre du réservoir

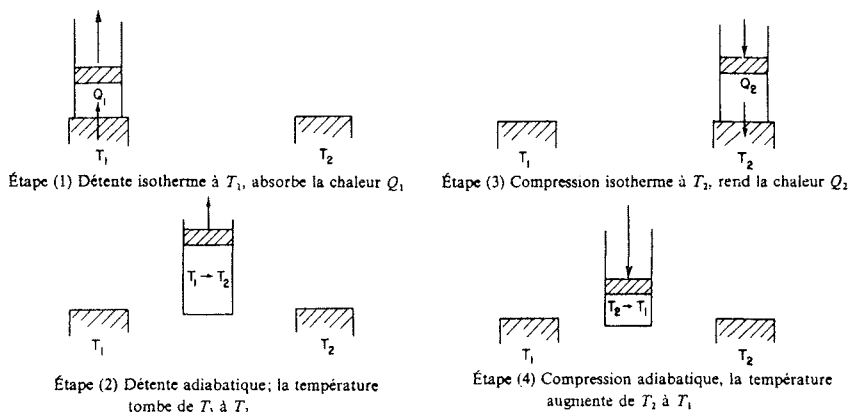


Fig. 44-5. Étapes dans un cycle de Carnot.

et continuons la détente. Cette fois-ci nous ne permettons pas à la chaleur de pénétrer dans le cylindre. A nouveau, nous dilatons lentement le gaz, de telle sorte qu'il n'y ait pas de raison de ne pas pouvoir revenir en arrière, et nous supposons à nouveau qu'il n'y a pas de frottement. Le gaz continue de se détendre et la température diminue, jusqu'il n'y a plus, maintenant, de chaleur pénétrant dans le cylindre.

Nous laissons le gaz se détendre, suivant la courbe indiquée par (2), jusqu'à ce que la température atteigne T_2 , au point marqué *c*. Ce type de détente réalisé sans ajouter de chaleur, est appelé détente *adiabatique*. Pour un gaz parfait, nous savons déjà que la courbe (2) a la forme $PV^\gamma = \text{constante}$, où γ est une constante plus grande que 1, ce qui fait que la pente de la courbe adiabatique est plus négative que celle de la courbe isotherme. Le cylindre de gaz a maintenant atteint la température T_2 , de telle sorte que si nous le mettons en contact avec le réservoir à la température T_2 il n'y aura pas de modification irréversible. Puis nous comprimons lentement le gaz, tandis qu'il est en contact avec le réservoir T_2 , suivant la courbe indiquée par (3) (Fig. 44-5, Étape 2). Comme le cylindre est en contact avec le réservoir, la température ne s'élève pas, mais la quantité de chaleur Q_2 passe du cylindre au réservoir à la température T_2 . Ayant comprimé le gaz à température constante le long de la courbe (3) jusqu'au point *d*, nous écartons le cylindre de la source de chaleur à la température T_2 et continuons de le comprimer sans permettre d'échange de chaleur. La température va augmenter, et la pression va suivre la courbe indiquée par (4). Si nous réalisons chaque étape correctement, nous pouvons revenir au point *a*, à la température T_1 de là où nous sommes partis, et recommencer le cycle.

Nous voyons que sur ce diagramme nous avons fait subir au gaz un cycle complet, et que pendant un cycle nous avons injecté Q_1 à la température T_1 , que nous avons extrait Q_2 à la température T_2 . Or, il faut noter que ce cycle est réversible, ce qui nous permettrait éventuellement de parcourir toutes les étapes en sens inverse. Nous aurions pu faire marche arrière: nous aurions pu partir du point *a*, à la température T_1 , détendre le long de la courbe (4), détendre davantage à la température T_2 , en absorbant la chaleur Q_2 , etc., parcourant ainsi le cycle dans l'autre sens. Si nous suivons le cycle dans une direction, nous devons produire du travail sur le gaz; si nous allons dans l'autre direction, le gaz produit du travail contre nous.

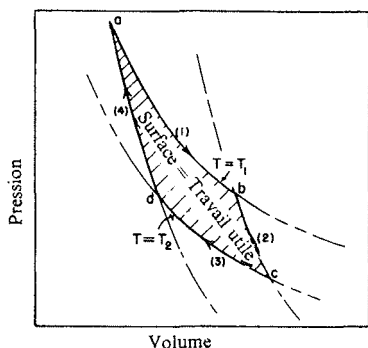


Fig. 44-6. Le cycle de Carnot.

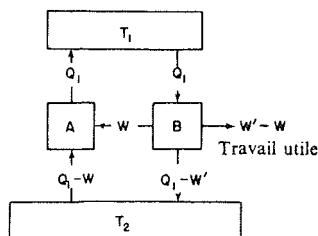


Fig. 44-7. Machine réversible *A* fonctionnant en sens inverse grâce à la machine *B*.

Incidentement, il est facile de trouver la quantité de travail totale, parce que le travail produit dans une détente quelconque est égal au produit de la pression par le changement de volume, $\int P dV$. Sur ce diagramme particulier, nous avons représenté P verticalement et V horizontalement. Si nous appelons la distance verticale y et la distance horizontale x , il vaut $\int y dx$ – en d'autres termes, la surface sous la courbe. Ainsi la surface sous chacune des courbes numérotées est une mesure du travail réalisé par ou sur le gaz dans l'étape correspondante. Il est facile de voir que le travail résultant qui a été produit est donné par la surface hachurée sur la figure.

Maintenant que nous venons de donner un exemple particulier d'une machine réversible, nous allons supposer que d'autres machines semblables sont également possibles. Supposons que nous ayons une machine réversible *A* qui prend Q_1 à T_1 , réalise du travail W , et redonne de la chaleur à T_2 . Supposons maintenant que nous ayons n'importe quelle machine *B*, réalisée par l'homme, déjà conçue ou pas encore inventée, faite de rubans de caoutchouc, de vapeur ou de n'importe quoi d'autre, réversible ou pas, qui est conçue de telle sorte qu'elle prenne la même quantité de chaleur Q_1 à T_1 , et rejette de la chaleur à la température plus basse T_2 (Fig. 44-7). Supposez que la machine *B* produise un certain travail W' . Nous allons maintenant montrer que W' n'est pas plus grand que W – qu'aucune machine ne peut faire davantage de travail qu'une machine réversible. Pourquoi? Supposez en effet que W' soit plus grand que W . Alors nous pourrions prendre la chaleur Q_1 du réservoir à la température T_1 , et avec la machine *B* nous pourrions faire du travail W' et rendre une certaine quantité de chaleur au réservoir à la température T_2 ; nous ne nous préoccupons pas de savoir combien. Ceci fait, nous pourrions mettre de côté une partie du travail W' , supposé plus grand que W ; nous pourrions utiliser une part de celui-ci, W , et conserver ce qui reste, $W' - W$, pour un travail utile. Avec le travail W nous pourrions faire fonctionner la machine *A* en sens inverse, *parce que c'est une machine réversible*. Elle va absorber une certaine quantité de chaleur du réservoir à T_2 et en fournir Q_1 au réservoir à T_1 . Après ce double cycle, le résultat net sera que nous aurons tout ramené dans l'état du départ, et que nous aurons produit du travail utilisable à l'extérieur, à savoir $W' - W$, et *tout* ce que nous avons fait aura consisté à extraire de l'énergie du réservoir à T_2 ! Nous avons pris soin de rendre Q_1 au réservoir T_1 . Ainsi le réservoir peut être petit et à «l'intérieur» de notre machine combinée $A + B$, dont l'effet résultant est d'extraire une quantité de chaleur $W' - W$ du réservoir à la température T_2 et de le convertir en travail. Mais selon le postulat de Carnot,

il est impossible d'obtenir du travail utile à partir d'un réservoir à une température unique, *sans aucune autre modification*; cela ne peut pas se faire. De ce fait, aucune machine qui absorbe une certaine quantité de chaleur donnée à une température élevée T_1 et en rend à la température T_2 , ne peut réaliser davantage de travail qu'une machine réversible fonctionnant dans les mêmes conditions de température.

Supposons maintenant que la machine B soit également réversible. Alors, bien sûr, non seulement W' ne peut pas être plus grand que W , mais nous pouvons maintenant retourner l'argument et montrer que W ne peut pas être plus grand que W' . Si les deux machines sont réversibles, elles doivent produire la même quantité de travail, et nous arrivons alors à la brillante conclusion de Carnot: que si une machine est réversible, le mode de conception importe peu, car la quantité de travail que l'on obtiendra lorsque la machine absorbe une certaine quantité de chaleur donnée à une température T_1 et rend de la chaleur à une certaine autre température T_2 , *ne dépend pas de la conception de la machine*. C'est une propriété de l'univers, et non une propriété d'une machine particulière.

Si nous pouvons déterminer la loi qui donne le travail obtenu lorsque nous absorbons de la chaleur Q_1 à T_1 et rendons de la chaleur à T_2 , cette quantité sera une donnée universelle, indépendante de la substance. Bien sûr, si nous connaissons les propriétés d'une substance particulière, nous pourrions la calculer et dire alors que toutes les autres substances doivent produire la même quantité de travail dans une machine réversible. C'est l'idée de base, le moyen par lequel nous pouvons trouver la relation, par exemple, entre le degré de contraction d'un ruban de caoutchouc lorsque nous le chauffons, et l'importance de son refroidissement lorsque nous le laissons se contracter. Imaginez que nous plaçons ce ruban de caoutchouc dans une machine réversible, et que nous lui faisons parcourir un cycle réversible. Le résultat net, la quantité totale de travail réalisé, est cette fonction universelle, cette grande fonction qui est indépendante de la substance. Ainsi nous voyons que les propriétés d'une substance doivent être limitées d'une certaine manière; on ne peut réaliser ce que l'on veut, ou alors on serait capable d'inventer une substance qu'on pourrait utiliser pour produire davantage que le travail maximum possible lorsqu'on l'utilise dans un cycle réversible. Ce principe, cette limitation, est la seule loi réelle qui soit issue de la thermodynamique.

44-4 Le rendement d'une machine parfaite

Nous allons maintenant essayer de trouver la loi qui détermine le travail W en fonction de Q_1 , T_1 et T_2 . Il est clair que W est proportionnel à Q_1 , car si nous considérons deux machines réversibles en parallèle, toutes les deux travaillant ensemble en double, la combinaison est également une machine réversible. Si chacune absorbe la chaleur Q_1 , les deux ensembles absorbent $2 Q_1$ et le travail réalisé sera $2 W$, etc. Ainsi, il n'est pas déraisonnable que W soit proportionnel à Q_1 .

L'étape suivante est de trouver la loi universelle. Nous pouvons, et nous allons le faire, en étudiant une machine réversible utilisant la substance particulière dont les lois sont connues: le gaz parfait. Il est également possible d'obtenir la loi par un argument purement logique, sans utiliser aucune substance particulière. Ceci est un des très beaux exemples de raisonnement en physique et nous sommes peu disposés à ne pas vous le montrer, ainsi pour ceux que ça intéresse, nous allons le discuter dans un instant.

Mais nous utiliserons d'abord une méthode beaucoup moins abstraite et plus simple de calcul direct pour un gaz parfait.

Il nous faut simplement les formules pour Q_1 et Q_2 (car W est simplement égal à $Q_1 - Q_2$), qui sont les chaleurs échangées avec les réservoirs pendant les détentes et compression isothermes. Par exemple, quelle est la quantité de chaleur Q_1 prise dans le réservoir à la température T_1 pendant la détente isotherme [indiquée (1) sur la Figure 44-6] du point a , à la pression p_a , volume V_a à la température T_1 , au point b à la pression p_b , volume V_b et la même température T_1 ? Pour un gaz parfait chaque molécule possède une énergie qui ne dépend que de sa température, et puisque la température et le nombre de molécules sont les mêmes en a et en b , l'énergie interne est la même. *U ne change pas*; tout travail réalisé par le gaz,

$$W = \int_a^b p dV,$$

pendant la détente est égal à l'énergie Q_1 prise au réservoir. Pendant cette détente, $pV = NkT_1$, ou

$$p = \frac{NkT_1}{V}$$

ou

$$Q_1 = \int_a^b p dV = \int_a^b NkT_1 \frac{dV}{V} \quad (44.4)$$

ou

$$Q_1 = NkT_1 \ln \frac{V_b}{V_a}$$

est la chaleur prise au réservoir à T_1 . De la même manière, pour la compression à T_2 [courbe (3) sur la Figure 44-6] la chaleur fournie au réservoir à T_2 est

$$Q_2 = NkT_2 \ln \frac{V_c}{V_d}. \quad (44.5)$$

Pour terminer notre calcul, il nous faut simplement une relation entre V_c/V_d et V_b/V_a . Nous la trouvons en remarquant que (2) est une détente adiabatique de b à c , pendant laquelle PV^γ est une constante. Puisque $pV = NkT$, nous pouvons écrire ceci $(pV)V^{\gamma-1} = \text{constante}$, ou en fonction de T et de V , $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$, ou

$$T_1 V_b^{\gamma-1} = T_2 V_c^{\gamma-1}. \quad (44.6)$$

De la même manière, puisque (4), la détente de d en a , est également adiabatique, nous trouvons

$$T_1 V_a^{\gamma-1} = T_2 V_d^{\gamma-1}. \quad (44.6a)$$

Si nous divisons cette équation par la précédente, nous trouvons que V_b/V_a doit être égal à V_c/V_d , ainsi les logarithmes dans (44.4) et (44.5) sont égaux, et que

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (44.7)$$

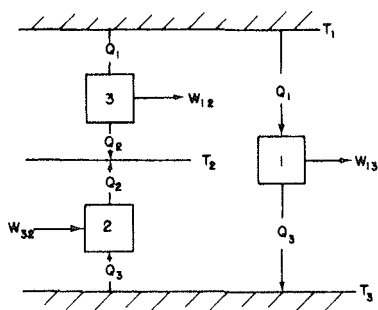


Fig. 44-8. Les machines 1 et 2 ensemble sont équivalentes à la machine 3.

C'est la relation que nous cherchions. Bien qu'elle ait été démontrée pour une machine utilisant un gaz parfait, nous savons qu'elle doit être vraie *pour n'importe quelle machine réversible*.

Nous allons voir maintenant comme cette loi universelle peut également être obtenue par un argument logique, sans connaître les propriétés d'une substance particulière. Supposez que nous ayons trois machines et trois températures, par exemple T_1 , T_2 et T_3 . Considérons qu'une des machines absorbe la chaleur Q_1 à la température T_1 , produise une certaine quantité de travail W_{13} , et rende une quantité de chaleur Q_3 à la température T_3 (Fig. 44-8). Soit une autre machine fonctionnant en sens inverse entre T_2 et T_3 . Supposons que la deuxième machine soit d'une taille telle qu'elle absorbe la même quantité de chaleur Q_3 et qu'elle libère la chaleur Q_2 . Nous devons injecter une certaine quantité de travail, W_{32} , dans cette machine — quantité négative parce que la machine fonctionne en sens inverse. Lorsque la première machine parcourt un cycle, elle absorbe la chaleur Q_1 et rend Q_3 à la température T_3 ; puis la seconde machine extrait la même chaleur Q_3 du réservoir à la température T_3 et en fournit au réservoir à la température T_2 . Ainsi, le résultat net des deux machines en tandem est de prendre la chaleur Q_1 de T_1 , et de rendre Q_2 à T_2 . Les deux machines sont donc équivalentes à une troisième, qui absorbe Q_1 à T_1 , produit un travail W_{12} , et rend la chaleur Q_2 à T_2 , parce que $W_{12} = W_{13} - W_{32}$, comme on peut immédiatement le voir en utilisant la première loi comme suit :

$$W_{13} - W_{32} = (Q_1 - Q_3) - (Q_2 - Q_3) = Q_1 - Q_2 = W_{12}. \quad (44.8)$$

Nous pouvons maintenant obtenir les lois qui relient les rendements des machines, parce qu'il doit y avoir manifestement une certaine relation entre les rendements des machines fonctionnant entre les températures T_1 et T_3 , entre T_2 et T_3 , et entre T_1 et T_2 .

Nous pouvons rendre la démonstration très claire de la manière suivante: Nous venons juste de voir que nous pouvons toujours relier la chaleur absorbée à T_1 à la chaleur libérée à T_2 , en trouvant la chaleur libérée à une certaine autre température T_3 . De ce fait, nous pouvons obtenir toutes les propriétés des machines si nous introduisons une température de référence, analysant tout à partir de cette température de référence. En d'autres termes, si nous connaissons le rendement d'une machine fonctionnant entre une certaine température T et une certaine température de référence arbitraire, nous pourrions alors calculer le rendement pour n'importe quelle autre différence de température. Puisque nous supposons que nous utilisons seulement des machines réversibles, nous pouvons travailler de la température initiale vers le bas, vers la température de référence

puis remonter vers la température finale. Nous définirons arbitrairement la température de référence comme étant *un degré*. Nous adopterons également un symbole particulier pour la chaleur qui est délivrée à cette température de référence: nous l'appellerons Q_S . En d'autres termes, lorsqu'une machine réversible absorbe la chaleur Q à la température T , elle délivre une chaleur Q_S à la température unité. *Si une machine absorbant de la chaleur Q_1 à T_1 , fournit de la chaleur Q_S à un degré, et si une machine absorbant la chaleur Q_2 à une température T_2 , fournit également la même chaleur Q_S à un degré, il en résulte qu'une machine qui absorbe la quantité de chaleur Q_1 à la température T_1 fournira la quantité de chaleur Q_2 si elle fonctionne entre T_1 et T_2 , comme nous l'avons déjà démontré en considérant les machines fonctionnant entre trois températures.* Ainsi, tout ce que nous avons à faire, en réalité, est de trouver combien de chaleur Q_1 il faut introduire à la température T_1 pour fournir une certaine quantité de chaleur Q_S à la température unité. Si nous le trouvons, nous avons tout ce qu'il nous faut. La quantité de chaleur Q est, bien sûr, une fonction de la température T . Il est facile de voir que la chaleur doit augmenter lorsque la température augmente, car nous savons qu'il faut du travail pour faire fonctionner une machine en sens inverse et fournir de la chaleur à une température plus élevée. Il est également facile de voir que la quantité de chaleur Q_1 doit être proportionnelle à Q_S . Ainsi la grande loi est quelque chose de ce genre: pour une certaine quantité de chaleur Q_S fournie à un degré par une machine fonctionnant à la température de T degrés, la quantité de chaleur Q absorbée doit être égale à cette quantité Q_S que multiplie une certaine fonction croissante de la température:

$$Q = Q_S f(T). \quad (44.9)$$

44-5 La température thermodynamique

Au point où nous en sommes, nous n'allons pas essayer de trouver la formule de cette fonction croissante de la température en fonction de notre échelle familière de température liée au thermomètre à mercure, mais au lieu de cela *nous allons définir la température par une nouvelle échelle*. A un certain moment «la température» fut définie arbitrairement en divisant la dilatation de l'eau en degrés égaux d'une certaine dimension. Mais lorsqu'on mesure la température avec un thermomètre à mercure, on trouve que les degrés ne sont plus égaux. *Maintenant nous pouvons donner une définition de la température qui est indépendante de toute substance particulière*. Nous pouvons utiliser cette fonction $f(T)$, qui ne dépend pas de l'appareil que nous utilisons, parce que le rendement de ces machines réversibles est indépendant de la substance avec laquelle elles fonctionnent. Puisque la fonction que nous avons trouvée augmente avec la température, nous définirons la *fonction elle-même* comme étant la température, mesurée en unités de la température étalon de un degré, comme suit:

$$Q = ST, \quad (44.10)$$

ou

$$Q_S = S \cdot 1^\circ. \quad (44.11)$$

Ceci signifie que nous pouvons dire le degré d'échauffement d'un objet, en déterminant quelle quantité de chaleur est absorbée par une machine réversible travaillant entre la température de l'objet et la température unité (Fig. 44-9). Si on prend sept fois plus de chaleur d'une chaudière que l'on en rend au condenseur à un degré, on dira que la température de la chaudière est sept degrés, etc. Ainsi, en mesurant quelle quantité de chaleur est absorbée aux différentes températures, nous déterminons la température. La température

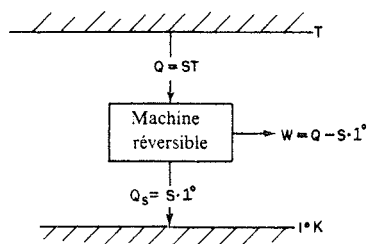


Fig. 44-9. Température thermodynamique absolue.

définie de cette manière est appelée *la température thermodynamique absolue*, et elle est indépendante de la substance. Nous n'utiliserons plus que cette définition à partir de maintenant. *

Nous voyons maintenant que lorsque nous avons deux machines, l'une fonctionnant entre T_1 et un degré et l'autre fonctionnant entre T_2 et un degré, fournissant la même chaleur à la température unité, les chaleurs absorbées doivent alors être reliées par

$$\frac{Q_1}{T_1} = S = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (44.12)$$

Mais ceci signifie que si nous avons une seule machine fonctionnant entre T_1 et T_2 alors le résultat de tout le calcul, la grande conclusion finale, est que Q_1 est à T_1 ce que Q_2 est à T_2 , si la machine absorbe l'énergie Q_1 à la température T_1 , et fournit la chaleur Q_2 à la température T_2 . Chaque fois que la machine est réversible, cette relation entre les chaleurs doit s'appliquer. C'est tout ce qu'il y a à savoir: c'est le centre de l'univers de la thermodynamique.

Si ceci est tout le contenu de la thermodynamique, pourquoi est-ce considéré comme un sujet difficile? En traitant un problème comportant une masse donnée d'une certaine substance, les conditions de la substance à n'importe quel moment peuvent être décrites en donnant sa température et son volume. Si nous connaissons la température et le volume d'une substance, et si nous savons que la pression est une certaine fonction de la température et du volume, alors nous connaissons l'énergie interne. On peut dire, « Je ne veux pas procéder de cette manière. Donnez-moi la température et la pression et je vous dirai le volume. Je peux considérer le volume comme une fonction de la température et de la pression, et l'énergie interne comme une fonction de la température et de la pression, etc. » C'est pourquoi la thermodynamique est difficile, parce que chacun utilise une approche différente. Si nous pouvions simplement nous arrêter une fois pour toutes, choisir nos variables et nous y tenir, cela serait bien facile.

Nous allons maintenant commencer à faire quelques déductions. De même que $F = ma$ est le centre de l'univers en mécanique, et que cela dit, tout se développe, et se développe, et se développe, de la même manière le principe que nous venons de trouver est tout ce qu'il y a en thermodynamique. Mais peut-on en tirer des conclusions?

* Nous avons précédemment défini notre échelle de température d'une manière différente, en disant que l'énergie cinétique moyenne d'une molécule dans un gaz parfait est proportionnelle à la température, ou que selon la loi du gaz parfait, pV est proportionnel à T . Est-ce que cette nouvelle définition est équivalente? Oui, puisque le résultat final (44.7) déduit de la loi des gaz est le même que celui que l'on vient d'établir. Nous reverrons ce point au chapitre suivant.

Nous commençons. Pour parvenir à notre première conclusion, nous allons combiner deux lois, la loi de conservation de l'énergie et cette loi qui relie les chaleurs Q_2 et Q_1 et nous pouvons facilement obtenir *le rendement d'une machine réversible*. De la première loi, nous avons $W = Q_1 - Q_2$. Selon notre nouveau principe,

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1,$$

ainsi le travail devient

$$W = Q_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (44.13)$$

ce qui nous donne le rendement de la machine – la quantité de travail que nous obtenons d'une certaine quantité de chaleur. Le rendement d'une machine est proportionnel à la différence des températures, entre lesquelles la machine fonctionne, divisée par la température la plus élevée :

$$\text{Rendement} = \frac{W}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (44.14)$$

Le rendement ne peut pas être plus grand que l'unité, et la température absolue ne peut pas être plus faible que zéro, le zéro absolu. Puisque T_2 doit être positif, le rendement est toujours inférieur à l'unité. C'est notre première conclusion.

44-6 L'entropie

L'équation (44.7) et (44.12) peut être interprétée d'une manière particulière. Utilisant toujours des machines réversibles, une chaleur Q_1 à la température T_1 est « équivalente » à Q_2 à la température T_2 si $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$, au sens où lorsque l'une des deux est absorbée, l'autre est fournie. Ceci suggère que si nous donnons un nom à Q/T , nous pouvons dire : dans un processus réversible, une égale quantité Q/T est absorbée et libérée ; il n'y a pas de perte ou de gain en Q/T . Ce Q/T est appelé *entropie* et nous disons, « Il n'y a pas de changement résultant de l'entropie dans un cycle réversible ». Si T vaut un degré, alors l'entropie est $Q/1^\circ$ ou, comme nous l'avons symbolisé, $Q_S/1^\circ = S$. En réalité, S est la lettre habituellement utilisée pour l'entropie, et celle-ci est numériquement égale à la chaleur (que nous avons appelée Q_S) délivrée à un réservoir à 1° (l'entropie n'est pas elle-même de la chaleur, c'est de la chaleur divisée par une température, elle est donc mesurée en *joules par degré*).

Il est maintenant intéressant de remarquer qu'à côté de la pression, qui est une fonction de la température et du volume, et de l'énergie interne, qui est une fonction de la température et du volume, nous avons trouvé une autre quantité qui est une fonction de l'état du système, à savoir l'entropie de la substance. Essayons d'expliquer comment nous la calculons et ce que nous voulons dire lorsque nous parlons d'une « fonction d'état ». Considérons le système dans deux conditions différentes de la même manière que ce que nous avons dans l'expérience où nous avons fait des détente adiabatiques et isothermes. (Incidentement, il n'est pas nécessaire qu'une machine thermique n'ait que deux réservoirs, elle peut en avoir trois ou quatre à des températures différentes auxquelles elle prend ou délivre de la chaleur, etc.) Nous pouvons nous déplacer sur un diagramme pV tout au long et passer d'une condition à une autre. En d'autres termes, nous pouvons dire que le gaz est dans une certaine condition a ,

et puis, qu'il passe dans une autre condition b , et nous posons comme condition que cette transition de a à b soit réversible. Supposons maintenant que tout le long de la trajectoire de a en b nous ayons des petits réservoirs à des températures différentes, de telle sorte que la chaleur dQ enlevée à la substance à chaque petite étape soit délivrée à chaque réservoir à la température correspondante à ce point sur la trajectoire. Puis relierons tous ces réservoirs, par des machines thermiques réversibles, à un seul réservoir à la température unité. Lorsque nous avons terminé de faire passer la substance de a en b , nous ramenons tous les réservoirs à leur état initial. Toute quantité de chaleur dQ qui a été prise à la substance à la température T a maintenant été convertie par une machine réversible, et une certaine quantité d'entropie dS a été fournie à la température unité:

$$dS = dQ/T. \quad (44.15)$$

Calculons la quantité totale d'entropie qui a été fournie. La différence d'entropie, ou l'entropie nécessaire pour aller de a en b par cette transformation réversible particulière, est l'entropie totale, le total de l'entropie prise à tous les petits réservoirs et fournie à la température unité:

$$S_b - S_a = \int_a^b \frac{dQ}{T}. \quad (44.16)$$

La question est de savoir si la différence d'entropie dépend de la trajectoire suivie. Il y a plus d'un chemin pour aller de a en b . Souvenez-vous que dans le cycle de Carnot nous pouvions aller de a en c sur la Figure 44-6 d'abord par une détente isotherme puis adiabatique; ou nous pouvions commencer par une détente adiabatique puis isotherme. Ainsi la question est de savoir si la modification d'entropie qui a lieu lorsque nous allons de a en b sur la Figure 44-10 est la même pour un des chemins que pour un autre. Elle doit être la même, car si nous parcourons tout le cycle, allant dans un sens sur une trajectoire et en sens inverse sur l'autre, nous avons une machine réversible, et il n'y a pas de pertes de chaleur au profit du réservoir à la température unité. Dans un cycle totalement réversible, aucune chaleur ne doit être prise au réservoir à température unité, et donc l'entropie

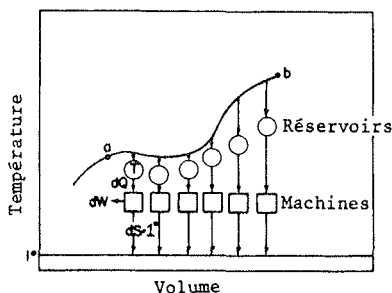


Fig. 44-10. Variation de l'entropie dans une transformation réversible.

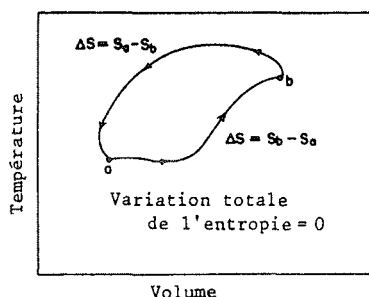


Fig. 44-11. Variation de l'entropie dans un cycle complètement réversible.

nécessaire pour aller de a en b est la même sur une trajectoire que sur une autre. Elle est *indépendante de la trajectoire*, et ne dépend que des extrémités. Nous pouvons, de ce fait, dire qu'il existe une certaine fonction que nous appelons l'entropie de la substance, qui ne dépend que de l'état de la substance, c'est-à-dire du volume et de la température.

Nous pouvons trouver une fonction $S(V, T)$ qui a la propriété que, si nous calculons le changement d'entropie, lorsque la substance est déplacée le long d'une trajectoire quelconque réversible, en fonction de la chaleur rejetée à la température unité, alors

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}, \quad (44.17)$$

où dQ est la chaleur prise à la substance à la température T . Ce changement total de l'entropie est égal à la différence entre l'entropie calculée aux points initial et final :

$$\Delta S = S(V_b, T_b) - S(V_a, T_a) = \int_a^b \frac{dQ}{T}. \quad (44.18)$$

Cette expression ne définit pas complètement l'entropie, mais plutôt la *différence* d'entropie entre deux conditions différentes. Ce n'est seulement que si nous pouvons évaluer l'entropie pour une condition particulière que nous pouvons réellement définir S de façon absolue.

Pendant longtemps, on pensa que l'entropie absolue ne voulait rien dire – que seules les différences pouvaient être définies – mais finalement Nernst proposa ce qu'il a appelé le *théorème de la chaleur*, qui est également appelé la troisième loi de thermodynamique. Elle est très simple. Nous dirons ce que c'est, mais nous n'expliquerons pas pourquoi elle est correcte. Le postulat de Nernst dit simplement que l'entropie de tout objet au zéro absolu est nulle. Nous connaissons maintenant un cas pour T et V , à savoir $T = 0$, où S est nul; et ainsi nous pouvons obtenir l'entropie à n'importe quel autre point.

Pour illustrer ces idées, calculons l'entropie d'un gaz parfait. Dans une détente isotherme (et donc réversible), $\int dQ/T$ vaut Q/T , puisque T est constant. De ce fait (à partir de 44.4) le changement d'entropie est

$$S(V_a, T) - S(V_b, T) = Nk \ln \frac{V_a}{V_b},$$

ainsi $S(V, T) = Nk \ln V$ plus une certaine fonction de T seulement. Comment S dépend-il de T ? Nous savons que pour une détente réversible et adiabatique, *aucune quantité de chaleur n'est échangée*. Ainsi l'entropie ne change pas, bien que V se modifie, pourvu que T se modifie également, de telle sorte que $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$. Pouvez-vous voir que ceci implique que

$$S(V, T) = Nk \left[\ln V + \frac{1}{\gamma - 1} \ln T \right] + a,$$

où a est une certaine constante indépendante à la fois de V et de T ? [a est appelée la constante chimique. Elle dépend du gaz en question, et peut être déterminée expérimentalement à partir du théorème de Nernst en mesurant la chaleur libérée en refroidissant et en condensant le gaz jusqu'à ce qu'il soit transformé en solide (ou pour l'hélium, en liquide) à 0°K , en intégrant

$\int dQ/T$. Il peut être également déterminé théoriquement par l'intermédiaire de la constante de Planck et de la mécanique quantique, mais nous n'étudierons pas ceci dans ce cours.]

Nous ferons maintenant quelques remarques sur les propriétés de l'entropie des corps. Souvenez-vous d'abord que si nous parcourons un cycle réversible de a en b , l'entropie de la substance changera de $S_b - S_a$. Et nous nous rappelons que lorsque nous parcourons la trajectoire, l'entropie – la chaleur fournie à la température unité – augmente selon la loi $dS = dQ/T$, où dQ est la chaleur que nous prenons à la substance lorsque la température est T .

Nous savons déjà que si nous avons un cycle réversible, l'entropie totale de l'ensemble n'est pas modifiée, parce que la chaleur Q_1 absorbée à T_1 et la chaleur Q_2 fournie à T_2 correspondent à des changements égaux et opposés d'entropie, de telle sorte que le changement total de l'entropie est nul. Ainsi, pour un cycle réversible il n'y a pas de changement d'entropie de quoi que ce soit, y compris les réservoirs. Cette règle peut ressembler à la conservation de l'énergie, mais cela ne l'est pas; elle ne s'applique qu'à des cycles réversibles. Si nous incluons les cycles irréversibles, il n'y a pas de loi de conservation de l'entropie.

Nous allons donner deux exemples. Premièrement, supposons que nous produisons un travail irréversible par frottement sur un objet, engendrant une chaleur Q sur un certain objet à la température T . L'entropie est augmentée de Q/T . La chaleur Q est égale au travail, et ainsi lorsque nous produisons une certaine quantité de travail par frottement contre un objet dont la température est T , l'entropie du monde entier augmente de W/T .

Un autre exemple d'irréversibilité est celui-ci : Si nous plaçons ensemble deux objets qui sont à des températures différentes, par exemple T_1 et T_2 , une certaine quantité de chaleur va d'elle-même s'écouler de l'un vers l'autre. Supposons, par exemple, que nous plaçons une pierre chaude dans l'eau froide. Lorsqu'une certaine quantité de chaleur ΔQ est transférée de T_1 à T_2 , de combien varie l'entropie de la pierre chaude? Elle décroît de $\Delta Q/T_1$. De combien varie l'entropie de l'eau? Elle augmente de $\Delta Q/T_2$. La chaleur va bien sûr ne s'écouler que de la température plus haute T_1 vers la température plus basse T_2 , de telle sorte que ΔQ est positif si T_1 est plus grand que T_2 . Ainsi le changement d'entropie du monde entier est positif et c'est la différence des deux fractions :

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_2} - \frac{\Delta Q}{T_1}. \quad (44.19)$$

Ainsi la proposition suivante est vraie : dans tout processus qui est irréversible, l'entropie du monde entier augmente. Ce n'est que dans les processus réversibles que l'entropie reste constante. Puisqu'aucun processus n'est absolument réversible, il y a toujours au moins un léger gain d'entropie; un processus réversible est une idéalisation par laquelle nous avons rendu minimum le gain de l'entropie.

Malheureusement, nous n'irons pas très loin dans le domaine de la thermodynamique. Notre objet est simplement d'en illustrer les idées principales et les raisons pour lesquelles il est possible de faire de telles démonstrations, mais nous n'utiliserons pas beaucoup la thermodynamique dans ce cours. La thermodynamique est utilisée très souvent par les ingénieurs et, particulièrement, par les chimistes. Aussi nous devons apprendre la pratique de la thermodynamique en chimie ou dans les études techniques. Comme ce n'est pas la peine de tout faire deux fois, nous nous limiterons à quelques discussions sur l'origine de la théorie, plutôt que de développer de nombreux détails concernant des applications particulières.

Tableau 44-1

Résumé des lois de la thermodynamique

Première loi:

Chaleur injectée dans un système + Travail réalisé sur un système = Augmentation de l'énergie interne du système:

$$dQ + dW = dU.$$

Deuxième loi:

Un processus dont le *seul* résultat, au total, consiste à prendre de la chaleur au réservoir et à la convertir en travail, est impossible.

Aucune machine thermique prenant une quantité de chaleur Q_1 à T_1 et délivrant la chaleur Q_2 à T_2 ne peut réaliser davantage de travail qu'une machine réversible, pour laquelle

$$W = Q_1 - Q_2 = Q_1 \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1} \right).$$

L'entropie d'un système est définie de cette manière:

- (a) Si la chaleur ΔQ est introduite de façon réversible dans un système à la température T , l'augmentation de l'entropie du système est $\Delta S = \Delta Q/T$.
- (b) A $T=0$, $S=0$ (troisième loi).

Dans un *changement réversible*, l'entropie totale de toutes les parties du système (y compris les réservoirs) ne change pas.

Dans un *changement irréversible*, l'entropie totale du système augmente toujours.

Les deux lois de la thermodynamique sont quelquefois énoncées ainsi:

Première loi: L'énergie de l'univers est toujours constante.

Deuxième loi: L'entropie de l'univers augmente toujours.

Ce n'est pas un excellent énoncé de la deuxième loi; il ne dit pas, par exemple, que dans un cycle réversible l'entropie reste la même, et il ne dit pas exactement ce qu'est l'entropie. Ce n'est qu'une manière intelligente de se rappeler les deux lois, mais cela ne nous dit pas exactement où nous en sommes. Nous avons résumé les lois discutées dans ce chapitre dans le Tableau 44-1. Au chapitre suivant, nous appliquerons ces lois pour découvrir la relation entre la chaleur engendrée lorsqu'on tire sur un ruban de caoutchouc, et la tension supplémentaire qui apparaît lorsqu'il est chauffé.

Illustrations de la thermodynamique

45-1 Énergie interne

45-2 Applications

45-3 L'équation de Clausius-Clapeyron

45-1 Énergie interne

La thermodynamique est une science qui, dans ses applications, est assez difficile et complexe et il n'est pas tout à fait dans notre but, dans ce cours, de pousser très loin son utilisation pratique. Le sujet est de très grande importance, bien sûr, pour les ingénieurs et les chimistes, et ceux qui sont intéressés par cette question peuvent apprendre la manière dont on l'applique en chimie physique ou dans la thermodynamique des ingénieurs. Il y a également de bons ouvrages de référence comme celui de Zemansky, *Chaleur et Thermodynamique*, où l'on peut approfondir cette question. Dans l'*Encyclopedia Britannica*, quatorzième édition, on peut trouver d'excellents articles sur la thermodynamique et sur la thermochimie, ainsi que dans l'article sur la chimie au paragraphe sur la chimie-physique, l'évaporation, la liquéfaction des gaz, etc.

Le sujet de la thermodynamique est compliqué parce qu'il y a beaucoup de manières différentes de décrire la même chose. Lorsque nous voulons décrire le comportement d'un gaz, nous pouvons dire que la pression dépend de la température et du volume, ou nous pouvons dire que le volume dépend de la température et de la pression. Ou pour l'énergie interne U , nous pouvons dire qu'elle dépend de la température et du volume, si ce sont les variables que nous avons choisies – mais nous pouvons également dire qu'elle dépend de la température et de la pression, ou de la pression et du volume, etc. Dans le chapitre précédent, nous avons introduit une autre fonction de la température et du volume, appelée l'entropie S , et nous pouvons bien sûr construire autant de fonctions de ces variables que nous voulons : $U - TS$ est une fonction de la température et du volume. Nous avons donc un grand nombre de quantités différentes qui peuvent être fonctions de différentes combinaisons de variables.

Dans ce chapitre, par souci de simplicité, nous déciderons dès le départ d'utiliser la *température* et le *volume* comme variables indépendantes. Les chimistes emploient la température et la pression, parce qu'elles sont plus faciles à mesurer et à contrôler dans les expériences chimiques, mais nous emploierons la température et le volume tout le long de ce chapitre, à l'exception d'un endroit où nous verrons comment faire une transformation pour nous ramener au système de variables des chimistes.

Nous ne considérons donc qu'un seul système de variables indépendantes: la température et le volume. Deuxièmement, nous ne discuterons que deux fonctions dépendantes: l'énergie interne et la pression. Toutes les autres fonctions peuvent être déduites de celles-ci, et il n'est donc pas nécessaire de les traiter. Avec ces limites, la thermodynamique est encore un sujet assez difficile, mais ce n'est pas aussi impossible qu'on le dit!

D'abord, nous allons revoir un peu de calcul mathématique. Lorsqu'une quantité est fonction de deux variables, la notion de dérivée de cette quantité nécessite un petit peu plus d'attention que dans le cas où il n'y a qu'une variable. Que voulons-nous dire par dérivée de la pression par rapport à la température? Le changement de pression accompagnant un changement de température dépend en partie, bien sûr, de ce qui se passe pour le *volume* lorsque *T* change. Nous devons préciser le changement de *V* avant que le concept d'une dérivée par rapport à *T* ne possède une signification précise. Nous pouvons poser, par exemple, pour le taux de changement de *P* par rapport à *T*, que *V* soit maintenu constant. Ce rapport est alors simplement la dérivée habituelle que nous écrivons habituellement dP/dT . Nous utilisons d'habitude un symbole spécial $\partial P/\partial T$, pour nous rappeler que *P* dépend d'une autre variable *V* en plus de *T*, et que cette autre variable est maintenue constante. Nous n'utiliserons pas simplement le symbole ∂ pour attirer l'attention sur le fait que l'autre variable est maintenue constante, mais nous écrirons également la variable qui est maintenue constante sous forme d'indice, $(\partial P/\partial T)_V$. Puisque nous n'avons que deux variables indépendantes, cette notation est superflue, mais elle nous permet de garder l'esprit clair dans la jungle thermodynamique des dérivées partielles.

Supposons que la fonction $f(x, y)$ dépende de deux variables indépendantes *x* et *y*. Par $(\partial f/\partial x)_y$ nous voulons dire simplement la dérivée ordinaire, obtenue de la manière usuelle, si nous traitons *y* comme une constante:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

De la même manière nous définissons

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Par exemple, si $f(x, y) = x^2 + yx$, alors $(\partial f/\partial x)_y = 2x + y$, et $(\partial f/\partial y)_x = x$. Nous pouvons étendre ces idées à des dérivées d'ordre plus élevé: $\partial^2 f/\partial y^2$ ou $\partial^2 f/\partial y \partial x$. Ce dernier symbole indique que nous différencions *f* d'abord par rapport à *x*, traitant *y* comme une constante, puisque nous différencions le résultat par rapport à *y*, traitant *x* comme une constante. L'ordre réel de différenciation n'a pas d'importance: $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x$.

Nous aurons besoin de calculer le changement Δf de $f(x, y)$ lorsque *x* se transforme en $x + \Delta x$ et *y* se transforme en $y + \Delta y$. Nous supposons dans la suite que Δx et Δy sont infiniment petits:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= \underbrace{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}_{\Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y} + \underbrace{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}_{\Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x} \end{aligned} \quad (45.1)$$

La dernière équation est la relation fondamentale qui exprime Δf en fonction de Δx et Δy .

Comme exemple de l'utilisation de cette relation, calculons le changement de l'énergie interne $U(T, V)$ lorsque la température passe de T à $T + \Delta T$ et le volume de V à $V + \Delta V$. Utilisant l'équation (45.1), nous écrivons

$$\Delta U = \Delta T \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \Delta V \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T. \quad (45.2)$$

Dans notre chapitre précédent, nous avons trouvé une autre expression de la variation ΔU de l'énergie interne lorsqu'une quantité de chaleur ΔQ était ajoutée au gaz :

$$\Delta U = \Delta Q - P \Delta V. \quad (45.3)$$

En comparant l'équation (45.2) et l'équation (45.3) on peut être amené à penser que $P = (\partial U / \partial V)_T$, mais ceci n'est pas correct. Pour obtenir la relation correcte, supposons d'abord que nous ajoutons une quantité de chaleur ΔQ au gaz, tout en maintenant son volume constant, de telle sorte que $\Delta V = 0$. Avec $\Delta V = 0$, l'équation (45.3) nous dit que $\Delta U = \Delta Q$, et l'équation (45.2) nous dit que $\Delta U = (\partial U / \partial T)_V \Delta T$, de telle sorte que $(\partial U / \partial T)_V = \Delta Q / \Delta T$. Le rapport $\Delta Q / \Delta T$, la quantité de chaleur que l'on doit injecter dans une substance afin de modifier sa température de un degré, tandis que son volume est maintenu constant, est appelée la *chaleur spécifique à volume constant* et est désignée par le symbole C_v . Par ce raisonnement, nous avons montré que

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = C_v. \quad (45.4)$$

Ajoutons à nouveau au gaz une quantité de chaleur ΔQ , mais cette fois-ci en maintenant T constant et permettons au volume de changer de ΔV . L'analyse dans ce cas est plus complexe, mais nous pouvons calculer ΔU par la démonstration de Carnot, utilisant le cycle de Carnot que nous avons introduit au chapitre précédent.

Le diagramme pression-volume du cycle de Carnot est montré sur la Figure 45-1. Comme nous l'avons déjà montré, la quantité totale de travail réalisé par le gaz dans un cycle réversible est $\Delta Q(\Delta T / T)$, où ΔQ est la quantité d'énergie thermique ajoutée au gaz lorsqu'il se détend d'une manière isotherme à la température T du volume V à $V + \Delta V$, et où $T - \Delta T$ est la température finale atteinte par le gaz lorsqu'il se détend adiabatiquement sur la deuxième branche du cycle. Maintenant, nous allons montrer que ce travail produit est également donné par

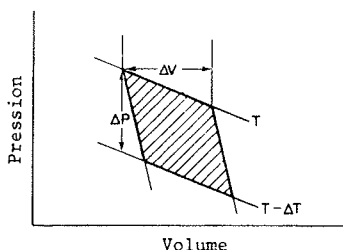


Fig. 45-1. Diagramme pression-volume pour un cycle de Carnot. Les courbes indiquées par T et $T - \Delta T$ sont des courbes isothermes; les courbes plus inclinées sont des droites adiabatiques. ΔV est la variation du volume lorsque la quantité de chaleur ΔQ est ajoutée au gaz à la température constante T . ΔP est la variation de pression à volume constant lorsque la température du gaz passe de T à $T - \Delta T$.

la surface hachurée sur la Figure 45-1. Pour des conditions quelconques, le travail réalisé par le gaz est $\int P dV$, et il est positif lorsque le gaz se détend et négatif lorsque le gaz est comprimé. Si nous traçons P en fonction de V , la variation de P et V est représentée par la courbe qui donne la valeur de P correspondant à une valeur particulière de V . Lorsque le volume change d'une valeur à une autre, le travail réalisé par le gaz, l'intégrale $\int P dV$, est la surface sous la courbe reliant les valeurs initiale et finale de V . Lorsque nous appliquons ceci au cycle de Carnot, nous voyons que lorsque nous parcourons le cycle, tenant compte du signe du travail réalisé par le gaz, le travail réalisé par le gaz est simplement égal à la surface hachurée sur la Figure 45-1.

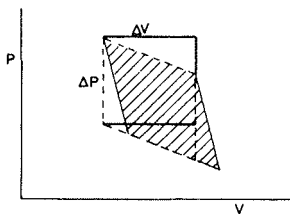


Fig. 45-2. Aire hachurée = Aire bordée par les lignes en pointillé = Aire du rectangle = $\Delta P \Delta V$.

Nous voulons maintenant évaluer géométriquement la surface hachurée. Le cycle que nous avons utilisé à la Figure 45-1 diffère de celui du chapitre précédent en ceci que nous supposons maintenant que ΔT et ΔQ sont infiniment petits. Nous travaillons entre des lignes adiabatiques et des lignes isothermes qui sont très proches les unes des autres, et la figure décrite par les lignes épaisses sur la Figure 45-1 se rapproche d'un parallélogramme lorsque les écarts ΔT et ΔQ s'approchent de zéro. La surface de ce parallélogramme est simplement $\Delta V \Delta P$, où ΔV est le changement de volume se produisant lorsque l'énergie ΔQ est ajoutée au gaz à température constante, et ΔP est le changement de pression lorsque la température varie de ΔT à volume constant. On peut facilement montrer que la surface hachurée sur la Figure 45-1 est donnée par $\Delta V \Delta P$, en reconnaissant que la surface hachurée est égale à la surface dont les contours sont les lignes en pointillé sur la Figure 45-2, qui à son tour ne diffère du rectangle construit sur ΔP et ΔV que de l'addition et de la soustraction de surfaces triangulaires égales sur la Figure 45-2.

Résumons maintenant les résultats du raisonnement que nous avons développé jusqu'à présent :

$$\left. \begin{aligned} \text{Travail réalisé par le gaz} &= \text{surface hachurée} = \Delta V \Delta P = \Delta Q \left(\frac{\Delta T}{T} \right) \\ \text{ou} \quad \frac{\Delta T}{T} \cdot (\text{chaleur nécessaire pour faire varier } V \text{ de } \Delta V)_{T_{\text{constant}}} \\ \text{ou} \quad &= \Delta V \cdot (\text{changement de } P \text{ lorsque } T \text{ varie de } \Delta T)_{V_{\text{constant}}} \\ &= \frac{1}{\Delta V} \cdot (\text{chaleur nécessaire pour faire varier } V \text{ de } \Delta V)_{T = T(\partial P / \partial T)_V} \end{aligned} \right\} \quad (45.5)$$

L'équation (45.5) exprime le résultat essentiel du raisonnement de Carnot. Toute la

thermodynamique peut être déduite de l'équation (45.5) et de la Première Loi, qui est contenue dans l'équation (45.3). L'équation (45.5) est essentiellement la Deuxième Loi, bien qu'elle ait été originellement établie par Carnot sous une forme légèrement différente, puisqu'il n'utilisait pas notre définition de la température.

Nous pouvons maintenant calculer $(\partial U/\partial V)_T$. De combien l'énergie interne U va-t-elle changer si nous modifions le volume de ΔV ? U change d'abord parce que de la chaleur est injectée, et ensuite U change parce que du travail est produit. La chaleur injectée est

$$\Delta Q = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \Delta V,$$

d'après l'équation (45.5), et le travail réalisé sur la substance vaut $-P \Delta V$. De ce fait, la variation ΔU de l'énergie interne comprend deux parties :

$$\Delta U = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \Delta V - P \Delta V. \quad (45.6)$$

Divisant les deux côtés par ΔV , nous trouvons le taux de variation de U par rapport à V à T constant :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P. \quad (45.7)$$

Dans notre thermodynamique, dans laquelle T et V sont les seules variables et P et U sont les seules fonctions, les équations (45.3) et (45.7) sont les équations de base à partir desquelles tous les résultats peuvent être établis.

45-2 Applications

Examinons maintenant la signification de l'équation (45.7) et voyons pourquoi elle répond aux questions que nous nous sommes posées au chapitre précédent. Nous avons considéré le problème suivant : dans la théorie cinétique il est évident qu'une augmentation de la température conduit à une augmentation de la pression, à cause du bombardement des atomes sur un piston. Pour la même raison physique, lorsque nous laissons le piston reculer, de la chaleur est prise au gaz et, pour maintenir la température constante, il faut réinjecter de la chaleur. Le gaz se refroidit lorsqu'il se détend, et la pression augmente lorsqu'il est chauffé. Il doit y avoir une certaine relation entre ces deux phénomènes et cette relation est donnée explicitement dans l'équation (45.7). Si nous maintenons le volume fixe et augmentons la température, la pression augmente à un taux $(\partial P/\partial T)_V$. A ce fait il faut relier ceci : si nous augmentons le volume, le gaz va se refroidir tant que nous n'injectons pas une certaine quantité de chaleur afin de maintenir la température constante, et $(\partial U/\partial V)_T$ nous dit la quantité de chaleur nécessaire pour maintenir la température. L'équation (45.7) exprime la relation fondamentale entre ces deux effets. C'est ce que nous avons promis de trouver lorsque nous avons abordé les lois de la thermodynamique. Sans connaître le mécanisme interne du gaz, et sachant seulement que nous ne pouvons réaliser le mouvement perpétuel de deuxième espèce, nous pouvons établir la relation entre la quantité de chaleur nécessaire pour maintenir la température constante lorsque le gaz se détend, et la variation de pression lorsque le gaz est chauffé!

Maintenant que nous avons le résultat que nous voulions pour un gaz, considérons le ruban de caoutchouc. Lorsque nous tirons un ruban de caoutchouc, nous trouvons que sa température diminue et lorsque nous chauffons un ruban de caoutchouc, nous trouvons qu'il se contracte. Quelle est l'équation qui donne, pour un ruban de caoutchouc, une relation analogue à l'équation (45.3) pour un gaz? Pour un ruban de caoutchouc on aura quelque chose comme ceci: lorsque la chaleur ΔQ est introduite, l'énergie interne est modifiée de ΔU et un certain travail est réalisé. La seule différence sera que le travail réalisé par le ruban de caoutchouc est $-F \Delta L$ au lieu de $P \Delta V$, où F est la force sur le ruban et L la longueur du ruban. La force F est une fonction de la température et de la longueur du ruban. Remplaçant $P \Delta V$ dans l'équation (45.3) par $-F \Delta L$, nous obtenons

$$\Delta U = \Delta Q + F \Delta L \quad (45.8)$$

Comparant les équations (45.3) et (45.8), nous voyons que l'équation du ruban de caoutchouc est obtenue par une simple substitution d'une lettre à une autre. De plus, si nous substituons L à V , et $-F$ à P , toute notre discussion du cycle de Carnot s'applique au ruban de caoutchouc. Nous pouvons immédiatement déduire, par exemple, que la chaleur ΔQ nécessaire pour changer la longueur ΔL est donnée par l'analogue de l'équation (45.5): $\Delta Q = -T(\partial F/\partial T)_L \Delta L$. Cette équation nous dit que si nous maintenons fixe la longueur d'un ruban de caoutchouc et chauffons le ruban, nous pouvons calculer de combien la force va augmenter en fonction de la chaleur nécessaire pour maintenir la température constante lorsque le ruban est un petit peu étiré. Ainsi nous voyons que la même équation s'applique à la fois à un gaz et à un ruban de caoutchouc. En fait, si nous pouvons écrire $\Delta U = \Delta Q + A \Delta B$, où A et B représentent différentes quantités, la force et la longueur, la pression et le volume, etc., on peut appliquer les résultats obtenus pour un gaz en substituant A et B à P et V . Considérons par exemple la différence de potentiel électrique ou « tension » E dans une pile et la charge ΔZ qui traverse la pile. Nous savons que le travail réalisé dans une cellule électrique réversible, comme un accumulateur, vaut $E \Delta Z$. (Puisque nous n'incluons pas de terme $P \Delta V$ dans le travail, nous supposons que notre batterie est maintenue à volume constant.) Voyons ce que la thermodynamique peut nous dire sur les performances de la pile. Si nous substituons E à P et Z à V dans l'équation (45.6), nous obtenons

$$\frac{\Delta U}{\Delta Z} = -T \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_Z - E. \quad (45.9)$$

L'équation (45.9) nous dit que l'énergie interne U est modifiée lorsque une charge ΔZ traverse la pile. Pourquoi $\Delta U/\Delta Z$ n'est-il pas simplement la tension E de la pile? La réponse est qu'une pile réelle s'échauffe lorsqu'une charge la traverse. L'énergie interne de la pile est modifiée, d'abord, parce que la pile réalise un certain travail dans le circuit extérieur, deuxièmement, parce que la batterie est chauffée. Un fait remarquable est que cette deuxième partie peut également être exprimée en fonction de la manière dont la tension de la pile change avec la température. Incidemment, lorsque la charge traverse la pile, des réactions chimiques se produisent et l'équation (45.9) suggère une manière simple de mesurer la quantité d'énergie nécessaire pour produire une réaction chimique. Tout ce dont nous avons besoin est de construire une pile qui fonctionne sur cette réaction, mesurer la tension, et mesurer la variation de la tension avec la température lorsque nous n'extrayons aucune charge de la pile!

Nous avons supposé que le volume de la pile peut être maintenu constant, puisque nous avons omis le terme $P\Delta V$ lorsque nous avons écrit que le travail réalisé par la pile était égal à $E\Delta Z$. Il apparaît techniquement assez difficile de maintenir le volume constant. Il est bien plus facile de maintenir la pile à pression atmosphérique constante. Pour cette raison, les chimistes n'aiment aucune des équations que nous avons écrites ci-dessus: ils préfèrent des équations qui décrivent des performances à *pression* constante. Nous avons choisi au début de ce chapitre d'employer V et T comme variables indépendantes. Les chimistes préfèrent P et T , et nous allons maintenant considérer comment les résultats que nous avons obtenus jusqu'à présent peuvent être transformés dans le système de variables des chimistes. Souvenez-vous que dans le traitement qui va suivre la confusion peut facilement apparaître parce que nous avons modifié nos batteries en passant de T et V à T et P .

Nous sommes partis de l'équation (45.3) avec $\Delta U = \Delta Q - P\Delta V$; $P\Delta V$ peut être remplacé par $E\Delta Z$ ou $A\Delta B$. Si nous pouvions d'une manière ou d'une autre remplacer le dernier terme, $P\Delta V$, par $V\Delta P$, alors nous aurions échangé V et P , et les chimistes seraient contents. Bien, quelqu'un d'astucieux remarqua que la différentielle du produit PV vaut $d(PV) = P dV + V dP$, et qu'en additionnant cette quantité à l'équation (45.3), il obtenait

$$\begin{array}{rcl} \Delta(PV) & = & P\Delta V + V\Delta P \\ \Delta U & = & \Delta Q - P\Delta V \\ \hline \Delta(U + PV) & = & \Delta Q + V\Delta P \end{array}$$

Afin que ce résultat ressemble à l'équation (45.3), nous définissons $U + PV$ comme étant quelque chose de nouveau, que nous appelons l'*enthalpie*, H , et nous écrivons $\Delta H = \Delta Q + V\Delta P$.

Nous sommes maintenant prêts à transformer nos résultats dans le langage des chimistes à l'aide des règles suivantes: $U \rightarrow H$, $P \rightarrow -V$, $V \rightarrow P$. Par exemple, la relation fondamentale que les chimistes utilisent au lieu de l'équation (45.7) est

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - V.$$

On voit maintenant clairement comment on peut passer de nos variables aux variables des chimistes P et T . Revenons maintenant à nos variables initiales: pour le reste de ce chapitre, T et V sont les variables indépendantes.

Appliquons maintenant les résultats que nous avons obtenus à un certain nombre de cas physiques. Considérons d'abord le gaz parfait. Par la théorie cinétique nous savons que l'énergie interne d'un gaz ne dépend que du mouvement des molécules et du nombre des molécules. L'énergie interne dépend de T , mais pas de V . Si nous changeons V , tout en maintenant T constant, U ne change pas. De ce fait, $(\partial U/\partial V)_T = 0$, et l'équation (45.7) nous dit que pour un gaz parfait

$$T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P = 0. \quad (45.10)$$

L'équation (45.10) est une équation différentielle qui peut nous dire quelque chose sur P . Nous tenons compte de dérivées partielles de la manière suivante: Puisque la dérivée partielle est à volume constant V , remplaçons la dérivée partielle par une dérivée

ordinaire et écrivons explicitement « V constant » pour nous le rappeler. L'équation (45.10) devient alors

$$T \frac{\Delta P}{\Delta T} - P = 0; \quad V \text{ constant}, \quad (45.11)$$

que nous pouvons intégrer pour obtenir

$$\begin{aligned} \text{Log } P &= \ln T + \text{cons}; & V \text{ constant}, \\ P &= \text{cons} \times T; & V \text{ constant}. \end{aligned} \quad (45.12)$$

Nous savons que pour un gaz parfait la pression est égale à

$$P = \frac{RT}{V}, \quad (45.13)$$

ce qui est en accord avec (45.12), puisque V et R sont constants. Pourquoi nous sommes-nous préoccupés de faire ces calculs si nous connaissons déjà le résultat? Parce que nous avons utilisé *deux définitions indépendantes de la température!* Une première fois nous avons supposé que l'énergie cinétique des molécules était proportionnelle à la température, une hypothèse qui définit une échelle de température que nous appellerons l'échelle des gaz parfaits. Le T de l'équation (45.13) est basé sur une échelle des gaz. Nous appelons également les températures mesurées sur l'échelle des gaz des températures *cinétiques*. Plus tard, nous avons défini la température d'une deuxième manière complètement indépendante de n'importe quelle substance. A partir de raisonnements basés sur la Deuxième Loi nous avons défini ce que nous pouvons appeler « la température thermodynamique absolue » T , le T qui apparaît dans l'équation (45.12). Nous avons prouvé ici que la pression d'un gaz parfait (défini comme un gaz pour lequel l'énergie interne ne dépend pas du volume) est proportionnelle à la température thermodynamique absolue. Nous savons également que la pression est proportionnelle à la température mesurée sur l'échelle des gaz. Nous pouvons donc déduire que la température cinétique est proportionnelle à la « température thermodynamique absolue ». Cela signifie, bien sûr, que si nous sommes judicieux, nous pouvons faire s'accorder les deux échelles. Dans ce cas, au moins, les deux échelles *ont* été choisies de telle sorte qu'elles coïncident; on a choisi la constante de proportionnalité égale à 1. La plupart du temps, l'homme se choisit des difficultés, mais dans ce cas il a rendu les échelles égales.

45-3 L'équation de Clausius-Clapeyron

La vaporisation d'un liquide est une autre application des résultats que nous avons établis. Supposez que nous ayons un certain liquide dans un cylindre, tel que nous puissions le comprimer en poussant sur le piston, et que nous nous demandions, « Si nous maintenons constante la température, comment varie la pression avec le volume? » En d'autres termes, nous voulons tracer une ligne isotherme sur le diagramme P - V . La substance dans le cylindre n'est pas le gaz parfait que nous avons considéré précédemment; elle peut être dans la phase liquide ou dans la phase vapeur ou les deux phases peuvent être présentes. Si nous appliquons une pression suffisante, la substance va se condenser à l'état liquide. Si nous appuyons encore plus fort, le volume ne changera que

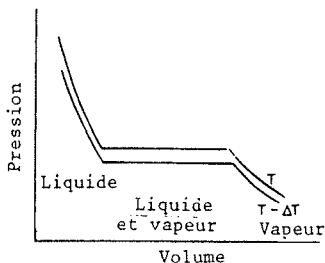


Fig. 45-3. Lignes isothermes pour une vapeur condensable comprimée dans un cylindre. A gauche, la substance se trouve en phase liquide. A droite, la substance est vaporisée. Au centre, le liquide et la vapeur se trouvent ensemble dans le cylindre.

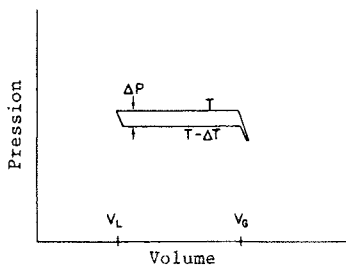


Fig. 45-4. Diagramme pression-volume pour un cycle de Carnot avec de la vapeur condensable dans le cylindre. A gauche, la substance se trouve à l'état liquide. Une quantité de chaleur L est ajoutée à la température T pour vaporiser le liquide. La vapeur se détend adiabatiquement lorsque T se transforme en $T - \Delta T$.

très peu et notre ligne isotherme monte rapidement tandis que le volume décroît, comme on le voit sur la gauche de la Figure 45-3.

Si nous augmentons le volume en tirant le piston, la pression tombe jusqu'à ce que nous atteignons le point où le liquide commence à bouillir, et la vapeur commence alors à se former. Si nous tirons le piston encore plus loin, tout ce qui se passe est une plus grande vaporisation du liquide. Lorsqu'il y a en partie du liquide et en partie de la vapeur dans le cylindre, les deux phases sont en équilibre — le liquide s'évapore et la vapeur se condense au même taux. Si nous accordons davantage de place à la vapeur, il faut plus de vapeur pour maintenir la pression, ce qui fait qu'un peu plus de liquide s'évapore, mais la pression reste constante. Sur la partie plate de la courbe à la Figure 45-3, la pression ne change pas et la valeur de la pression à cet endroit est appelée la *pression de vapeur à la température T* . Lorsque nous continuons d'augmenter le volume, il arrive un moment où il n'y a plus de liquide à évaporer. A ce point, si nous augmentons le volume davantage, la pression va diminuer comme pour un gaz ordinaire, comme on le voit à droite du diagramme P - V . La courbe la plus basse de la Figure 45-3 est la ligne isotherme à une température légèrement plus basse $T - \Delta T$. La pression dans la phase liquide est légèrement réduite parce que le liquide se dilate lorsque la température augmente (c'est le cas de la plupart des substances, mais pas pour l'eau près du point de congélation) et, bien sûr, la pression de vapeur est plus faible à une température plus basse.

Nous allons maintenant former un cycle avec deux lignes isothermes en les reliant (par exemple par des lignes adiabatiques) aux extrémités des sections plates, comme indiqué sur la Figure 45-4. La petite pointe au niveau de l'angle de droite le plus bas n'a pas d'importance et nous la négligerons. Nous allons utiliser l'argument de Carnot, qui nous dit que la chaleur donnée à la substance, lors de sa transformation de l'état liquide à l'état de vapeur, est reliée au travail produit par la substance lorsqu'elle parcourt le cycle. Soit L la chaleur nécessaire pour vaporiser la substance dans le cylindre. Comme dans le raisonnement immédiatement précédent l'équation (45.5), nous savons que $L(\Delta T/T) = \text{travail}$

réalisé par la substance. Comme précédemment, le travail réalisé par la substance est égal à la surface hachurée qui vaut approximativement $\Delta P(V_G - V_L)$, où ΔP est la différence des pressions de vapeur aux deux températures T et $T - \Delta T$, V_G est le volume du gaz, et V_L le volume du liquide, les deux volumes étant mesurés à la pression de vapeur. Écrivant que ces deux expressions pour la surface sont égales, nous obtenons $L\Delta T/T = \Delta P(V_G - V_L)$, ou

$$\frac{L}{T(V_G - V_L)} = (\partial P_{\text{vap}}/\partial T). \quad (45.14)$$

L'équation (45.14) donne la relation entre le taux de changement de la pression de vapeur avec la température et la quantité de chaleur nécessaire pour vaporiser le liquide. Cette relation fut établie par Carnot, mais est appelée l'équation de Clausius-Clapeyron.

Comparons maintenant l'équation (45.14) avec le résultat déduit de la théorie cinétique. Habituellement V_G est beaucoup plus grand que V_L . Ce qui fait que $V_G - V_L \approx V_G = RT/P$ par mole. Si nous supposons de plus que L est une constante, indépendante de la température – ce qui n'est pas une très bonne approximation – alors nous aurons $\partial P/\partial T = L/(RT^2P)$. La solution de cette équation différentielle est

$$P = \text{const } e^{-L/RT}. \quad (45.15)$$

Comparons ceci avec la variation de pression avec la température, que nous avons déduite précédemment de la théorie cinétique. La théorie cinétique indiquait la possibilité, au moins grossièrement, que le nombre de molécules de vapeur au-dessus d'un liquide soit

$$n = \left(\frac{1}{V_A}\right) e^{-(U_G - U_L)/RT}, \quad (45.16)$$

où $U_G - U_L$ est l'énergie interne par mole dans le gaz moins l'énergie interne par mole dans le liquide, c'est-à-dire l'énergie nécessaire pour vaporiser une mole de liquide. L'équation (45.15) de la thermodynamique et l'équation (45.16) de la théorie cinétique sont très étroitement reliées parce que la pression est nkT , mais elles ne sont pas exactement les mêmes. Cependant, elles deviennent exactement les mêmes si nous supposons que $L - U_G = \text{constante}$, au lieu de $L = \text{constante}$. Si nous supposons $L - U_G = \text{constante}$, indépendante de la température, alors la démonstration conduisant à l'équation (45.15) produira l'équation (45.16).

Cette comparaison montre les avantages et désavantages de la thermodynamique sur la théorie cinétique: D'abord l'équation (45.14) obtenue par la thermodynamique est exacte, tandis que l'équation (45.16) peut seulement être approchée, lorsque par exemple U est pratiquement constant, et si le modèle est correct. Deuxièmement, nous pouvons ne pas comprendre correctement comment le gaz passe à l'état liquide; néanmoins, l'équation (45.14) est exacte, tandis que l'équation (45.16) est seulement approchée. Troisièmement, bien que notre traitement s'applique à un gaz se condensant en liquide, la démonstration vaut pour n'importe quel changement d'état. Par exemple, la transition solide-liquide a le même type de courbe que celle montrée sur les Figures 45-3 et 45-4. Introduisant la chaleur latente de fusion M/mole , la formule analogue à l'équation (45.14) est alors $(\partial P_{\text{fusion}}/\partial T) = M/[T(V_{\text{liquide}} - V_{\text{solide}})]$. Bien que nous puissions ne pas comprendre la théorie cinétique du processus de fusion, nous avons néanmoins une équation correcte.

Cependant lorsque nous *pouvons* comprendre la théorie cinétique, nous avons un autre avantage. L'équation (45.14) est simplement une relation différentielle et nous n'avons aucun moyen d'obtenir les constantes d'intégration. Dans la théorie cinétique, nous pouvons également obtenir les constantes si nous avons un bon modèle qui décrit le phénomène complètement. Ainsi, il y a des avantages et des inconvénients dans chacune des méthodes. Lorsque nos connaissances sont faibles et que les phénomènes sont compliqués, les relations thermodynamiques sont réellement les plus puissantes. Lorsque la situation est très simple et qu'une analyse théorique peut être faite, alors il est préférable d'essayer d'obtenir davantage d'informations d'une analyse théorique.

Un exemple supplémentaire: le rayonnement du corps noir. Nous avons déjà traité le cas d'une boîte contenant un rayonnement et rien d'autre. Nous avons parlé de l'équilibre entre l'oscillateur et le rayonnement. Nous avons également trouvé que les photons frappant les parois de la boîte exercent la pression P , et nous avons trouvé que $PV = U/3$, où U est l'énergie totale de tous les photons et V le volume de la boîte. Si nous substituons $U = 3pV$ dans l'équation de base (45.7), nous trouvons

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 3P = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P. \quad (45.17)$$

Puisque le volume de notre boîte est constant, nous pouvons remplacer $(\partial P/\partial T)_V$ par dP/dT pour obtenir une équation différentielle ordinaire que nous pouvons intégrer: $\ln P = 4 \ln T + \text{constante}$, ou $P = \text{constante} \times T^4$. La pression de rayonnement varie comme la quatrième puissance de la température, et le contenu d'énergie du rayonnement, $U/V = P/3$, varie également comme T^4 . Il est habituel d'écrire $U/V = (4\sigma/c)T^4$, où c est la vitesse de la lumière et σ est une constante. Il n'est pas possible d'obtenir σ à partir de la thermodynamique seulement. Voici un bon exemple de sa puissance et de ses limites. Savoir que U/V varie comme T^4 est déjà énorme, mais savoir quelle est la vraie grandeur de U/V , à une température quelconque, nécessite que nous obtenions quelques détails que seule une théorie complète peut fournir. Pour le rayonnement du corps noir, nous avons une telle théorie, et nous pouvons déduire une expression de la constante σ de la manière suivante.

Soit $I(\omega)d\omega$ la distribution d'intensité, le flux d'énergie au travers de 1 m^2 en une seconde, à une fréquence comprise entre ω et $\omega + d\omega$. La distribution de densité d'énergie = énergie/volume = $I(\omega)d\omega/c$, est

$$\begin{aligned} \frac{U}{V} &= \text{densité de l'énergie totale} \\ &= \int_{\omega=0}^{\infty} \text{de la densité de l'énergie entre } \omega \text{ et } \omega + d\omega \\ &= \int_0^{\infty} \frac{I(\omega) d\omega}{c}. \end{aligned}$$

De notre analyse précédente, nous savons que

$$I(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar \omega / kT} - 1)}.$$

Substituant cette expression à $I(\omega)$ dans notre équation pour U/V , nous obtenons

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{e^{\hbar \omega / kT} - 1}.$$

Si nous substituons $x = \hbar \omega / kT$, l'expression devient

$$\frac{U}{V} = \frac{(kT)^4}{\hbar^3 \pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Cette intégrale est simplement un certain nombre que nous pouvons obtenir, approximativement, en traçant une courbe et en prenant la surface en comptant des carrés. Ce nombre est approximativement 6,5. Les mathématiciens parmi nous peuvent montrer que l'intégrale est exactement $\pi^4/15$.* Comparant cette expression avec $U/V = (4\sigma/c)T^4$, nous trouvons

$$\sigma = \frac{k^4 \pi^2}{60 \hbar^3 c^2} = 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{Watts}}{(\text{mètre})^2 (\text{degré})^4}.$$

Si nous faisons un petit trou dans notre boîte, quelle quantité d'énergie va-t-il s'écouler par seconde au travers du trou de surface unité? Pour passer de la densité d'énergie au flux d'énergie, nous multiplions la densité d'énergie U/V par c . Nous multiplions également par $\frac{1}{4}$, ce qui vient de ceci: premièrement, un facteur $\frac{1}{2}$, parce que seule l'énergie qui s'écoule vers l'extérieur peut *sortir* et deuxièmement, un autre facteur $\frac{1}{2}$, parce que l'énergie qui s'approche du trou faisant un angle avec la normale est moins efficace, en traversant le trou d'un facteur cosinus. La valeur moyenne du cosinus est $\frac{1}{2}$. On voit maintenant pourquoi nous écrivons $U/V = (4\sigma/c)T^4$: c'est pour pouvoir finalement dire que le flux sortant d'un petit trou vaut σT^4 par unité de surface.

* Puisque $(e^x - 1)^{-1} = e^{-x} + e^{-2x} + \dots$, l'intégrale est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-nx} x^3 dx.$$

Mais $\int_0^\infty e^{-nx} dx = 1/n$, et en dérivant trois fois par rapport à n on obtient $\int_0^\infty x^3 e^{-nx} dx = 6/n^4$, ainsi l'intégrale est $6(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots)$ et une bonne approximation vient de l'addition des quelques premiers termes. Au Chapitre 50 nous trouverons une manière de montrer que la somme de l'inverse des quatrième puissances des nombres entiers vaut, en fait, $\pi^4/90$.)

L'encliquetage à rochet

46-1 Comment fonctionne une roue à rochet	46-3 Réversibilité en mécanique
46-2 La roue à rochet en tant que machine	46-4 Irréversibilité
	46-5 Ordre et entropie
-

46-1 Comment fonctionne une roue à rochet

Dans ce chapitre nous discutons l'encliquetage à rochet, un procédé très simple qui permet à un axe de ne tourner que dans un sens. La possibilité de ne faire tourner quelque chose que dans un seul sens nécessite une analyse assez détaillée et attentive, et on découvre certaines conséquences extrêmement intéressantes.

Le plan de la discussion nous est venu à l'idée en essayant de trouver une explication élémentaire, du point de vue moléculaire ou cinétique, du fait qu'il y a une quantité de travail maximum qui peut être extraite d'une machine thermique. Bien entendu, nous avons vu l'essentiel de la démonstration de Carnot, mais ce serait agréable de trouver une explication qui serait élémentaire au sens où nous pourrions voir ce qui se passe physiquement. Bien entendu, il y a des démonstrations mathématiques compliquées qui partent des lois de Newton, et montrent qu'on ne peut obtenir qu'une certaine quantité de travail lorsque la chaleur s'écoule d'un endroit à un autre, mais il est extrêmement difficile de convertir ceci en une démonstration élémentaire. En bref, nous ne comprenons pas ce fait, bien que nous soyons en mesure de suivre les mathématiques.

Dans la démonstration de Carnot, le fait que seule une quantité de travail limitée puisse être extraite en passant d'une température à une autre est déduit d'un autre axiome, qui est que si tout est à la même température, la chaleur ne peut être convertie en travail par l'intermédiaire d'un processus cyclique. Revenons d'abord en arrière et essayons de voir, dans au moins un exemple élémentaire, pourquoi cet énoncé plus simple est vrai.

Essayons d'inventer un appareil qui va nous permettre de violer la Seconde Loi de Thermodynamique, c'est-à-dire un appareil qui engendre du travail à partir d'un réservoir de chaleur, tout l'ensemble étant à la même température. Disons par exemple que nous avons une boîte de gaz à une certaine température et qu'à l'intérieur il y ait un arbre avec des palettes. (Voir Fig. 46-1, mais prendre $T_1 = T_2 = T$, par exemple.) A cause du bombardement des molécules de gaz sur les palettes, les palettes oscillent et s'agitent. Nous avons simplement à fixer à l'autre extrémité de l'arbre une roue qui ne peut tourner que dans un sens – la roue à rochet et un cliquet. Lorsque

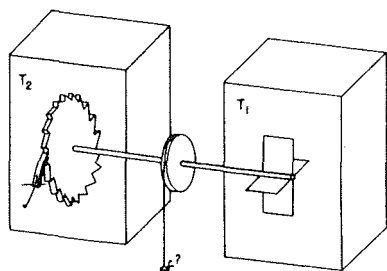


Fig. 46-1. La machine construite avec l'encliquetage à rochet.

l'arbre tente de bouger dans un sens, il ne tourne pas, et lorsqu'il essaie dans l'autre, il tourne. La roue va donc tourner lentement, et peut-être même pourrions-nous attacher une puce à un fil suspendu à un tambour sur l'axe, et soulever la puce! Voyons si cela est possible. Selon les hypothèses de Carnot, c'est impossible. Mais si nous considérons cela, nous voyons, à première vue, que cela semble tout à fait possible. Aussi nous devons y regarder de plus près. En effet, si nous considérons l'encliquetage à rochet, nous voyons apparaître un certain nombre de complications.

D'abord, notre roue à rochet idéalisée est aussi simple que possible, mais malgré tout, il y a un cliquet, et il doit y avoir un ressort qui rappelle le cliquet. Le cliquet doit se rabattre après avoir quitté une dent, aussi le ressort est nécessaire.

Une autre caractéristique de cet encliquetage à rochet, qui n'est pas indiquée sur la figure, est tout à fait essentielle. Supposez que l'appareil soit constitué de pièces parfaitement élastiques. Après que le cliquet ait été soulevé jusqu'à l'extrémité de la dent et qu'il soit ramené par le ressort, il va rebondir contre la roue et continuer à rebondir. Alors, lorsqu'une autre fluctuation se produit, la roue peut tourner dans l'autre sens, car la dent pourra passer sous le cliquet au moment où celui-ci sera en l'air! De ce fait, une partie essentielle de l'irréversibilité de notre roue est un mécanisme d'amortissement ou d'affaiblissement qui stoppe le rebondissement. Lorsqu'il y a amortissement, bien sûr, l'énergie qui se trouvait dans le cliquet passe dans la roue et se manifeste sous forme de chaleur. Ainsi, au fur et à mesure qu'elle tourne, la roue devient de plus en plus chaude. Pour rendre la chose plus simple, nous pouvons mettre un gaz autour de la roue pour évacuer une partie de la chaleur. De toutes manières, disons que le gaz continue de s'échauffer en même temps que la roue. Cela va-t-il durer indéfiniment? Non! le cliquet et la roue, tous les deux à une certaine température T , possèdent également un mouvement Brownien. Ce mouvement est tel que, de temps à autre, par accident, le cliquet se soulève de lui-même au-dessus d'une dent, juste au moment où le mouvement Brownien sur les palettes essaie de faire tourner l'arbre en sens inverse. Et au fur et à mesure que la température s'élève, ceci a lieu de plus en plus souvent.

C'est donc la raison pour laquelle cet appareil ne fonctionne pas d'un mouvement perpétuel. Lorsque les palettes sont frappées, parfois le cliquet se soulève et dépasse l'extrémité de la dent. Mais parfois, lorsqu'elle essaie de tourner dans l'autre sens, le cliquet était déjà soulevé à cause des fluctuations des mouvements du côté de la roue, et la roue se déplace dans l'autre sens! Le résultat total est nul. Il n'est pas difficile de démontrer que lorsque la température est égale des deux côtés, il n'y a pas de mouvement moyen résultant de la roue. Bien sûr, la roue va faire un certain nombre d'aller et venue dans un sens et dans l'autre, mais elle ne fera pas ce que nous voudrions lui faire faire, qui est de ne tourner que dans un sens.

Considérons-en la raison. Il est nécessaire de produire du travail contre le ressort afin de soulever le cliquet au sommet de la dent. Appelons cette énergie ε , et soit θ l'angle entre les dents. La probabilité pour que le système puisse accumuler suffisamment d'énergie, ε , pour faire passer le cliquet au-dessus de la dent, est $e^{-\varepsilon/kT}$. Mais la probabilité que le cliquet soit accidentellement soulevé est également $e^{-\varepsilon/kT}$. Ainsi le nombre de fois que le cliquet est en haut et que la roue peut tourner en sens inverse librement est égal au nombre de fois où nous avons suffisamment d'énergie pour la tourner vers l'avant, et que le cliquet est en bas. Nous obtenons donc un «équilibre» et la roue ne tourne pas.

46-2 La roue à rochet en tant que machine

Allons plus loin. Prenez l'exemple où la température des palettes est T_1 et la température de la roue à rochet est T_2 , et où T_2 est inférieur à T_1 . Puisque la roue est froide et que les fluctuations du cliquet sont relativement peu fréquentes, il lui sera extrêmement difficile d'atteindre une énergie ε . A cause de la température élevée T_1 , les palettes atteindront souvent l'énergie ε , et notre appareil va tourner dans une direction, comme prévu.

Nous voudrions maintenant voir s'il peut soulever des poids. Sur le tambour, au milieu, nous attachons un fil et plaçons un poids, notre puce, par exemple, au bout du fil. Appelons L le couple dû au poids. Si L n'est pas trop élevé, notre machine va soulever le poids parce que les fluctuations Browniennes vont la faire se déplacer plus probablement dans une direction que dans l'autre. Nous voulons trouver quel poids elle peut soulever, à quelle vitesse elle tourne, etc.

D'abord nous considérons un mouvement vers l'avant, le sens habituel de fonctionnement d'une roue à rochet. Quelle énergie devons-nous emprunter à l'extrémité des palettes pour faire un pas vers l'avant? Nous devons emprunter une énergie ε pour soulever le cliquet. La roue tourne d'un angle θ contre le couple L , ce qui fait qu'il nous faut également l'énergie $L\theta$. La quantité totale d'énergie que nous devons emprunter est $\varepsilon + L\theta$. La probabilité que nous obtenions cette énergie est proportionnelle à $e^{-(\varepsilon + L\theta)/kT_1}$. En réalité, ce n'est pas simplement une question d'obtenir cette énergie, mais nous voudrions également savoir le nombre de fois par seconde que l'on peut obtenir cette énergie. La probabilité par seconde est proportionnelle à $e^{-(\varepsilon + L\theta)/kT_1}$, et nous appellerons la constante de proportionnalité $1/\tau$. Elle se simplifiera à la fin de toute façon. Lorsqu'un pas vers l'avant est effectué, le travail réalisé sur le poids est $L\theta$. L'énergie prise aux palettes est $\varepsilon + L\theta$. Le ressort est remonté avec une énergie ε , alors il fait clac, clac, bang, et cette énergie se transforme en chaleur. Toute l'énergie prise est utilisée pour soulever le poids et pousser le cliquet qui ensuite retombe et donne de la chaleur à l'autre côté.

Considérons maintenant le cas opposé, qui est le mouvement en sens inverse. Que se passe-t-il alors? Pour faire tourner la roue en sens inverse, nous devons simplement fournir de l'énergie pour soulever le cliquet suffisamment haut pour que la roue puisse tourner en arrière. C'est encore l'énergie ε . Notre probabilité par seconde pour que le cliquet se soulève de cette hauteur est maintenant $(1/\tau)e^{-\varepsilon/kT_2}$. Notre constante de proportionnalité est la même, mais cette fois-ci c'est kT_2 , parce que la température est différente. Lorsque ceci se réalise, du travail est produit puisque la roue tourne en sens inverse. Elle recule d'un pas, ce qui fait qu'elle produit un travail $L\theta$. L'énergie prise au système à rochet est ε et l'énergie donnée au gaz à T_1 du côté des palettes est

Tableau 46-1

Résumé des opérations de l'encliquetage à rochet

<i>Vers l'avant :</i>	A besoin de l'énergie	$\varepsilon + L\theta$	venant des palettes. $\therefore$ Taux = $\frac{1}{\tau} e^{-(L\theta + \varepsilon)/kT_1}$
	Prend aux palettes	$L\theta + \varepsilon$	
	Produit un travail	$L\theta$	
	Donne à la roue à rochet	ε	
<i>Vers l'arrière :</i>	A besoin de l'énergie	ε	pour le cliquet. $\therefore$ Taux = $\frac{1}{\tau} e^{-\varepsilon/kT_2}$
	Prend à la roue à rochet	ε	} la même chose que précédemment au signe près qui est inversé
	Libère un travail	$L\theta$	
	Donne aux palettes	$L\theta + \varepsilon$	

Si le système est réversible, les vitesses sont égales, et donc $\frac{\varepsilon + L\theta}{T_1} = \frac{\varepsilon}{T_2}$.

$$\frac{\text{Chaleur donnée à la roue à rochet}}{\text{Chaleur prise aux palettes}} = \frac{\varepsilon}{L\theta + \varepsilon} \quad \text{Donc} \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

$L\theta + \varepsilon$. Il faut un petit peu de réflexion pour en voir la raison. Supposons que le cliquet se soit soulevé de lui-même accidentellement sous l'effet d'une fluctuation. Alors lorsqu'il retombe et que le ressort le pousse vers le bas contre la dent, une force essaye de faire tourner la roue, parce que la dent pousse sur un plan incliné. Cette force produit du travail, ainsi que la force due aux poids. Ainsi toutes les deux composent la force totale, et toute l'énergie qui est lentement libérée apparaît à l'extrémité des palettes sous forme de chaleur. (Bien sûr, cela doit être ainsi à cause de la conservation de l'énergie, mais on doit faire bien attention à ne rien oublier!) Nous remarquons que toutes ces énergies sont exactement les mêmes, mais inversées. Ainsi, selon que l'un ou l'autre de ces deux taux est le plus grand, le poids est, soit lentement soulevé, soit lentement descendu. Bien entendu, il est continuellement en train de s'agiter, se soulevant un petit peu, puis descendant un peu, mais nous parlons du comportement moyen.

Supposez que pour un poids particulier les taux soient égaux. Alors nous ajoutons un poids infinitésimal sur le fil. Le poids va lentement descendre, et du travail sera produit sur la machine. L'énergie sera prise de la roue et donnée aux palettes. Si au contraire, nous enlevons une petite quantité de poids, alors le déséquilibre sera dans l'autre sens. Le poids est soulevé, et de la chaleur est prise du côté des palettes pour être donnée à la roue. Ainsi nous avons les conditions d'un cycle réversible de Carnot, pourvu que le poids soit exactement tel que les deux taux soient égaux. Cette condition est évidemment que $(\varepsilon + L\theta)/T_1 = \varepsilon/T_2$. Disons que la machine est en train de soulever lentement le poids. L'énergie Q_1 est alors prise aux palettes, l'énergie Q_2 est fournie à la roue, et ces énergies sont dans un rapport $(\varepsilon + L\theta)/\varepsilon$. Si nous abaissons le poids, nous avons

également $Q_1/Q_2 = (\epsilon + L\theta)/\epsilon$. Ainsi (Tableau 46-1) nous avons

$$Q_1/Q_2 = T_1/T_2.$$

De plus, le travail que nous obtenons est à l'énergie prise aux palettes comme $L\theta$ par rapport à $L\theta + \epsilon$, et donc comme $(T_1 - T_2)/T_1$. Nous voyons que notre appareil ne peut extraire davantage de travail que cette quantité, en fonctionnant d'une manière réversible. C'est le résultat que nous attendions à partir de la démonstration de Carnot, et le résultat principal de cette leçon. Cependant, nous pouvons utiliser notre appareil pour comprendre quelques autres phénomènes, même hors d'équilibre, et de ce fait au-delà du domaine de la thermodynamique.

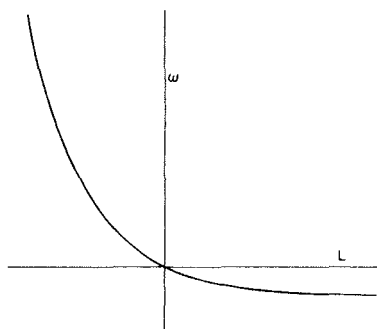


Fig. 46-2. Vitesse angulaire de la roue à rochet en fonction du couple.

Calculons à quelle vitesse notre appareil à sens unique tournerait si toute chose était à la même température et que nous attachions un poids au tambour. Si nous tirons très, très fort, bien sûr, il y a toutes sortes de complications. Le cliquet glisse sur la roue, ou le ressort se casse, ou quelque chose d'autre se produit. Mais supposez que nous tirions avec suffisamment de douceur pour que tout se passe correctement. Dans ces circonstances, l'analyse ci-dessus est exacte pour la probabilité de la roue allant vers l'avant et vers l'arrière, si nous nous rappelons que les deux températures sont égales. A chaque étape, un angle θ est parcouru, ainsi la vitesse angulaire est θ que multiplie la probabilité par seconde de l'un de ces sauts. Elle tourne vers l'avant avec la probabilité $(1/\tau)e^{-(\epsilon + L\theta)/kT}$ et vers l'arrière avec la probabilité $(1/\tau)e^{-\epsilon/kT}$, de telle sorte que pour la vitesse angulaire nous avons

$$\begin{aligned}\omega &= (\theta/\tau)e^{-(\epsilon + L\theta)/kT} - e^{-\epsilon/kT} \\ &= (\theta/\tau)e^{-\epsilon/kT}(e^{-L\theta/kT} - 1).\end{aligned}\quad (46.1)$$

Si nous portons ω en fonction de L , nous obtenons la courbe indiquée sur la Figure 46-2. Nous voyons que cela fait une grande différence que L soit positif ou négatif. Si L augmente dans la région positive, ce qui se produit lorsque nous essayons de faire tourner la roue en sens inverse, la vitesse en sens inverse tend vers une constante. Lorsque L devient négatif, ω en réalité « décolle » vers l'avant, puisque e à une très grande puissance donne un chiffre extrêmement élevé!

La vitesse angulaire qui a été obtenue à partir de forces différentes est donc extrêmement asymétrique. Pour aller dans un sens c'est facile: nous obtenons une grande vitesse angulaire avec une petite

force. Pour aller dans l'autre sens, nous pouvons exercer une grande force, et cependant la roue aura bien du mal de tourner.

Nous trouvons la même chose dans un *redresseur électrique*. Au lieu de la force, nous avons un champ électrique, et au lieu de la vitesse angulaire, nous avons le courant électrique. Dans le cas d'un redresseur, la tension n'est pas proportionnelle à la résistance, et la situation est asymétrique. La même analyse que nous avons faite pour le redresseur mécanique conviendra pour un redresseur électrique. En fait, le type de formule que nous avons obtenue ci-dessus est typique des possibilités de transport de courant des redresseurs en fonction de leurs tensions.

Enlevons maintenant tous les poids, et considérons notre machine initiale. Si T_2 est plus faible que T_1 , la roue ira vers l'avant ce qui n'étonnera personne. Mais il est plus difficile à première vue de croire le cas opposé. Si T_2 est plus grand que T_1 , la roue se déplace dans l'autre sens! Une roue à rochet en mouvement contenant beaucoup de chaleur tourne d'elle-même en sens inverse, parce que le cliquet rebondit. Si le cliquet repose pendant un certain temps sur le plan incliné, il pousse le plan incliné de côté. Mais il est *toujours* en train de pousser sur un plan incliné, parce qu'il lui arrive de se soulever suffisamment pour dépasser l'extrémité d'une dent, alors le plan incliné défile devant lui et il retombe à nouveau sur un plan incliné. Ainsi un encliquetage à rochet que l'on a chauffé est construit d'une manière idéale pour tourner dans une direction exactement opposée à celle pour laquelle il était initialement construit!

Malgré toutes les astuces de nos conceptions bizarres, si les deux températures sont exactement égales, il n'a pas de tendance plus grande à tourner dans un sens que dans l'autre. Au moment où nous regardons notre système, il peut tourner dans un sens ou dans l'autre, mais à long terme il ne va nulle part. Le fait qu'il n'aille nulle part est réellement le principe profond et fondamental sur lequel toute la thermodynamique est construite.

46-3 Réversibilité en mécanique

Quel principe mécanique plus fondamental nous dit que, à long terme, lorsque la température est maintenue la même partout, notre appareil n'aura de préférence ni pour la droite ni pour la gauche? Nous avons évidemment une proposition fondamentale qui est qu'il n'y a aucune manière de construire une machine qui, laissée à elle-même, sera davantage en mesure après un temps suffisamment long de tourner dans un sens plus que dans l'autre. Nous devons essayer de voir comment ceci se déduit des lois de la mécanique.

Les lois de la mécanique disent quelque chose comme ceci: la masse que multiplie l'accélération est la force, et la force sur chaque particule est une certaine fonction compliquée des positions de toutes les autres particules. Il y a d'autres cas dans lequel les forces dépendent des vitesses, comme dans le magnétisme, mais ne considérons pas cela pour le moment. Nous prenons un cas plus simple, telle la gravitation, où les forces ne dépendent que de la position. Supposons que nous ayons résolu notre ensemble d'équations et que nous ayons un certain mouvement $x(t)$ pour chaque particule. Dans un système suffisamment compliqué, les solutions sont très compliquées et ce qui se passe avec le temps est extrêmement surprenant. Si nous choisissons n'importe quel arrangement de particules qui nous plaise, nous voyons que cet arrangement se réalise effectivement si nous attendons suffisamment longtemps! Si nous suivons notre solution pendant un temps suffisamment long, elle essaye, en quelque sorte, tout ce qui lui est possible de faire. Ceci n'est pas absolument

nécessaire dans les appareils les plus simples, mais lorsque les systèmes deviennent suffisamment compliqués, avec suffisamment d'atomes, cela se produit. Il y a aussi quelque chose d'autre que la solution peut faire. Si nous résolvons les équations du mouvement, nous pouvons obtenir certaines fonctions comme $t + t^2 + t^3$. Nous affirmons qu'une autre solution est aussi bien $-t + t^2 - t^3$. En d'autres termes, si nous substituons $-t$ à t dans toute la solution, nous allons à nouveau obtenir une solution de la même équation. Ceci provient du fait que si nous substituons $-t$ à t dans l'équation différentielle initiale, rien n'est changé, puisqu'on ne rencontre que des dérivées secondes par rapport à t . Ceci signifie que si nous avons un certain mouvement, alors le mouvement exactement opposé est également possible. Dans la confusion complète qui apparaît si nous attendons suffisamment longtemps, il se trouve aller de lui-même dans un sens à certains moments et dans l'autre sens de lui-même à d'autres moments. Il n'y a rien qui soit plus beau pour un des mouvements que pour l'autre. Ainsi, il est impossible de concevoir une machine qui, à long terme, soit davantage en mesure d'aller dans un sens plutôt que dans l'autre, si la machine est suffisamment compliquée.

On peut essayer d'imaginer un exemple pour lequel ceci est évidemment faux. Si nous prenons une roue, par exemple, et la tournons dans l'espace vide, elle va continuer ainsi pour toujours. Ainsi, il y a certaines conditions comme la conservation du moment angulaire, qui violent le raisonnement ci-dessus. Cela nécessite simplement que le raisonnement soit fait avec un peu plus de soin. Peut-être les parois vont-elles prendre un peu de moment angulaire, ou quelque chose de ce genre, de telle sorte que nous n'avons pas de loi de conservation particulière. Alors, si le système est suffisamment compliqué, le raisonnement est bon. Il est basé sur le fait que les lois de la mécanique sont réversibles.

Il est d'un intérêt historique de faire une remarque sur un appareil inventé par Maxwell, qui le premier étudia la théorie dynamique des gaz. Il imagina la situation suivante: Nous avons deux récipients de gaz à la même température, avec un petit trou entre eux. Sur le trou se trouve un petit démon (qui peut être une machine bien sûr). Il y a une porte sur le trou, qui peut être ouverte ou fermée par le démon. Il regarde les molécules venant de la gauche. Chaque fois qu'il voit une molécule rapide, il ouvre la porte. Lorsqu'il en voit une lente, il laisse la porte fermée. Si nous voulons que ce soit un démon tout à fait spécial, il peut avoir des yeux à l'arrière de sa tête et faire l'opposé pour les molécules de l'autre côté. Il laisse passer les molécules lentes vers la gauche, et les molécules rapides vers la droite. Très rapidement le côté gauche va se refroidir et le côté droit va s'échauffer. Les idées de la thermodynamique sont-elles violées par le fait que nous puissions avoir un tel démon?

Il se trouve que si nous construisons un démon de dimension finie, le démon lui-même s'échauffe tellement qu'il ne peut plus très bien voir après un certain temps. Le démon le plus simple possible, par exemple, serait une porte maintenue sur le trou par un ressort. Une molécule rapide traverse parce qu'elle est capable de soulever la porte. Une molécule lente ne le peut pas et rebondit. Mais cette chose n'est rien d'autre que notre encliquetage à rochet sous une autre forme et en définitive le mécanisme va s'échauffer. Si nous supposons que la chaleur spécifique du démon n'est pas infinie, il doit s'échauffer. Il n'a qu'un nombre fini d'engrenages et de roues internes, ce qui fait qu'il ne peut éliminer la chaleur supplémentaire qu'il reçoit en observant les molécules. Rapidement, il est secoué à cause du mouvement Brownien, à un point tel qu'il ne pourra plus dire s'il vient ou s'il va, et encore moins si les molécules vont ou viennent, ce qui fait qu'il s'arrêtera de fonctionner.

46-4 Irréversibilité

Est-ce que toutes les lois de la physique sont réversibles? Évidemment pas! Essayez simplement de remettre dans sa coquille un œuf brouillé! Faites tourner un film à l'envers, et il ne faut que quelques minutes pour que tout le monde se mette à rire. La caractéristique la plus naturelle de tous les phénomènes est leur irréversibilité évidente.

D'où vient l'irréversibilité? Elle ne vient pas des lois de Newton. Si nous disons que le comportement de toutes choses doit être en définitive compris en termes des lois de la physique, et s'il apparaît également que toutes les équations ont la propriété fantastique que si nous remplaçons $t = -t$ nous avons une autre solution, chaque phénomène est alors réversible. Comment se fait-il alors que dans la nature, à une grande échelle, les choses ne soient pas réversibles? Évidemment, il doit y avoir certaines lois, certaines équations obscures et fondamentales, peut-être en électricité, peut-être dans la physique du neutrino, dans laquelle le sens du temps a de l'importance.

Parlons maintenant de ce problème. Nous connaissons déjà une de ces lois, qui dit que l'entropie augmente toujours. Si nous avons un objet chaud et un objet froid, la chaleur va du chaud vers le froid. Ainsi la loi de l'entropie est une de ces lois. Mais nous espérons comprendre la loi de l'entropie d'un point de vue mécanique. En fait, nous venons tout juste de réussir à partir de démonstrations mécaniques à obtenir toutes les conséquences de la démonstration que la chaleur ne peut pas s'écouler d'elle-même en sens inverse, et nous sommes parvenus, de ce fait, à une compréhension de la Deuxième Loi. Apparemment nous pouvons obtenir de l'irréversibilité à partir d'équations réversibles. Mais *était-ce seulement* une démonstration mécanique qui fut employée? Regardons cela de plus près.

Puisque notre question concerne l'entropie, notre problème est d'essayer de trouver une description microscopique de l'entropie. Si nous disons que nous avons une certaine quantité d'énergie dans quelque chose, comme un gaz, alors nous pouvons en obtenir une représentation microscopique, et dire que chaque atome possède une certaine énergie. Toutes ces énergies additionnées nous donnent l'énergie totale. De la même manière, peut-être chaque atome possède-t-il une certaine entropie. Si nous additionnons tout cela, nous trouverons l'entropie totale. Cela ne fonctionne pas aussi bien, mais voyons ce qui se passe.

Comme exemple, nous avons calculé la différence d'entropie entre un gaz à une certaine température avec un certain volume et un gaz à la même température avec un autre volume. Nous nous rappelons, depuis le Chapitre 44, que nous avons pour la modification d'entropie,

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}.$$

Dans le cas présent, l'énergie du gaz est la même avant et après la détente, puisque la température ne change pas. Ainsi nous devons ajouter suffisamment de chaleur pour égaliser le travail réalisé par le gaz ou, pour chaque petit changement de volume,

$$dQ = P dV.$$

Introduisant ceci pour dQ , nous obtenons

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} P \frac{dV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{NkT}{V} \frac{dV}{T} = Nk \ln \frac{V_2}{V_1},$$

comme au Chapitre 44. Par exemple, si nous dilatons le volume d'un facteur 2, la variation d'entropie est $Nk \ln 2$.

Considérons maintenant un autre exemple intéressant. Supposez que nous ayons une boîte avec une barrière au milieu. D'un côté se trouve le néon (molécules «noires»), et de l'autre côté l'argon (molécules «blanches»). Nous enlevons la barrière et les laissons se mélanger. De combien l'entropie a-t-elle changé? Il est possible d'imaginer que, au lieu de la barrière, nous ayons un piston avec des trous dans celui-ci, qui laissent passer les blanches et non les noires, et un autre type de piston qui fonctionne dans l'autre sens. Si nous déplaçons un piston jusqu'à chaque extrémité, nous voyons que, pour chaque gaz, le problème est semblable à celui que nous venons de résoudre. Nous obtenons un changement d'entropie de $Nk \ln 2$, ce qui signifie que l'entropie a augmenté de $k \ln 2$ par molécule. Le 2 est en relation avec l'espace supplémentaire dont la molécule dispose, ce qui est assez particulier. Ce n'est pas une propriété de la molécule elle-même, mais de l'espace dont la molécule peut disposer. C'est une situation étrange, où l'entropie augmente mais où tout a la même température et la même énergie! La seule chose qui ait changé est que les molécules sont distribuées différemment.

Nous savons bien que si nous enlevons la barrière, tout va se mélanger après un temps long, à cause des collisions, des oscillations, des rebondissements, etc. De temps à autre, une molécule blanche se dirige vers une noire, et une noire se dirige vers une blanche, et elles se dépassent peut-être. Graduellement les blanches se fraient un passage, par accident, dans l'espace des noires, et des noires se fraient un passage, par accident, dans l'espace des blanches. Si nous attendons suffisamment longtemps nous obtenons un mélange. Manifestement, ceci est un processus irréversible dans le monde réel, et doit comporter une augmentation de l'entropie.

Nous avons là un exemple simple d'un processus irréversible qui est entièrement composé d'événements réversibles. Chaque fois qu'il y a une collision entre un couple quelconque de molécules, elles s'éloignent dans certaines directions. Si nous prenons un film de la collision en sens inverse, rien ne paraîtrait faux dans ce film. En fait, un type de collision est aussi probable qu'un autre. Ainsi le mélange est complètement réversible, et cependant il est irréversible. Tout le monde sait que si nous commençons avec des blanches et des noires séparées, nous obtiendrons un mélange en quelques minutes. Si nous attendons et regardons cela pendant quelques autres minutes, cela ne va pas se séparer à nouveau, mais cela restera mélangé. Ainsi, nous avons une irréversibilité qui est fondée sur des situations réversibles. Mais nous en voyons également la *raison* maintenant. Nous sommes partis d'une disposition qui, en un certain sens, est *ordonnée*. A cause du chaos des collisions, elle devient désordonnée. *C'est la modification d'une disposition ordonnée en une disposition désordonnée qui est la source de l'irréversibilité.*

Il est vrai que si nous prenons un film de ceci, et que nous le montrons en sens inverse, nous verrons graduellement la situation redevenir ordonnée. Quelqu'un pourrait dire, «C'est contre les lois de la physique!» Ce qui fait que nous repasserions le film en considérant chacune des collisions. Chacune serait parfaite, et chacune obéirait aux lois de la physique. La raison, bien sûr, est que toutes les vitesses des molécules sont correctes, si donc toutes les trajectoires sont parcourues en sens inverse, elles reviennent à leurs conditions initiales. Mais c'est une condition extrêmement improbable. Si nous partons avec le gaz dans une configuration ordinaire avec des blanches et des noires, il ne reviendra jamais en arrière.

46-5 Ordre et entropie

Nous devons maintenant parler de ce que nous entendons par désordre et de ce que nous voulons dire par ordre. Ce n'est pas une question d'ordre qui plaise ou de désordre qui déplaise. Ce qui est différent dans nos cas mélangés et non mélangés est la chose suivante. Supposez que nous divisons l'espace en petits éléments de volume. Si nous avons des molécules blanches et noires, de combien de manières pourrions-nous les attribuer dans les éléments de volume, de telle sorte que les blanches soient d'un côté et les noires de l'autre? D'un autre côté, de combien de manières pourrions-nous les distribuer sans aucune restriction de choix? Manifestement, il y a bien plus de manières de les disposer dans le deuxième cas. Nous mesurons le «désordre» par le nombre de manières dont l'intérieur peut être arrangé, de telle sorte que de l'extérieur cela apparaisse la même chose. *Le logarithme de ce nombre de manières est l'entropie.* Le nombre de manières dans le cas séparé est inférieur, l'entropie est plus petite, le «désordre» est plus faible.

Ainsi, avec la définition technique ci-dessus du désordre, nous pouvons comprendre la proposition. Premièrement, l'entropie mesure le désordre. Deuxièmement, l'univers va toujours de «l'ordre» vers le «désordre», ainsi l'entropie augmente toujours. L'ordre n'est pas un ordre au sens où nous aimons l'arrangement, mais au sens où le nombre de manières différentes à notre disposition pour obtenir quelque chose de toujours extérieurement identique, est relativement restreint. Dans le cas où nous avons retourné notre film du mélange du gaz, il n'y avait pas autant de désordre que nous pensions. Chaque atome avait exactement la vitesse correcte et l'orientation nécessaire pour rebondir correctement! L'entropie n'était pas élevée, après tout, malgré les apparences.

Qu'en est-il de la réversibilité des autres lois physiques? Lorsque nous parlons du champ électrique produit par une charge accélérée, nous avons dit que nous devions prendre le champ retardé. A un temps t à une distance r de la charge, nous prenions le champ dû à l'accélération au temps $t - r/c$, non $t + r/c$. Ainsi, il apparaît à première vue que la loi de l'électricité n'est pas réversible. D'une manière très étrange, cependant, les lois que nous avons utilisées viennent d'un ensemble d'équations appelées équations de Maxwell, qui sont en fait réversibles. De plus, il est possible de démontrer que si nous ne voulions utiliser que le champ en avance, le champ dû aux conditions à $t + r/c$, et le faire d'une manière absolument cohérente dans un espace complètement fermé, tout se passerait exactement de la même manière que si nous utilisions des champs retardés! Cette irréversibilité apparente en électricité, au moins dans une enceinte, n'est pas une irréversibilité du tout. Nous en avons déjà eu l'intuition, parce que nous savons que lorsque nous avons une charge qui oscille, qui engendre des champs se réfléchissant sur les parois d'une enceinte, nous atteignons en définitive un équilibre, dans lequel il n'y a pas un certain sens privilégié. La méthode du champ retardé n'est simplement qu'une façon commode d'obtenir la solution.

Ainsi, pour autant que nous sachions, toutes les lois fondamentales de la physique, comme les équations de Newton, sont réversibles. Alors d'où provient l'irréversibilité? Elle provient de l'ordre se transformant en désordre, mais nous ne comprenons pas ceci tant que nous ne connaissons pas l'origine de l'ordre. Comment se fait-il que les situations que nous rencontrons chaque jour soient toujours hors d'équilibre? Une explication possible est la suivante. Considérez à nouveau notre boîte de molécules noires et blanches mélangées. Il est maintenant possible, si nous attendons suffisamment longtemps, par un simple accident extrêmement improbable, mais possible, que la distribution des molécules tende à être surtout blanche d'un côté et surtout noire de l'autre. Après cela, au fur et à mesure que le temps passe et que les accidents continuent, elles se mélangent à nouveau davantage.

Ainsi une explication possible du degré élevé de l'ordre dans le monde actuel est que c'est simplement une question de chance. Peut-être notre univers a-t-il subi dans le passé un certain type de fluctuation, au cours de laquelle les choses se sont séparées et maintenant elles sont en train de se rapprocher à nouveau. Ce type de théorie n'est pas asymétrique, parce que nous pouvons nous demander ce à quoi ressemblent les gaz séparés, soit un petit peu dans le futur soit un petit peu dans le passé. Dans chaque cas, nous voyons un brouillard gris à l'interface, parce que les molécules se mélangent à nouveau. De quelque manière que nous faisons avancer le temps, les gaz se mélangent. Ainsi cette théorie dirait que l'irréversibilité est simplement un des accidents de la vie.

Nous aimerions montrer que ceci n'est pas le cas. Supposons que nous ne considérions pas immédiatement tout le récipient, mais simplement une partie. Alors, à un certain moment, supposons que nous ayons découvert un certain ordre. Dans cette petite partie, les blanches et les noires sont séparées. Que devons-nous en déduire sur les conditions dans les endroits où nous n'avons pas encore regardé? Si nous croyons réellement que l'ordre provient du désordre complet par une fluctuation, nous devons sûrement prendre la fluctuation la plus probable qui puisse le produire, et la condition la plus probable n'est *pas* que le reste de la situation se soit également mise en ordre! De ce fait, de l'hypothèse que le monde est une fluctuation, nous pouvons prédire que si nous considérons une partie du monde que nous n'avons jamais vu précédemment, nous la trouverons mélangée et non pas semblable aux parties que nous venons juste de considérer. Si notre ordre était dû à une fluctuation, nous ne nous attendrions pas à trouver de l'ordre n'importe où mais simplement à l'endroit où nous l'avons remarqué.

Nous supposons maintenant que la séparation soit due au fait que le passé de l'univers était réellement ordonné. Ce n'est pas dû à une fluctuation, mais l'ensemble fut au départ blanc et noir. Cette théorie prédit maintenant qu'il y a de l'ordre dans d'autres endroits – l'ordre n'est pas dû à une fluctuation, mais dû à un ordre bien plus élevé au commencement des temps. Alors nous prévoyons de trouver de l'ordre en des endroits où nous n'avons pas encore regardé.

Les astronomes, par exemple, n'ont regardé que certaines des étoiles. Chaque jour ils tournent leur télescope vers d'autres étoiles, et les nouvelles étoiles font la même chose que les anciennes. Nous concluons de ce fait que l'univers n'est *pas* une fluctuation, et que l'ordre est un rappel des conditions de la création des choses. Ceci ne veut pas dire que nous en comprenions la logique. Pour certaines raisons, l'univers, à un certain moment, a disposé d'une entropie très faible pour son contenu d'énergie, et depuis ce temps l'entropie augmente. C'est donc la voie vers le futur. C'est l'origine de toute l'irréversibilité, c'est ce qui cause les processus de croissance et de disparition, ce qui nous fait rappeler du passé et non du futur, nous souvenir des choses qui sont plus proches de ce moment dans l'histoire de notre univers où l'ordre était plus élevé que maintenant, et pourquoi nous ne sommes pas capables de nous rappeler des choses pour lesquelles le désordre est plus élevé que maintenant et que nous appelons le futur. Ainsi, comme nous l'avons dit dans un précédent chapitre, l'univers entier est contenu dans un verre de vin, si nous le regardons de suffisamment près. Dans ce cas le verre de vin est complexe, parce qu'il y a de l'eau, du verre, de la lumière et tout le reste.

Un autre plaisir de notre domaine que constitue la physique, est que même des choses simples et idéalisées, comme l'encliquetage à rochet, ne fonctionnent que parce qu'elles font partie de l'univers. La roue à rochet et le cliquet fonctionnent dans une direction seulement, parce qu'ils sont en définitive en contact

avec le reste de l'univers. Si la roue à rochet et le cliquet se trouvaient dans une boîte et isolés pendant un temps suffisant, la roue n'aurait pas plus la chance d'aller dans un sens que dans l'autre. Mais parce que nous ouvrons les volets et laissons la lumière rentrer, parce que nous nous refroidissons sur la terre et recevons de la chaleur du soleil, les machines à rochets que nous fabriquons peuvent tourner dans un sens. Ce caractère à sens unique est lié au fait que la roue à rochet est une partie de l'univers. C'est une partie de l'univers, non seulement dans le sens qu'elle obéit aux lois physiques de l'univers, mais son comportement à sens unique est lié au comportement à sens unique de l'univers entier. Cela ne peut être complètement compris tant que le mystère des débuts de l'histoire de l'univers ne sera pas davantage ramené du stade des spéculations à celui d'une compréhension scientifique.

Le son. L'équation d'onde

47-1 Les ondes

47-4 Solutions de l'équation d'onde

47-2 La propagation du son

47-5 La vitesse du son

47-3 L'équation d'onde

47-1 Les ondes

Dans ce chapitre, nous allons parler du phénomène des *ondes*. C'est un phénomène qui apparaît dans différents contextes tout au long de la physique, et de ce fait, notre attention devra s'attacher à lui, non seulement à cause de l'exemple particulier considéré ici qui est le son, mais également à cause de l'application beaucoup plus large que trouvent ces notions dans toutes les branches de la physique.

Nous avons remarqué, lors de l'étude de l'oscillateur harmonique, qu'il n'y a pas seulement des exemples mécaniques de systèmes oscillants, mais qu'il y a aussi des exemples électriques. Les ondes sont reliées aux systèmes oscillants en notant toutefois que les oscillations des ondes ne sont pas seulement des oscillations dans le temps en un endroit, mais qu'elles se propagent aussi dans l'espace.

Nous avons en réalité déjà étudié les ondes. Lorsque nous avons étudié la lumière, en cherchant les propriétés des ondes dans ce domaine, nous avons fait particulièrement attention à l'interférence dans l'espace des ondes venant de plusieurs sources situées en des endroits différents, et toutes à la même fréquence. Il y a deux phénomènes ondulatoires importants dont nous n'avons pas encore parlé et qui se produisent avec la lumière, c'est-à-dire avec des ondes électromagnétiques, aussi bien qu'avec n'importe quelle autre forme d'onde. Le premier est le problème *d'interférence dans le temps* plutôt que d'interférence dans l'espace. Si nous disposons de deux sources de son, qui ont des fréquences légèrement différentes et que nous les écoutons toutes les deux en même temps, quelquefois les ondes arrivent avec leurs crêtes ensemble et quelquefois les crêtes et les creux se juxtaposent. (Voir Fig. 47-1.) L'augmentation et la diminution du son qui en résulte est ce qu'on appelle le phénomène de *battement* ou, en d'autres termes, de l'interférence dans le temps. Le deuxième phénomène concerne les comportements des ondes lorsque celles-ci sont enfermées dans un certain volume et qu'elles se réfléchissent continuellement sur les parois.

Ces effets auraient pu être traités, bien sûr, dans le cas des ondes électromagnétiques. La raison pour laquelle nous ne l'avons pas fait est qu'en utilisant un exemple nous n'aurions pas créé l'impression que nous découvrions en réalité différents sujets en même temps. Afin d'insister sur l'application générale des ondes

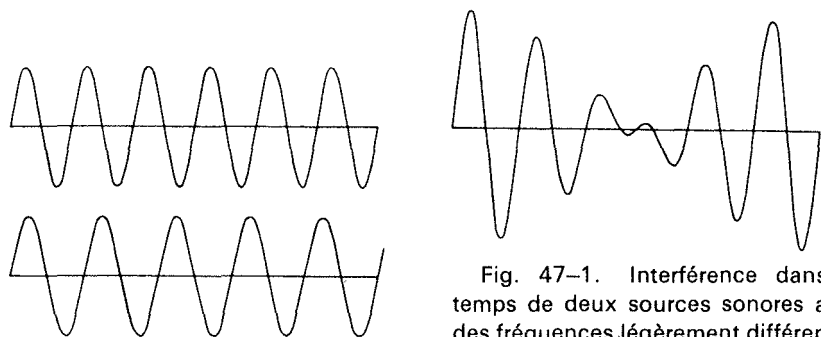


Fig. 47-1. Interférence dans le temps de deux sources sonores avec des fréquences légèrement différentes, ce qui produit des battements.

au-delà de l'électrodynamique, nous considérons ici un exemple différent, plus précisément les ondes sonores.

D'autres exemples d'ondes sont les ondes à la surface de l'eau qui sont les grandes vagues que nous voyons venir vers la grève, ou les ondes plus petites que sont les ondulations de tension superficielle à la surface de l'eau. Comme autre exemple, il y a deux types d'ondes élastiques dans les solides; une onde de compression (ou longitudinale) dans laquelle les particules du solide oscillent le long de la direction de propagation de l'onde (les ondes sonores dans un gaz sont de ce genre), et une onde transversale dans laquelle les particules du solide oscillent dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation. Les ondes de tremblement de terre contiennent des ondes élastiques des deux types, engendrées par un mouvement à un certain endroit dans la croûte terrestre.

On peut trouver un autre exemple d'ondes en physique moderne. Ce sont des ondes qui donnent la probabilité de trouver une particule en un endroit donné — les « ondes de matière » dont nous avons déjà discuté. Leur fréquence est proportionnelle à l'énergie et leur nombre d'onde est proportionnel à la quantité de mouvement. Ce sont les ondes de la mécanique quantique.

Dans ce chapitre nous allons considérer seulement les ondes pour lesquelles la vitesse est indépendante de la longueur d'onde. C'est par exemple le cas de la lumière dans le vide. La vitesse de la lumière est la même pour les ondes de radio, la lumière bleue, la lumière verte, ou pour toute autre longueur d'onde. A cause de ce comportement, lorsque nous avons commencé à décrire les phénomènes ondulatoires, nous n'avions pas remarqué au début que nous avions la propagation des ondes. Au lieu de cela, nous avons dit que si une charge est déplacée en un endroit, le champ électrique à une distance x , était

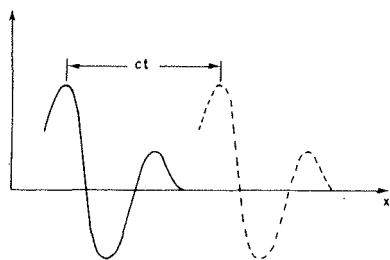


Fig. 47-2. La courbe en trait plein montre l'allure du champ électrique à un certain instant et la courbe en pointillé l'allure du champ électrique à un temps t ultérieur.

proportionnel à l'accélération, non au temps t , mais au temps antérieur $t - x/c$. De ce fait, si nous voulions représenter le champ électrique dans l'espace à un certain instant du temps, comme sur la Figure 47-2, le champ électrique à un instant t plus tard se serait déplacé de la distance ct , comme indiqué sur la figure. Mathématiquement, nous pouvons dire que dans l'exemple à une dimension que nous considérons, le champ électrique est une fonction de $x - ct$. Nous voyons qu'à $t = 0$, il est une certaine fonction de x . Si nous considérons un moment ultérieur, nous devons simplement un peu augmenter x pour obtenir la même valeur du champ électrique. Par exemple, si le champ maximum apparaît à $x = 3$ au temps zéro, pour trouver la nouvelle position du champ maximum au temps t , il nous faut

$$x - ct = 3 \quad \text{ou} \quad x = 3 + ct.$$

Nous voyons que ce type de fonction représente la propagation d'une onde.

Une telle fonction $f(x - ct)$, représente alors une onde. Nous pouvons résumer cette description d'une onde en disant simplement que

$$f(x - ct) = f(x + \Delta x - c(t + \Delta t)),$$

où $\Delta x = c\Delta t$. Il y a, bien sûr, une autre possibilité, c'est-à-dire qu'au lieu d'une source sur la gauche, comme indiqué sur la Figure 47-2, nous ayons une source sur la droite, de telle sorte que les ondes se propagent vers les x négatifs. Alors l'onde sera décrite par $g(x + ct)$.

Il y a la possibilité supplémentaire que plus d'une onde coexiste dans l'espace en même temps, et ainsi le champ électrique est la somme des deux champs, chacun se propageant indépendamment. Ce comportement des champs électriques peut être décrit en disant que si $f_1(x - ct)$ est une onde, et si $f_2(x - ct)$ en est une autre, leur somme est également une onde. Ceci est appelé le principe de superposition. Le même principe s'applique au son.

Nous sommes familiarisés avec le fait que si un son est produit, nous entendons avec une fidélité complète la même séquence de sons que celle qui a été créée. Si les hautes fréquences se déplaçaient plus vite que les basses fréquences, un bruit court et aigu serait entendu comme une succession de sons musicaux. De la même manière, si la lumière rouge se déplaçait plus vite que la lumière bleue, un éclair de lumière blanche serait perçu d'abord comme étant rouge, puis blanc, et finalement bleu. Nous savons bien que ceci n'est pas le cas. Le son et la lumière se déplacent tous les deux avec une vitesse dans l'air qui est pratiquement indépendante de la fréquence. Des exemples de propagation ondulatoire, pour laquelle cette indépendance n'est pas vraie, seront considérés au Chapitre 48.

Dans le cas de la lumière (des ondes électromagnétiques) nous avons donné une règle qui déterminait le champ électrique en un point comme le résultat de l'accélération d'une charge. On pourrait prévoir maintenant que ce que nous devrions faire serait de donner une règle suivant laquelle une certaine caractéristique de l'air, par exemple la pression, est déterminée à une distance donnée d'une source, en fonction du mouvement de la source, retardé par le temps de parcours du son. Dans le cas de la lumière cette procédure était acceptable, parce que tout ce que nous savions était qu'une charge en un endroit exerce une force sur une autre charge en un autre endroit. Les détails de la propagation d'un endroit à l'autre n'étaient pas absolument essentiels. Dans le cas du son,

cependant, nous savons qu'il se propage dans l'air, entre la source et celui qui entend, et il est certainement naturel de se poser la question de ce que vaut la pression de l'air à un moment donné. Nous voudrions, en plus, savoir exactement comment l'air se déplace. Dans le cas de l'électricité nous pouvions accepter une règle, puisque nous pouvions dire que nous ne connaissons pas encore les lois de l'électricité, mais nous ne pouvons pas faire la même remarque pour ce qui est du son. Nous ne serions pas satisfaits par une règle nous disant comment la pression du son se déplace dans l'air, parce que le processus doit être compréhensible à partir des lois de la mécanique. En bref, le son est une branche de la mécanique, et ainsi il doit être compris en fonction des lois de Newton. La propagation du son d'un endroit à un autre est simplement une conséquence de la mécanique et des propriétés des gaz s'il se propage dans un gaz, ou des propriétés des liquides ou des solides, s'il se propage dans de tels milieux. Plus tard nous établirons les propriétés de la lumière et sa propagation ondulatoire d'une manière semblable à partir des lois de l'électrodynamique.

47-2 La propagation du son

Nous allons établir les propriétés de la propagation du son *entre* la source et le récepteur à partir des lois de Newton, et nous ne considérerons pas l'interaction avec la source et le récepteur. D'habitude nous insistons sur un résultat plutôt que sur une démonstration particulière de ce résultat. Dans ce chapitre nous aurons un point de vue opposé. L'important ici, dans un certain sens, est la démonstration elle-même. Ce problème consistant à expliquer de nouveaux phénomènes en fonction des anciens, lorsque nous connaissons les lois des anciens, est peut-être le plus grand art de la physique mathématique. Le physicien-mathématicien a deux problèmes: le premier est de trouver les solutions, étant donné les équations, et l'autre est de trouver les équations qui décrivent un nouveau phénomène. La démonstration ici est un exemple du deuxième type du problème.

Nous prendrons l'exemple le plus simple ici – la propagation du son à une dimension. Pour mener à bien une telle démonstration il est nécessaire d'abord de parvenir à une certaine compréhension de ce qui se passe. Fondamentalement, il se produit que si un objet se déplace en un endroit dans l'air, nous observons une perturbation qui se déplace au travers de l'air. Si nous demandons quel type de perturbation, nous nous attendons à ce que le mouvement de l'objet produise un changement de pression. Bien entendu, si l'objet est déplacé doucement, l'air s'écoulera simplement autour de lui, mais ce qui nous intéresse ici est un mouvement rapide, de telle sorte qu'il n'y ait pas suffisamment de temps pour un tel écoulement. Alors, par le mouvement, l'air est comprimé et une variation de pression se produit qui pousse sur une quantité supplémentaire d'air. Cet air est à son tour comprimé, ce qui conduit à nouveau à une pression supplémentaire et une onde se propage.

Nous voulons maintenant mettre un tel processus en équation. Nous devons choisir les variables nécessaires. Dans notre problème particulier, nous devons savoir de combien l'air s'est déplacé, de telle sorte que le *déplacement* de l'air dans l'onde sonore est certainement une variable justifiée. De plus, nous voudrions décrire comment la *densité* de l'air varie lorsqu'il est déplacé. La *pression* de l'air change également, c'est donc aussi une variable intéressante. Puis, bien sûr, l'air possède une *vitesse*, nous devrons donc décrire la vitesse des particules d'air. Les particules d'air ont également des *accélérations* – mais lorsque nous faisons la liste de toutes

ces variables, nous réalisons rapidement que la vitesse et l'accélération seront connues, si nous savons comment le *déplacement* de l'air varie avec le temps.

Comme nous l'avons dit nous considérons l'onde à une dimension. Nous pouvons le faire si nous sommes suffisamment loin de la source pour que ce que nous appelons les *fronts d'onde* soient pratiquement des plans. Nous rendons ainsi notre démonstration plus simple en prenant l'exemple le moins compliqué. Nous serons alors en mesure de dire que le déplacement, χ , ne dépend que de x et de t , et non de y ou de z . De ce fait, la description de l'air est donnée par $\chi(x, t)$.

La description est-elle complète? Elle apparaît comme étant loin d'être complète, car nous ne connaissons aucun des détails sur la manière dont les molécules d'air se déplacent. Elles se déplacent dans toutes les directions, et cet état de chose n'est certainement pas décrit par cette fonction $\chi(x, t)$. Du point de vue de la théorie cinétique, si nous avons une densité de molécules plus élevée en un endroit, et une densité plus faible en un endroit voisin, les molécules vont se déplacer de la région de densité plus élevée vers celle de plus basse densité, de telle sorte qu'elles combleront la différence. Apparemment, nous n'obtiendrons pas d'oscillation et il n'y aura pas de son. Il est nécessaire pour obtenir des ondes sonores d'avoir ces conditions: lorsque les molécules s'échappent de la région de densité plus élevée et de pression plus élevée, elles donnent une quantité de mouvement aux molécules de la région voisine de densité plus faible. Afin de créer le son, les régions sur lesquelles la densité et la pression se modifient doivent être beaucoup plus grandes que la distance que les molécules parcourent avant de cogner d'autres molécules. Cette distance est le libre parcours moyen, et la distance entre les crêtes et les creux de pression doit être beaucoup plus grande que celui-ci. Sinon les molécules vont se déplacer librement depuis les crêtes vers les creux et immédiatement vont effacer l'onde.

Il est clair que nous allons décrire le comportement d'un gaz à une échelle grande en comparaison du libre parcours moyen, et ainsi les propriétés du gaz ne seront pas décrites en termes des molécules individuelles. Le déplacement, par exemple, sera le déplacement du centre de masse d'un petit élément de gaz, et la pression ou la densité seront la pression ou la densité dans cette région. Nous appellerons la pression P et la densité ρ , et elles seront des fonctions de x et de t . Nous devons garder à l'esprit que cette description est une approximation qui ne s'applique seulement que lorsque les propriétés du gaz ne varient pas trop rapidement avec la distance.

47-3 L'équation d'onde

La physique du phénomène des ondes sonores comporte donc trois caractéristiques:

- I. Le gaz se déplace et change de densité.
- II. Le changement de la densité correspond à un changement de pression.
- III. Les inégalités de pression engendrent le mouvement du gaz.

Considérons d'abord II. Pour un gaz, un liquide ou un solide, la pression est une certaine fonction de la densité. Avant que l'onde sonore n arrive, nous avons l'équilibre avec une pression P_0 et une densité correspondante ρ_0 . Une pression P dans le milieu correspondant est reliée à la densité par une certaine relation caractéristique $P = f(\rho)$ et, en particulier, la pression à l'équilibre P_0 est donnée par $P_0 = f(\rho_0)$. Les changements de pression dans le son, par rapport à la valeur d'équilibre, sont très petits. Une unité commode pour mesurer la pression est le *bar*, avec $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ n/m}^2$. La pression d'une atmosphère standard est très

proche de 1 bar: 1 atmosphère = 1,0133 bar. Dans le son nous utilisons une échelle logarithmique d'intensité, puisque la sensibilité de l'oreille est grossièrement logarithmique. Cette échelle est l'échelle décibel, dans laquelle le niveau de pression acoustique de l'amplitude de pression P est défini comme:

$$I \text{ (niveau de pression acoustique)} = 20 \log_{10}(P/P_{\text{référence}}) \text{ en db,} \quad (47.1)$$

où la pression de référence $P_{\text{réf.}} = 2 \times 10^{-10}$ bar. Une amplitude de pression $P = 10^3 P_{\text{réf.}} = 2 \times 10^{-7}$ bar* correspond à un son modérément intense de 60 décibels. Nous voyons que les changements de pression dans le son sont extrêmement faibles en comparaison avec la pression moyenne ou à l'équilibre qui vaut 1 atmosphère. Les déplacements et les changements de densité sont donc extrêmement petits. Dans les explosions, nous n'avons plus de changements aussi faibles; les pressions en excès peuvent être beaucoup plus grandes que 1 atmosphère. Ces grands changements de pression conduisent à de nouveaux effets que nous considérerons plus tard. Dans le son, nous ne considérons pas souvent des niveaux acoustiques au-dessus de 100 décibels; 120 décibels est un niveau qui est pénible à entendre. De ce fait pour le son, lorsque nous écrivons

$$P = P_0 + P_e, \quad \rho = \rho_0 + \rho_e, \quad (47.2)$$

nous aurons toujours un changement de pression P_e très petit en comparaison de P_0 et le changement de densité ρ_e est très petit en comparaison de ρ_0 . Alors

$$P_0 + P_e = f(\rho_0 + \rho_e) = f(\rho_0) + \rho_e f'(\rho_0), \quad (47.3)$$

où $P_0 = f(\rho_0)$ et $f'(\rho_0)$ signifie la dérivée de $f(\rho)$ évaluée à $\rho = \rho_0$. Nous pouvons retenir la deuxième expression de cette égalité uniquement parce que ρ_e est très petit. Nous trouvons de cette manière que l'excès de pression P_e est proportionnel à la densité en excès ρ_e , et nous pouvons appeler κ le facteur de proportionnalité:

$$P_e = \kappa \rho_e, \quad \text{où } \kappa = f'(\rho_0) = (dP/d\rho)_0. \quad \text{(II)} \quad (47.4)$$

La relation dont nous avons besoin pour II est cette relation très simple.

Considérons maintenant I. Nous allons supposer que la position d'une portion de l'air non perturbée par l'onde sonore est x et le déplacement au temps t dû au son est $\chi(x, t)$, de telle sorte que sa nouvelle position soit $x + \chi(x, t)$ comme sur la Figure 47-3. La position non perturbée d'une tranche d'air voisine est $x + \Delta x$, et sa nouvelle position est $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$. Nous pouvons maintenant trouver les variations de densité de la manière suivante. Puisque nous nous limitons à des ondes planes, nous pouvons prendre une unité de surface

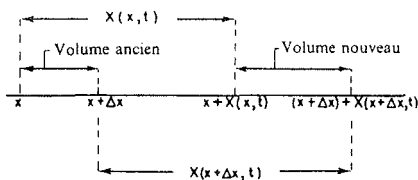


Fig. 47-3. Le déplacement de l'air en x est $\chi(x, t)$ et en $x + \Delta x$ il vaut $\chi(x + \Delta x, t)$. Le volume initial de l'air par unité de surface de l'onde plane est Δx ; le nouveau volume est $\Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - \chi(x, t)$.

* Avec ce choix de $P_{\text{réf.}}$, le P n'est pas la pression maximum de l'onde sonore mais la « moyenne quadratique » de la pression qui est $1/(2)^{1/2}$ que multiplie la pression maximum.

perpendiculaire à la direction x , qui est la direction de propagation de l'onde sonore. La quantité d'air, par unité de surface, dans Δx , est alors $\rho_0 \Delta x$, où ρ_0 est la densité de l'air à l'équilibre, non perturbé. Cet air, lorsqu'il est déplacé par l'onde sonore, se trouve maintenant entre $x + \chi(x, t)$ et $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$, de telle sorte que nous avons la même matière dans cet intervalle que dans Δx lorsqu'il n'y avait pas de perturbation. Si ρ est la nouvelle densité, alors

$$\rho_0 \Delta x = \rho [x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - x - \chi(x, t)]. \quad (47.5)$$

Puisque Δx est petit, nous pouvons écrire $\chi(x + \Delta x, t) - \chi(x, t) = (\partial \chi / \partial x) \Delta x$. Cette dérivée est une dérivée partielle, puisque χ dépend du temps aussi bien que de x . Notre équation est alors

$$\rho_0 \Delta x = \rho \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \Delta x + \Delta x \right) \quad (47.6)$$

ou

$$\rho_0 = (\rho_0 + \rho_e) \frac{\partial \chi}{\partial x} + \rho_0 + \rho_e. \quad (47.7)$$

Or, dans les ondes sonores tous les changements sont petits, de telle sorte que ρ_e est petit, χ est petit et $\partial \chi / \partial x$ est également petit. De ce fait, dans la relation que nous venons juste de trouver,

$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x} - \rho_e \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad (47.8)$$

nous pouvons négliger $\rho_e \partial \chi / \partial x$ par rapport à $\rho_0 \partial \chi / \partial x$. Ainsi nous obtenons la relation qu'il nous fallait pour I :

$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x}. \quad (I) \quad (47.9)$$

Cette équation est ce que nous pouvions prévoir physiquement. Si les déplacements varient avec x , il y aura des changements de densité. Le signe est également correct : si le déplacement χ augmente avec x , de telle sorte que l'air soit dilaté, la densité doit diminuer.

Il nous faut maintenant la troisième équation, qui est l'équation du mouvement produit par la pression. Si nous connaissons la relation entre la force et la pression, nous pouvons obtenir l'équation du mouvement. Si nous prenons une fine tranche d'air de longueur Δx et de surface unité perpendiculaire à x , la masse d'air dans cette tranche est $\rho_0 \Delta x$ et son accélération est $\partial^2 \chi / \partial t^2$, et donc la masse que multiplie l'accélération vaut pour cette tranche de matière $\rho_0 \Delta x (\partial^2 \chi / \partial t^2)$. (Pour des Δx petits, il n'est pas important que l'accélération $\partial^2 \chi / \partial t^2$ soit évaluée à un bord de la tranche ou à toute autre position intermédiaire.) Si maintenant nous trouvons la force s'exerçant sur cette quantité d'air pour une surface unité perpendiculaire à x , elle sera

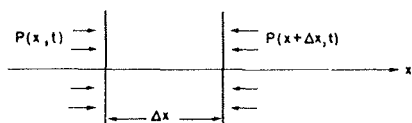


Fig. 47-4. La force résultante dans la direction x positive produite par la pression agissant sur une surface unité perpendiculaire à x , vaut $-(\partial P / \partial x) \Delta x$.

égale à $\rho_0 \Delta x (\partial^2 \chi / \partial t^2)$. Nous avons la force dans la direction $+x$, en x , de valeur $P(x, t)$ par unité de surface, et nous avons la force dans la direction opposée en $x + \Delta x$, de valeur $P(x + \Delta x, t)$ par unité de surface (Fig. 47-4):

$$P(x, t) - P(x + \Delta t, t) = - \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x = - \frac{\partial P_e}{\partial x} \Delta x, \quad (47.10)$$

puisque Δx est petit, et puisque la seule partie de P qui change est la pression en excès P_e . Nous avons maintenant III:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = - \frac{\partial P_e}{\partial x}, \quad (\text{III}) \quad (47.11)$$

et ainsi nous avons suffisamment d'équations pour relier l'ensemble et nous ramener à une seule variable, par exemple à χ . Nous pouvons éliminer P_e de III en utilisant II, de telle sorte que nous obtenons

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\kappa \frac{\partial \rho_e}{\partial x}, \quad (47.12)$$

et nous pouvons alors utiliser I pour éliminer ρ_e . De cette manière, nous trouvons que ρ_0 se simplifie et qu'il nous reste

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}. \quad (47.13)$$

Nous appellerons $c_s^2 = \kappa$, de telle sorte que nous pouvons écrire

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}. \quad (47.14)$$

Voilà l'équation d'onde qui décrit le comportement de son dans la matière.

47-4 Solutions de l'équation d'onde

Nous pouvons maintenant voir si cette équation décrit réellement les propriétés essentielles des ondes sonores dans la matière. Nous voulons en déduire qu'une impulsion sonore, ou une perturbation, se déplace à vitesse constante. Nous voulons vérifier que deux impulsions différentes peuvent se déplacer au travers l'une de l'autre - le principe de superposition. Nous voulons également vérifier que le son peut aller soit vers la droite soit vers la gauche. Toutes ces propriétés doivent être contenues dans cette seule équation.

Nous avons remarqué qu'une perturbation quelconque en forme d'onde plane qui se déplace avec une vitesse constante v a la forme $f(x - vt)$. Il nous faut maintenant voir si $\chi(x, t) = f(x - vt)$ est une solution de l'équation d'onde. Lorsque nous calculons $\partial \chi / \partial x$, nous obtenons la dérivée de la fonction $\partial \chi / \partial x = f'(x - vt)$. En dérivant une fois de plus, nous trouvons

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = f''(x - vt). \quad (47.15)$$

La différenciation de cette même fonction par rapport à t donne $-v$ que multiplie la dérivée de la fonction, ou $\partial\chi/\partial t = -vf''(x - vt)$, et la dérivée seconde par rapport au temps est

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = v^2 f''(x - vt). \quad (47.16)$$

Il est évident que $f(x - vt)$ satisfera l'équation d'onde pourvu que la vitesse de l'onde v soit égale à c_s .

Nous trouvons, de ce fait, à partir des lois de la mécanique que toute perturbation sonore se propage avec la vitesse c_s , et plus nous trouvons que

$$c_s = \kappa^{1/2} = (dP/d\rho)_0^{1/2},$$

et ainsi nous avons rattaché la vitesse de l'onde à une propriété du milieu.

Si nous considérons une onde se déplaçant dans la direction opposée, de telle sorte que $\chi(x, t) = g(x + vt)$, il est facile de voir qu'une telle perturbation satisfait également l'équation d'onde. La seule différence entre une telle onde et une autre se déplaçant de la gauche vers la droite apparaît dans le signe de v , mais que nous ayons $x + vt$ ou $x - vt$ comme variable dans la fonction n'affecte pas le signe de $\partial^2\chi/\partial t^2$, puisqu'elle ne contient que v^2 . Il en résulte que nous avons une solution pour les ondes se propageant dans n'importe quelle direction avec la vitesse c_s .

Une question extrêmement intéressante est celle de la superposition. Supposez qu'on ait trouvé une solution de l'équation d'onde, par exemple χ_1 . Cela signifie que la dérivée seconde de χ_1 par rapport à x est égale à $1/c_s^2$ que multiplie la dérivée seconde de χ_1 par rapport à t . N'importe quelle autre solution χ_2 possède cette même propriété. Si nous superposons ces deux solutions, nous avons

$$\chi(x, t) = \chi_1(x, t) + \chi_2(x, t), \quad (47.17)$$

et nous voulons vérifier que $\chi(x, t)$ est également une onde, c'est-à-dire que χ satisfait l'équation d'onde. Nous pouvons facilement prouver ce résultat, puisque nous avons

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\chi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi_2}{\partial x^2} \quad (47.18)$$

et, de plus,

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\chi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\chi_2}{\partial t^2}. \quad (47.19)$$

Il en résulte que $\partial^2\chi/\partial x^2 = (1/c_s^2) \partial^2\chi/\partial t^2$, ainsi nous avons vérifié le principe de superposition. La vérification du principe de superposition vient du fait que l'équation d'onde est linéaire en χ .

Nous pouvons maintenant prévoir qu'une onde plane de lumière se propageant dans la direction x , polarisée de telle sorte que le champ électrique soit dans la direction y satisfasse l'équation

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (47.20)$$

où c est la vitesse de la lumière. Cette équation d'onde est une des conséquences des équations de Maxwell. Les équations de l'électrodynamique conduisent à l'équation d'onde pour la lumière de la même manière que les équations de la mécanique conduisent à l'équation d'onde pour le son.

47-5 La vitesse du son

Notre déduction de l'équation pour le son nous a donné une *formule* qui relie la vitesse du son avec la vitesse de variation de la pression avec la densité à la pression normale :

$$c_s^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0. \quad (47.21)$$

En évaluant ce taux de variation, il est essentiel de savoir comment la température varie. Dans une onde sonore, nous prévoyons que dans une région de compression la température s'élève, et que dans une région de raréfaction la température diminue. Newton fut le premier à calculer le taux de variation de la pression avec la densité, et il supposa que la température restait constante. Il affirma que la chaleur était transportée d'une région à l'autre si rapidement que la température ne pouvait ni s'élever ni diminuer. Cette hypothèse donne la vitesse isotherme du son, et elle est fautive. La déduction correcte fut donnée plus tard par Laplace, qui proposa l'idée opposée – que la pression et la température varient adiabatiquement dans une onde sonore. Le flux thermique d'une région comprimée vers une région dilatée est négligeable aussi longtemps que la longueur d'onde est grande en comparaison du libre parcours moyen. A cette condition, la légère quantité de flux de chaleur dans une onde sonore ne modifie pas la vitesse, bien qu'elle produise une petite absorption d'énergie sonore. Nous pouvons prévoir correctement que cette absorption augmente lorsque la longueur d'onde s'approche du libre parcours moyen, mais ces longueurs d'onde sont plus petites d'un facteur d'environ un million que les longueurs d'onde du son audible.

La variation effective de la pression avec la densité dans une onde sonore est celle qui ne permet aucun flux de chaleur. Ceci correspond à une variation adiabatique, que nous avons trouvée être $PV^\gamma = \text{constante}$, où V était le volume. Puisque la densité ρ varie inversement avec V , la relation adiabatique entre P et ρ est

$$P = \text{const } \rho^\gamma, \quad (47.22)$$

d'où nous tirons $dP/d\rho = \gamma P/\rho$. Nous avons alors pour la vitesse du son la relation

$$c_s^2 = \frac{\gamma P}{\rho}. \quad (47.23)$$

Nous pouvons également écrire $c_s^2 = \gamma PV/\rho V$ et utiliser la relation $PV = NkT$. De plus, nous voyons que ρV est la masse du gaz, qui peut également être exprimée par Nm , ou par μ , où m est la masse d'une molécule et μ est le poids moléculaire. De cette

manière nous trouvons que

$$c_s^2 = \frac{\gamma kT}{m} = \frac{\gamma RT}{\mu}, \quad (47.24)$$

à partir duquel il est évident que la vitesse du son ne dépend que de la température du gaz et non de la pression ou de la densité. Nous avons également observé que

$$kT = \frac{1}{3}m\langle v^2 \rangle, \quad (47.25)$$

où $\langle v^2 \rangle$ est le carré moyen de la vitesse des molécules. Il en résulte que $c_s^2 = (\gamma/3) \langle v^2 \rangle$, ou

$$c_s = \left(\frac{\gamma^{1/2}}{3} \right) v_{av}. \quad (47.26)$$

Cette équation dit que la vitesse du son est égale à un certain nombre qui vaut en gros $1/(3)^{1/2}$ que multiplie une certaine vitesse moyenne, v_{moyen} , des molécules (la racine carrée de la moyenne du carré de la vitesse). En d'autres termes, la vitesse du son est du même ordre de grandeur que la vitesse des molécules, et est en réalité un petit peu plus faible que cette vitesse moyenne.

Bien entendu, nous pouvions prévoir un tel résultat, parce qu'une perturbation comme une modification de pression est, après tout, propagée par le mouvement des molécules. Cependant, un tel raisonnement ne nous donne pas la vitesse de propagation précise; il aurait pu se faire que le son soit transporté essentiellement par les molécules les plus rapides ou par les molécules les plus lentes. Il est raisonnable et satisfaisant de constater que la vitesse du son soit approximativement $\frac{1}{3}$ de la vitesse moyenne moléculaire v_{moyen} .

Battements

48-1 Additionner deux ondes

48-2 Notes de battements et modulation

48-3 Bandes latérales

48-4 Les trains d'onde localisé

48-5 Amplitudes de probabilité pour des particules

48-6 Ondes à trois dimensions

48-7 Modes normaux

48-1 Additionner deux ondes

Quelque temps auparavant, nous avons traité très en détail les propriétés des ondes de lumière et leur interférence – c'est-à-dire les effets de la superposition de deux ondes provenant de sources différentes. Dans toutes ces analyses nous avons supposé que les fréquences des sources étaient toutes les mêmes. Dans ce chapitre nous allons discuter certains des phénomènes qui résultent de l'interférence de deux sources qui ont des fréquences *différentes*.

Il est facile d'imaginer ce qui va se passer. Procédant de la même manière que nous avons fait précédemment, supposez que nous ayons deux sources émettant des oscillations égales, de même fréquence, dont les phases sont ajustées d'une manière telle que les signaux arrivent en phase en un certain point P . En ce point, s'il y a de la lumière, la lumière est très intense; si c'est du son, il est très fort; ou si ce sont des électrons, il y en a beaucoup qui arrivent. D'un autre côté, si les signaux incidents sont déphasés de 180° , nous n'obtiendrons aucun signal en P , parce que l'amplitude résultante est alors minimum. Supposez maintenant que quelqu'un tourne le « bouton de phase » d'une des sources, et fasse varier la phase en P en plus ou en moins, par exemple, en la rendant d'abord égale à zéro puis à 180° , etc. Nous verrons alors, bien sûr, des variations dans l'intensité résultante du signal. Nous voyons également que si la phase de l'une des sources change lentement relativement à celle de l'autre, d'une manière progressive et uniforme, commençant à zéro, passant à dix, vingt, trente, quarante degrés, etc., nous allons alors mesurer en P une série de « pulsations » intenses et faibles, parce que lorsque la phase varie de 360° l'amplitude revient à un maximum. Dire, bien entendu, qu'une source modifie sa phase relativement à l'autre à une vitesse uniforme est la même chose que dire que le nombre d'oscillations par seconde est légèrement différent pour les deux.

Ainsi nous connaissons la réponse: si nous avons deux sources à des fréquences légèrement différentes, nous trouverons comme résultat net une oscillation avec une intensité qui oscille lentement. En réalité, il n'y a rien de plus sur ce sujet!

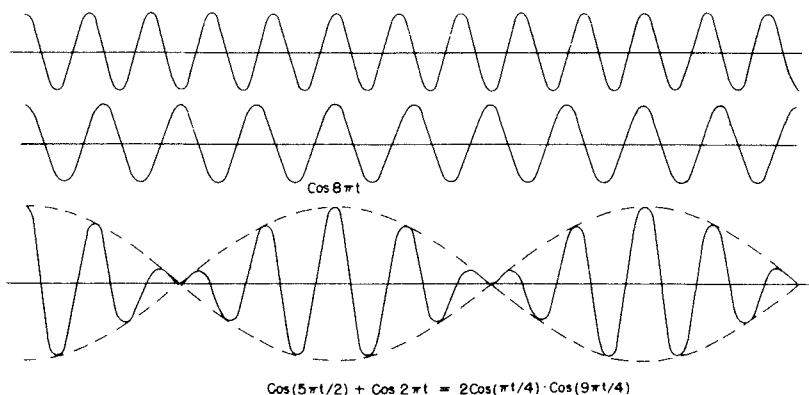


Fig. 48-1. Superposition de deux ondes sinusoïdales avec des fréquences dans le rapport 8:10. La

répétition précise de la structure à l'intérieur de chaque « battement » n'est pas typique du cas général.

Il est très facile également de formuler ce résultat mathématiquement. Supposez, par exemple, que nous ayons deux ondes et que nous ne nous préoccupions pas pour le moment de toutes leurs relations spatiales, mais que nous analysions simplement ce qui se passe en P . D'une source, nous aurons $\cos \omega_1 t$, et de l'autre source, $\cos \omega_2 t$, où les deux ω ne sont pas exactement identiques. Bien sûr, les amplitudes peuvent aussi ne pas être les mêmes, mais nous pouvons résoudre le problème général plus tard; considérons d'abord le cas où les amplitudes sont égales. Alors l'amplitude totale en P est la somme des deux cosinus. Si nous reportons les amplitudes des ondes en fonction du temps, comme à la Fig. 48-1, nous voyons que là où les crêtes coïncident nous obtenons une onde importante, et là où un creux et une crête coïncident nous obtenons pratiquement zéro, et lorsque les crêtes coïncident à nouveau nous obtenons à nouveau une onde intense.

Mathématiquement, il nous faut simplement additionner deux cosinus et un peu réarranger le résultat. Il existe de nombreuses relations utiles entre cosinus qui ne sont pas difficiles à établir. Bien sûr, nous savons que

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}, \quad (48.1)$$

et que e^{ia} possède une partie réelle, $\cos a$, et une partie imaginaire $\sin a$. Si nous prenons la partie réelle de $e^{i(a+b)}$, nous obtenons $\cos(a+b)$. Si nous multiplions:

$$e^{ia} e^{ib} = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b),$$

nous obtenons $\cos a \cos b - \sin a \sin b$, plus une certaine partie imaginaire. Mais nous n'avons besoin que de la partie réelle, ainsi nous avons

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \quad (48.2)$$

Maintenant si nous changeons le signe de b , puisque le cosinus ne change pas de signe au contraire du sinus, la même équation, pour b négatif, est

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \quad (48.3)$$

Si nous additionnons ces deux équations, nous perdons les sinus et nous apprenons que le produit de deux cosinus est la moitié du cosinus de la somme, plus la moitié du cosinus de la différence :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos (a + b) + \frac{1}{2} \cos (a - b). \quad (48.4)$$

Nous pouvons maintenant retourner la formule et trouver une formule pour $\cos a + \cos b$ si nous posons simplement $a = a + b$ et $a = a - b$. C'est-à-dire, $a = \frac{1}{2}(a + b)$ et $b = \frac{1}{2}(a - b)$, de telle sorte que

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta). \quad (48.5)$$

Nous pouvons maintenant traiter notre problème. La somme de $\cos \omega_1 t$ et $\cos \omega_2 t$ est

$$\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t = 2 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t. \quad (48.6)$$

Supposons maintenant que les deux fréquences soient presque les mêmes, de telle sorte que $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ soit la fréquence moyenne, et soit plus ou moins la même que toutes les deux. Mais $\omega_1 - \omega_2$ est *beaucoup plus petite* que ω_1 ou ω_2 , parce que, comme nous le supposons, ω_1 et ω_2 sont pratiquement égales. Cela signifie que nous pouvons représenter la solution en disant qu'il y a une onde sinusoïdale de fréquence élevée plus ou moins semblable à celle dont nous sommes partis, mais que sa « taille » change lentement — sa « taille » varie avec une fréquence qui apparaît égale à $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$. Mais est-ce là cette fréquence à laquelle nous entendons les battements ? Bien que (48.6) dise que l'amplitude varie comme $\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t$, elle nous dit en réalité que les oscillations de hautes fréquences sont contenues entre deux courbes sinusoïdales opposées (montré en pointillé sur la Figure 48-1). Sur cette base, on pourrait dire que l'amplitude varie à la fréquence $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$, mais si nous parlons de l'intensité de l'onde, nous devons considérer qu'elle a une fréquence double. La modulation de l'amplitude, c'est-à-dire de l'importance de son intensité, se fait à la fréquence $\omega_1 - \omega_2$, bien que la formule nous dise que nous multiplions par une onde sinusoïdale à la moitié de cette fréquence. Le fondement technique de cette différence est que l'onde de haute fréquence possède une relation de phase un peu différente dans la deuxième moitié du cycle.

Ignorant cette petite complication, nous pouvons conclure que si nous additionnons deux ondes de fréquences ω_1 et ω_2 , nous obtiendrons une onde résultante de fréquence moyenne $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ qui oscille en intensité avec une fréquence $(\omega_1 - \omega_2)$.

Si les deux amplitudes sont différentes, nous pouvons tout recommencer en multipliant les cosinus par différentes amplitudes A_1 et A_2 , et faire beaucoup de mathématiques, réarrangeant l'ordre et utilisant les équations comme (48.2)-(48.5). Cependant, il y a d'autres manières plus simples de faire le même calcul. Par exemple, nous savons qu'il est beaucoup plus facile de travailler avec des exponentielles qu'avec des sinus et des cosinus et que nous pouvons représenter $A_1 \cos \omega_1 t$ comme la partie réelle de $A_1 e^{i\omega_1 t}$. L'autre onde sera de même la partie réelle de $A_2 e^{i\omega_2 t}$. Si nous additionnons les deux, nous obtenons $A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t}$. Si nous mettons alors en facteur la fréquence moyenne, nous obtenons

$$A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} = e^{1/2 i(\omega_1 + \omega_2)t} [A_1 e^{1/2 i(\omega_1 - \omega_2)t} + A_2 e^{-1/2 i(\omega_1 - \omega_2)t}]. \quad (48.7)$$

A nouveau nous avons l'onde de haute fréquence avec une modulation à la fréquence la plus basse.

48-2 Notes de battements et modulation

Si on nous demande maintenant l'intensité d'une onde de l'équation (48.7), nous pouvons soit prendre le carré absolu du côté gauche, ou du côté droit. Prenons le côté gauche. L'intensité est alors

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t. \quad (48.8)$$

Nous voyons que l'intensité augmente et diminue à une fréquence $\omega_1 - \omega_2$, variant entre les limites $(A_1 + A_2)^2$ et $(A_1 - A_2)^2$. Si $A_1 \neq A_2$, l'intensité minimum n'est pas nulle.

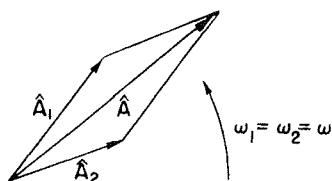


Fig. 48-2. La résultante de deux vecteurs complexes de fréquences égales.

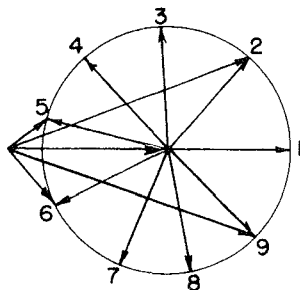


Fig. 48-3. La résultante de deux vecteurs complexes de fréquences inégales, observée dans le système de référence tournant de l'un des vecteurs. On a indiqué neuf positions consécutives du vecteur qui tourne lentement.

Une manière supplémentaire de représenter cette idée peut se faire par l'intermédiaire d'un dessin comme celui de la Figure 48-2. Nous dessinons un vecteur de longueur A_1 tournant à une fréquence ω_1 , pour représenter l'une des ondes dans le plan complexe. Nous dessinons un autre vecteur de longueur A_2 , tournant à une fréquence ω_2 , pour représenter la deuxième onde. Si les deux fréquences sont exactement égales, leur résultante est de longueur fixe lorsque l'ensemble tourne, et nous obtenons au total une intensité fixe et définie. Mais si les fréquences sont légèrement différentes, les deux vecteurs complexes tournent à des vitesses différentes. La Figure 48-3 montre l'aspect de la situation par rapport au vecteur $A_1 e^{i\omega_1 t}$. Nous voyons que A_2 tourne lentement en s'écartant de A_1 , et ainsi l'amplitude que nous obtenons en additionnant les deux est d'abord forte, et puis lorsqu'ils se séparent, lorsqu'ils atteignent une position relative de 180° la résultante devient particulièrement faible, etc. Au fur et à mesure que les vecteurs tournent, l'amplitude de la somme vectorielle devient plus grand puis plus faible, et ainsi l'intensité oscille. C'est une idée relativement simple, et il y a de nombreuses manières différentes de représenter la même chose.

L'effet est très facile à observer expérimentalement. Dans le cas de l'acoustique, nous pouvons disposer deux haut-parleurs pilotés par deux oscillateurs séparés, un pour chaque haut-parleur, de telle sorte que chacun produise un ton. Nous recevons ainsi une note venant d'une source et une note différente venant de l'autre source. Si nous rendons les fréquences exactement les mêmes, l'effet résultant aura une intensité définie en un certain endroit

de l'espace. Si alors nous les désaccordons un petit peu, nous entendons une certaine variation de l'intensité. Plus elles sont désaccordées, plus rapides sont les variations du son. L'oreille a certaine difficulté à suivre des variations plus rapides que dix environ par seconde.

Nous pouvons également voir ces effets sur un oscilloscope qui reproduit simplement la somme des deux courants envoyés aux deux haut-parleurs. Si la fréquence de pulsation est relativement lente, nous voyons simplement un train d'onde sinusoïdal dont l'amplitude oscille, mais lorsque nous rendons les pulsations plus rapides nous voyons le type d'onde indiqué sur la Figure 48-1. Lorsque nous augmentons les différences de fréquences, les « sommets » se rapprochent les uns des autres. De même, si les amplitudes ne sont pas exactement égales et que nous rendons un signal plus important que l'autre, nous obtenons alors une onde dont l'amplitude n'atteint jamais zéro exactement, comme nous nous y attendions. Tout fonctionne de la manière voulue, à la fois acoustiquement et électriquement.

Le phénomène opposé se produit également! Dans les transmissions radio, utilisant ce qu'on appelle la *modulation d'amplitude* (MA), le son est envoyé par la station radio de la manière suivante: l'émetteur radio émet une oscillation électrique alternative qui a une fréquence très élevée, par exemple 800 kilocycles par seconde, dans la bande radio. Lorsque cette onde porteuse est branchée, la station radio émet une onde qui est d'amplitude uniforme à 800.000 oscillations par seconde. La manière dont l'« information » est transmise – ce genre d'information futile sur la marque de voiture à acheter – est que lorsque quelqu'un parle dans un microphone, l'amplitude du signal porteur est modifiée par les vibrations du son pénétrant dans le microphone.

Si nous prenons comme cas mathématique le plus simple, le cas d'un soprano chantant une note parfaite, avec des oscillations sinusoïdales parfaites de ses cordes vocales, nous obtenons alors un signal dont l'intensité varie comme indiqué sur la Figure 48-4. L'alternance à des fréquences audibles est alors récupérée dans le récepteur; nous nous débarrassons de l'onde porteuse et regardons simplement l'enveloppe qui représente les oscillations des cordes vocales ou le son du chanteur. Le haut-parleur produit alors des vibrations correspondantes à la même fréquence dans l'air, et l'auditeur est alors essentiellement incapable de dire la différence, à ce qu'ils disent. A cause d'un grand nombre de distorsions et d'autres effets subtils, il est, en fait, possible de dire si nous écoutons une radio ou un soprano en chair et en os; pour le reste, l'idée générale est celle que l'on vient d'indiquer.

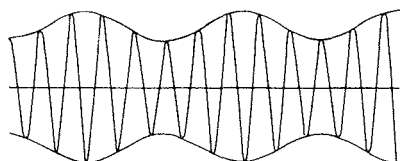


Fig. 48-4. Une porteuse modulée. Dans ce tracé schématique, $\omega_c/\omega_m=5$. Dans une onde de radio, $\omega_c/\omega_m \sim 100$.

48-3 Bandes latérales

Mathématiquement, l'onde modulée décrite ci-dessus s'exprimera comme

$$S = (1 + b \cos \omega_m t) \cos \omega_c t, \quad (48.9)$$

ou ω_c représente la fréquence de la porteuse et ω_m est la fréquence du

ton audible. A nouveau nous utilisons tous ces théorèmes sur les cosinus, ou encore nous pouvons utiliser $e^{i\theta}$; cela revient au même – c'est plus facile de le faire avec $e^{i\theta}$, mais c'est finalement la même chose. Nous obtenons alors

$$S = \cos \omega_c t + \frac{1}{2}b \cos (\omega_c + \omega_m)t + \frac{1}{2}b \cos (\omega_c - \omega_m)t. \quad (48.10)$$

Ainsi, d'un autre point de vue, nous pouvons dire que l'onde résultante du système est formée de trois ondes en superposition: d'abord l'onde régulière à la fréquence ω_c , c'est-à-dire à la fréquence porteuse, et ensuite deux nouvelles ondes à deux nouvelles fréquences. L'une est à la fréquence porteuse plus la fréquence de modulation, et l'autre est à la fréquence porteuse moins la fréquence de modulation. Si, de ce fait, nous faisons un graphique de l'intensité créée par le générateur en fonction de la fréquence, nous trouverons beaucoup d'intensité à la fréquence de la porteuse, naturellement, mais lorsqu'un chanteur se met à chanter, nous verrons soudainement apparaître une intensité proportionnelle à la force de voix du chanteur, b^2 , aux fréquences $\omega_c + \omega_m$ et $\omega_c - \omega_m$, comme indiqué sur la Figure 48-5. On appelle cela des *bandes latérales*; lorsque l'émetteur envoie un signal modulé, il contient des bandes latérales. S'il y a plus d'une seule note en même temps, par exemple ω_m et ω_m' , il y a deux instruments qui jouent; ou s'il y a n'importe quelle autre onde sinusoïdale compliquée, alors nous pouvons voir par le calcul que nous obtenons des ondes en plus qui correspondent aux fréquences $\omega_c \pm \omega_m$.

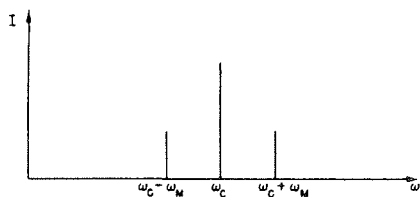


Fig. 48-5. Le spectre de fréquence d'une onde porteuse ω_c modulée par une seule onde sinusoïdale ω_m .

De ce fait, lorsqu'on est en présence d'une modulation compliquée qui peut être représentée comme la somme de plusieurs cosinus*, nous trouvons que l'émetteur réel émet sur un intervalle de fréquences, à savoir la fréquence porteuse plus ou moins la fréquence maximum que contient le signal de modulation.

Bien que, à première vue, nous puissions penser qu'un émetteur de radio émette seulement à la fréquence sinusoïdale de la porteuse, puisqu'on y trouve de gros oscillateurs à cristal super-stables, et que tout est ajusté pour que ce soit précisément à 800 kilocycles, dès le moment où quelqu'un *annonce* que l'émetteur est à 800 kilocycles, il module les 800 kilocycles et ainsi il n'est plus exactement à 800 kilocycles! Supposez que

* Faisons une petite remarque complémentaire: Dans quelles conditions une courbe peut-elle être représentée comme une somme d'un ensemble de cosinus? *Réponse:* Dans toutes les cas ordinaires, à l'exception de certains cas auxquels les mathématiciens peuvent rêver. Bien entendu, la courbe doit n'avoir qu'une valeur en un point donné, et elle ne doit pas être une courbe extraordinaire qui saute un nombre infini de fois sur une distance infiniment petite ou quelque chose de ce genre. Mis à part de telles restrictions, toute courbe raisonnable (une courbe qu'une chanteuse est capable de produire en faisant vibrer ses cordes vocales) peut toujours être composée de l'addition de diverses ondes sinusoïdales.

les amplificateurs soient construits de telle sorte qu'ils soient capables d'émettre sur une large partie du domaine de la sensibilité de l'oreille (l'oreille peut entendre jusqu'à 20.000 cycles par seconde, mais d'habitude les récepteurs de radio et les émetteurs ne fonctionnent pas au-delà de 10.000, et nous n'entendons donc pas les fréquences les plus élevées), lorsque le speaker parle, sa voix peut contenir des fréquences allant, par exemple, jusqu'à 10.000 cycles, et donc l'émetteur émet à des fréquences qui peuvent aller de 790 à 810 kilocycles par seconde. S'il y a une autre station à 795 kc/sec, il y aura pas mal de confusion. De même, si nous rendons notre récepteur si sensible qu'il ne prenne que 800, et ne prenne pas les 10 kilocycles de chaque côté, nous n'entendrons pas ce que l'homme nous dit, parce que l'information se trouve sur ces autres fréquences! Il est donc absolument essentiel de maintenir les stations à une certaine distance, de telle sorte que leurs bandes latérales ne se chevauchent pas, de même que le récepteur ne doit pas être si sélectif qu'il ne permette pas la réception des bandes latérales aussi bien que celle de la fréquence nominale principale. Dans le cas du son, ce problème ne crée pas en réalité de grandes difficultés. Nous pouvons entendre sur un domaine de ± 20 kc/sec, et nous allons habituellement de 500 à 1.500 kc/sec dans le domaine des ondes radio, de telle sorte qu'il y a de la place pour de nombreuses stations.

Le problème de la télévision est plus compliqué. Lorsque le faisceau d'électrons balaie la face avant du tube à image, il crée de nombreuses petites taches de lumière et d'obscurité. Cette « lumière » et cette « obscurité » est le « signal ». Habituellement le faisceau balaie toute l'image, 500 lignes approximativement, en un trentième de seconde. Considérons que la résolution de la figure soit plus ou moins la même verticalement et horizontalement, de telle sorte qu'il y ait le même nombre de taches par centimètre le long d'une ligne balayée. Nous voulons être en mesure de distinguer le sombre du clair, le sombre du clair, le sombre du clair, sur par exemple 500 lignes. Pour faire ceci avec des ondes sinusoïdales, la plus courte longueur d'onde nécessaire correspond donc à une longueur d'onde, de maximum à maximum, d'un 250ème de la dimension de l'écran. Nous avons donc $250 \times 500 \times 30$ parcelles d'information par seconde. La fréquence la plus haute que nous allons transporter sera donc près de 4 mégacycles par seconde. En réalité, pour séparer les stations de télévision nous avons besoin d'un peu plus que cela, environ 6 mégacycles par seconde; une partie est utilisée pour transporter le signal sonore et d'autres informations. Ainsi les canaux de télévision sont larges de 6 mégacycles par seconde. Il ne serait certainement pas possible de transmettre la TV sur une porteuse de 800 kc/sec, puisque nous ne pouvons pas moduler à une fréquence plus haute que la porteuse.

En tout cas, la bande de télévision commence à 54 mégacycles. Le premier canal de transmission qui est le canal 2 (!), a un domaine de fréquence de 54 à 60 mégacycles par seconde, ce qui représente une largeur de 6 mégacycles. « Mais », peut-on dire, « nous venons de prouver qu'il y avait des bandes latérales des deux côtés, et il faudrait donc avoir deux fois cette largeur. Il se trouve que les ingénieurs électroniciens sont assez intelligents. Si nous analysons le signal de modulation, utilisant non seulement les termes cosinus, mais les termes en cosinus et en sinus, pour tenir compte des différences de phases, nous voyons alors qu'il y a une relation définie et invariante entre la bande latérale du côté de la haute fréquence et la bande latérale du côté de la basse fréquence. Ce que nous voulons dire est qu'il n'y a pas d'informations nouvelles sur cette bande de l'autre côté. Aussi on supprime une bande d'un côté et le récepteur est câblé de telle sorte que l'information qui manque soit reconstituée en regardant la bande d'un seul côté et la porteuse. La transmission d'une seule bande latérale est un procédé intelligent pour diminuer la largeur nécessaire pour transmettre l'information.

48-4 Les trains d'ondes localisés

Le sujet suivant que nous allons traiter est l'interférence d'onde à la fois dans l'espace et dans le temps. Supposez que nous ayons deux ondes se déplaçant dans l'espace. Nous savons, bien sûr, que nous pouvons représenter une onde se déplaçant dans l'espace par $e^{i(\omega t - kx)}$. Ceci peut être par exemple le déplacement d'une onde sonore. C'est une solution de l'équation d'onde pourvu que $\omega^2 = k^2 c^2$, où c est la vitesse de propagation de l'onde. Dans ce cas, nous pouvons l'écrire sous la forme $e^{ik(x - ct)}$, qui est de la forme générale $f(x - ct)$. Ce doit être donc une onde qui se déplace à cette vitesse, ω/k , c'est-à-dire c et tout est correct.

Nous voulons maintenant additionner deux telles ondes. Supposez que nous ayons une onde qui se déplace à une fréquence, et une autre onde se déplaçant à une autre fréquence. Nous laissons au lecteur le soin de considérer le cas où les amplitudes sont différentes; ça ne fait pas grande différence. Ainsi nous voulons additionner $e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{i(\omega_2 t - k_2 x)}$. Nous pouvons les additionner par un calcul de même genre que celui utilisé lorsque nous additionnions les ondes de signal. Bien entendu, si c'est le même pour les deux, c'est facile, puisque c'est la même chose que nous avons faite précédemment:

$$e^{i\omega_1(t-x/c)} + e^{i\omega_2(t-x/c)} = e^{i\omega_1 t'} + e^{i\omega_2 t'}, \quad (48.11)$$

à l'exception que $t' = t - x/c$ est la variable au lieu de t . Nous obtenons donc le même type de modulation, naturellement, et nous voyons, bien sûr, que ces modulations se déplacent avec l'onde. En d'autres termes, si nous additionnons deux ondes, et que ces ondes ne soient pas simplement en train d'osciller, mais soient également en train de se déplacer dans l'espace, l'onde résultante se déplace également, à la même vitesse.

Nous aimerions généraliser ceci au cas d'ondes pour lesquelles la relation entre la fréquence et le nombre d'ondes k n'est pas aussi simple. Exemple: un matériau ayant un indice de réfraction. Nous avons déjà étudié la théorie de l'indice de réfraction au Chapitre 31, où nous avons trouvé que nous pouvions écrire $k = n\omega/c$, où n est un indice de réfraction. Comme exemple intéressant, pour les rayons X nous avons trouvé que l'indice n vaut

$$n = 1 - \frac{Nq_e^2}{2\epsilon_0 m \omega^2}. \quad (48.12)$$

Nous avons établi en réalité une formule plus compliquée au Chapitre 31, mais celle-ci fait tout aussi bien l'affaire, comme exemple.

Incidemment, nous savons que même lorsque ω et k ne sont pas linéairement proportionnels, le rapport ω/k est certainement égal à la vitesse de propagation pour cette fréquence et ce nombre d'ondes particuliers. Nous appelons ce rapport, la *vitesse de phase*; c'est la vitesse à laquelle se déplacent la phase, ou les nœuds d'une onde seule:

$$v_p = \frac{\omega}{k}. \quad (48.13)$$

Cette vitesse de phase, dans le cas des rayons X dans le verre, est plus grande que la vitesse de la lumière dans le vide (puisque n dans 48.12 est inférieur à 1), et c'est un petit peu gênant, puisque nous ne pensons pas que nous puissions envoyer des signaux plus rapides que la vitesse de la lumière!

Nous allons maintenant discuter l'interférence de deux ondes dans lesquelles ω et k sont reliés par une certaine formule définie. La formule ci-dessus pour n dit que k est donné en fonction de ω . Pour être précis, dans ce problème particulier, la formule de k en fonction de ω est

$$k = \frac{\omega}{c} - \frac{a}{\omega c}, \quad (48.14)$$

où $a = Nq_e^2/2\epsilon_0 m$, est une constante. De toute manière, à chaque fréquence correspond un nombre d'ondes défini, et nous voulons additionner deux telles ondes.

Faisons-le de la manière suivie pour l'équation (48.7):

$$e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} = e^{1/2 i[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x]} \times \{e^{1/2 i[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]} + e^{-1/2 i[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]}\}. \quad (48.15)$$

Ainsi nous avons de nouveau une onde modulée, une onde qui se déplace à la fréquence moyenne et avec le nombre d'ondes moyen, mais dont l'intensité varie d'une manière qui dépend de la différence de fréquence et de la différence de nombre d'ondes.

Considérons maintenant le cas où la différence entre les deux ondes est relativement petite. Supposez que nous additionnons deux ondes dont les fréquences sont pratiquement égales; alors $(\omega_1 + \omega_2)/2$ est pratiquement la même chose que chacune des deux ω et de même pour $(k_1 + k_2)/2$. De ce fait, la vitesse de l'onde, des oscillations rapides, des nœuds, est encore essentiellement ω/k . Mais regardez, la vitesse de propagation de la modulation n'est plus la même! De combien devons-nous changer x pour rendre compte d'un certain intervalle t ? La vitesse de cette onde de modulation est le rapport

$$v_M = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}. \quad (48.16)$$

La vitesse de modulation est quelquefois appelée la *vitesse de groupe*. Si nous prenons le cas où la différence de fréquence est relativement petite et la différence en nombre d'ondes est aussi relativement petite, cette expression tend vers la limite,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (48.17)$$

En d'autres termes, pour la modulation la plus lente, les battements les plus lents, il y a une vitesse définie à laquelle ils se déplacent, qui n'est pas la même que la vitesse de phase des ondes – quelle chose mystérieuse!

La vitesse de groupe est la dérivée de ω par rapport à k , et la vitesse de phase est ω/k .

Voyons si nous pouvons comprendre pourquoi. Considérons deux ondes, à nouveau de longueurs d'onde légèrement différentes, comme sur la Fig. (48-1). Elles sont en opposition de phase, en phase, en opposition de phase, etc. Ces ondes représentent en réalité les ondes dans l'espace se déplaçant également avec des fréquences légèrement différentes. Parce que la vitesse de phase, la vitesse des nœuds de ces deux ondes, n'est pas exactement la même, quelque chose de nouveau se produit.

Supposez que nous enfourchions une de ces ondes et que nous regardions l'autre; si elles se déplacent toutes les deux à la même vitesse, l'autre onde restera exactement là où elle était relativement à nous, au fur et à mesure de notre mouvement sur une crête. Nous nous déplaçons sur cette crête et juste en face de nous, nous voyons une crête; si les deux vitesses sont égales, les crêtes restent à la hauteur l'une de l'autre. Mais il n'est *pas vrai* que les deux vitesses soient réellement égales. Il n'y a qu'une petite différence de fréquence et donc simplement une petite différence de vitesse, mais à cause de cette différence de vitesse, lorsque nous nous déplaçons avec l'onde l'autre onde se déplace lentement vers l'avant par exemple, ou vers l'arrière, par rapport à notre onde. Ainsi lorsque le temps passe, qu'arrive-t-il au nœud? Si nous déplaçons un train d'ondes d'une toute petite quantité vers l'avant, les nœuds se déplacent vers l'avant (ou vers l'arrière) d'une distance considérable. C'est-à-dire que la somme de ces deux ondes possède une enveloppe, et lorsque les ondes se déplacent, l'enveloppe se déplace sur elles à une vitesse différente. La *vitesse de groupe* est la vitesse à laquelle les signaux modulés sont transmis.

Si nous produisons un signal, c'est-à-dire un certain type de changement dans l'onde qui puisse être reconnu lorsque nous l'écoutons, une sorte de modulation, cette modulation va se déplacer à la vitesse de groupe, pourvu que les modulations soient relativement lentes. (Lorsqu'elles sont rapides, c'est beaucoup plus difficile à analyser.)

Nous pouvons maintenant montrer (au bout du compte), que la vitesse de propagation des rayons X dans un morceau de carbone n'est *pas* plus grande que la vitesse de la lumière, bien que la vitesse de phase *soit* plus grande que la vitesse de la lumière. Pour ce faire, nous devons trouver dv_g/dk , que nous obtenons en différenciant (48.14): $dk/d\omega = 1/c + a/\omega^2 c$. La vitesse de groupe est l'inverse de ceci, à savoir,

$$v_g = \frac{c}{1 + a/\omega^2}, \quad (48.18)$$

qui est plus petit que c ! Ainsi, bien que les phases puissent se déplacer plus rapidement que la vitesse de la lumière, le signal de modulation se déplace plus lentement et c'est la solution de notre paradoxe apparent! Bien sûr, si nous avons le cas simple où $\omega = kc$, alors dv_g/dk vaut également c . Ainsi, lorsque toutes les phases ont la même vitesse, le groupe a naturellement la même vitesse.

48-5 Amplitudes de probabilité pour des particules

Considérons maintenant un exemple supplémentaire de vitesse de phase qui est extrêmement intéressant. Il est lié à la mécanique quantique. Nous savons que l'amplitude de trouver une particule en un endroit peut, en certaines circonstances, varier dans l'espace et le temps, par exemple à une dimension, de cette manière:

$$\psi = Ae^{i(\omega t - kx)}, \quad (48.19)$$

où ω est la fréquence, qui est reliée à la notion classique de l'énergie par $E = \hbar\omega$, et k est le nombre d'ondes qui est relié à la quantité de mouvement par $p = \hbar k$. Nous dirions que la particule avait une quantité de mouvement définie p si le nombre d'ondes était exactement k , c'est-à-dire pour une onde parfaite qui se déplace avec partout la même amplitude. L'équation (48.19) donne l'amplitude, et si nous'en prenons le carré du module, nous obtenons la probabilité relative de trouver la particule en fonction de la position

et du temps. Ceci est une *constante*, ce qui signifie que la probabilité est la même de trouver une particule n'importe où. Supposez, maintenant, au lieu de cela, que nous avons une configuration où nous savons que la particule a plus de chance de se trouver dans un endroit plutôt que dans un autre. Nous représenterons une telle configuration par une onde qui possède un maximum et diminue de chaque côté (Fig. 48-6). (Ce n'est pas tout à fait la même chose qu'une onde telle que [48-1], qui possède une série de maxima, mais il est possible en additionnant plusieurs ondes de valeurs de ω et de k très voisines, d'éliminer pratiquement tous les maxima sauf un.)

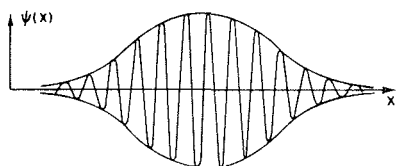


Fig. 48-6. Un train d'onde localisé.

Dans ces circonstances, puisque le carré de (48.19) représente la probabilité de trouver une particule quelque part, nous savons qu'à un instant donné la particule a plus de chance de se trouver près du centre du « paquet » où l'amplitude de l'onde est maximum. Si maintenant nous attendons quelques instants, les ondes vont se déplacer, et après un certain temps le « paquet » se trouvera quelque part ailleurs. Si nous savons que la particule initialement était située quelque part, classiquement, nous nous *attendrions* à ce qu'elle soit quelque part ailleurs, parce qu'après tout elle possède une *vitesse*, et une quantité de mouvement. La théorie quantique va avoir pour limite la théorie classique correcte pour les relations de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la vitesse seulement si la vitesse de groupe, la vitesse de modulation, est égale à la vitesse que nous obtiendrions classiquement pour une particule de même quantité de mouvement.

Il est maintenant nécessaire de démontrer que ceci est ou n'est pas le cas. Selon la théorie classique, l'énergie est reliée à la vitesse par une équation telle que

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (48.20)$$

De même, la quantité de mouvement est

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (48.21)$$

C'est la théorie classique, et comme conséquence de la théorie classique, en éliminant v , nous pouvons montrer que

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4.$$

C'est le résultat final à quatre dimensions dont nous avons parlé et reparlé, que $p_\mu \cdot p_\mu = m^2$; c'est la relation entre l'énergie et la quantité de mouvement dans la théorie classique. Cela signifie, puisque ces E et p vont devenir des ω et des k , par substitution de $E = \hbar\omega$ et $p = \hbar k$, que pour la mécanique quantique il est nécessaire que

$$\frac{\hbar^2\omega^2}{c^2} - \hbar^2k^2 = m^2c^2. \quad (48.22)$$

Ceci est donc la relation entre la fréquence et le nombre d'ondes d'une onde d'amplitude en mécanique quantique représentant une particule de masse m . De cette équation nous pouvons déduire que ω est

$$\omega = c\sqrt{k^2 + m^2c^2/\hbar^2}.$$

La vitesse de phase, ω/k , est ici à nouveau plus rapide que la vitesse de la lumière!

Considérons maintenant la vitesse de groupe. La vitesse de groupe doit être $d\omega/dk$, la vitesse à laquelle les modulations se déplacent. Il nous faut dériver une racine carrée, ce qui n'est pas très difficile. La dérivée est

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{kc}{\sqrt{k^2 + m^2c^2/\hbar^2}}.$$

La racine carrée est, après tout, ω , ainsi nous pouvons écrire ceci comme $d\omega/dk = c^2k/\omega$. De plus, k/ω vaut p/E , ainsi

$$v_g = \frac{c^2p}{E}.$$

Mais de (48.20) et (48.21), $c^2p/E = v$, la vitesse de la particule, selon la mécanique classique. Ainsi nous voyons que tandis que la relation fondamentale de mécanique quantique $E = \hbar\omega$ et $p = \hbar k$, pour l'identification de ω et de k avec les E et p classiques, ne produit que l'équation $\omega^2 - k^2c^2 = m^2c^4/\hbar^2$, nous comprenons maintenant les relations (48.20) et (48.21) qui relient E et p à la vitesse. Bien sûr, la vitesse de groupe doit être la vitesse de la particule, si l'interprétation doit avoir un sens. Si nous pensons que la particule se trouve en un endroit à un certain moment, et ensuite dix minutes plus tard nous pensons qu'elle est à tel autre endroit, comme le dit la mécanique quantique, la distance traversée par le « paquet » divisée par l'intervalle de temps doit être, classiquement, la vitesse de la particule.

48-6 Ondes à trois dimensions

Nous allons maintenant terminer notre discussion des ondes avec quelques remarques générales sur l'équation d'ondes. Ces remarques ont comme but de donner quelques vues sur le futur – non pas que nous puissions exactement tout comprendre maintenant, mais plutôt pour voir de quoi les choses auront l'air lorsque nous étudierons les ondes un petit peu plus. D'abord, l'équation d'ondes pour le son à une dimension était

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2},$$

où c est la vitesse de n'importe quelle onde – dans le cas du son, c 'est la vitesse du son; dans le cas de la lumière, c 'est la vitesse de la lumière. Nous avons montré que pour une onde sonore les déplacements se propagent d'eux-mêmes à une certaine vitesse. Mais la pression en excès se propage également à une certaine vitesse, et de même la densité en excès. Ainsi nous prévoyons que la pression satisfait la même équation et c'est bien le cas.

Nous laisserons le soin au lecteur de le prouver. *Indication*: p_e est proportionnel au taux de changement de χ par rapport à x . De ce fait, si nous différencions l'équation d'onde par rapport à x , nous découvrirons immédiatement que $\partial\chi/\partial x$ satisfait la même équation. C'est-à-dire, p_e satisfait la même équation. Mais P_e est proportionnel à p_e , et de ce fait P_e suit également. Ainsi la pression, les déplacements, toutes ces grandeurs satisfont la même équation d'onde.

Habituellement, on voit l'équation d'onde pour le son écrite en termes de pression au lieu d'être en termes de déplacement, parce que la pression est un scalaire et ne possède pas de direction. Mais le déplacement est un vecteur et possède une direction, et il est donc plus facile d'analyser la pression.

Le sujet suivant que nous allons traiter est en relation avec l'équation d'onde à trois dimensions. Nous savons que la solution de l'onde sonore à une dimension est $e^{i(\omega t - kx)}$, avec $\omega = kc_s$, mais nous savons également qu'à trois dimensions une onde sera représentée par $e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$ où, dans ce cas, $\omega^2 = k^2 c_s^2$, ce qui vaut, bien sûr, $(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) c_s^2$. Nous voulons maintenant deviner ce que sera l'équation d'onde correcte à trois dimensions. Naturellement, pour le cas du son ceci peut être déduit en utilisant la même démonstration dynamique à trois dimensions que celle que nous avons utilisée à une dimension. Mais nous ne ferons pas cela; au lieu de cela nous écrirons simplement ce qui en résulte: l'équation pour la pression (ou le déplacement, ou toute autre chose) est

$$\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_e}{\partial z^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 P_e}{\partial t^2}. \quad (48.23)$$

On peut vérifier que c'est correct en substituant $e^{i(\omega t - k \cdot r)}$. Manifestement, chaque fois que nous dérivons par rapport à x , nous multiplions par $-ik_x$. Si nous dérivons deux fois, cela revient à multiplier par $-k_x^2$, ainsi le premier terme doit devenir $-k_x^2 P_e$, pour cette onde. De la même manière, le deuxième terme devient $-k_y^2 P_e$, et le troisième terme devient $-k_z^2 P_e$. Sur la droite, nous obtenons $-(\omega^2/c_s^2) P_e$. Si nous éliminons les P_e et changeons le signe, nous voyons que la relation entre k et ω est celle que nous voulons.

Revenant en arrière, nous ne pouvons pas résister à vous écrire la grande équation qui correspond à l'équation de dispersion (48.22) pour les ondes de mécanique quantique. Si ϕ représente l'amplitude de trouver une particule dans une position x, y, z au temps t , alors la grande équation de mécanique quantique pour des particules libres est celle-ci:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi. \quad (48.24)$$

Avant tout, le caractère relativiste de cette expression est suggéré par l'apparition de x, y, z et t dans la combinaison habituelle que la relativité emploie. Deuxièmement, c'est une équation d'onde qui, si nous essayons une onde plane, va produire comme conséquence $-k^2 + \omega^2/c^2 = m^2 c^2/\hbar^2$, qui est la relation exacte pour la mécanique quantique. Il y a encore une autre grande chose contenue dans l'équation d'onde: le fait que toute superposition d'ondes soit également une solution. Ainsi cette équation contient toute la mécanique quantique et la relativité que nous avons vue, jusqu'à présent, pour le moins aussi longtemps qu'elle concerne une seule particule dans l'espace libre sans potentiels externes ou forces sur elle!

48-7 Modes normaux

Nous considérons maintenant un autre exemple de phénomène de battements qui est assez curieux et un petit peu différent. Imaginez deux pendules égaux qui ont, entre eux, une liaison par un ressort assez faible. Ils sont fabriqués d'aussi près que possible avec la même longueur. Si nous en écartons un et le laissons aller, il se déplace en oscillant, et il tire sur le ressort de liaison au fur et à mesure de son oscillation et c'est donc aussi une machine qui crée une force à la fréquence naturelle de l'autre pendule. De ce fait, comme conséquence de la théorie de la résonance, que nous avons étudiée précédemment, lorsque nous exerçons une force sur quelque chose à la bonne fréquence, on va agir sur l'autre pendule. Ainsi, il est sûr qu'un pendule oscillant va agir sur l'autre. Cependant, dans cette circonstance il y a quelque chose de nouveau qui apparaît, parce que l'énergie totale du système est finie. Ainsi, lorsqu'un pendule transfère son énergie à l'autre pour le faire osciller, il perd lui-même graduellement de l'énergie jusqu'à ce que, si la période s'accorde bien avec la vitesse, il perde toute son énergie et soit réduit à une condition stationnaire! Alors, bien sûr, c'est la balle de l'autre pendule qui a toute l'énergie, tandis que la première n'en a plus, et lorsque le temps passe nous voyons que cela fonctionne également dans la direction opposée, et que l'énergie est rendue à la première balle; c'est un phénomène très intéressant et amusant. Nous avons dit cependant que ceci est relié à la théorie des battements, et nous devons maintenant expliquer comment nous pouvons analyser ce mouvement du point de vue de la théorie des battements.

Nous avons remarqué que le mouvement de l'une ou l'autre des deux balles est une oscillation dont l'amplitude change d'une manière cyclique. De ce fait, le mouvement de l'une des balles peut être probablement analysé d'une manière différente, en ceci qu'il est la somme de deux oscillations, présentes au même instant mais ayant deux fréquences légèrement différentes. De ce fait, il doit être possible de trouver deux autres mouvements dans ce système, et de dire que ce que nous voyions était une superposition de ces deux solutions, parce que c'est bien entendu un système linéaire. En effet, il est facile de trouver deux manières de commencer le mouvement, chacune d'elles est un mouvement parfait, à une seule fréquence – absolument périodique. Le mouvement avec lequel nous avions commencé précédemment n'était pas strictement périodique, puisqu'il ne durait pas; une balle passait son énergie à l'autre et ainsi changeait son amplitude; mais il y a des manières de commencer le mouvement de telle sorte que rien ne change et, bien entendu, aussitôt que nous le voyons nous comprenons pourquoi. Par exemple, si nous lançons les deux pendules ensemble, puisqu'ils ont la même longueur et que le ressort n'a plus aucun rôle, ils vont bien sûr continuer de se balancer de la même manière tout le temps, en supposant qu'il n'y ait pas de frottement et que tout soit parfait. D'un autre côté, il y a un autre mouvement possible qui possède également une fréquence définie: c'est-à-dire que si nous déplaçons les deux pendules d'une manière opposée en les tirant de chaque côté exactement de distances égales, alors à nouveau ils suivront des mouvements absolument périodiques. Nous pouvons comprendre que le ressort ajoute simplement une légère contribution à la force de rappel qu'a la gravité fournit, c'est tout, et le système continue simplement d'osciller à une fréquence légèrement supérieure à celle du premier cas. Pourquoi supérieure? Parce que le ressort tire en plus de la gravitation et cela rend le système un petit peu plus « raide », de telle sorte que la fréquence de ce mouvement est simplement un tout petit peu plus élevée que celle de l'autre.

Ainsi ce système a deux manières d'osciller avec des amplitudes qui ne changent pas : il peut soit osciller de telle sorte que les deux pendules se balancent de la même manière et oscillent tout le temps à une fréquence, ou ils peuvent aller dans des directions opposées à une fréquence légèrement plus élevée.

Or le mouvement réel de l'ensemble, parce que le système est linéaire, peut être représenté comme une superposition des deux. (Le sujet de ce chapitre, rappelez-vous, est l'effet produit en ajoutant deux mouvements de fréquences différentes.) Ainsi, imaginez ce qui se passe si nous combinons ces deux solutions. Si à $t = 0$ les deux mouvements sont lancés avec des amplitudes égales et en phase, la somme des deux mouvements signifie qu'une balle, étant menée dans un sens par le premier mouvement et dans l'autre sens par le deuxième mouvement, se trouve au zéro, tandis que l'autre balle ayant été déplacée de la même manière par les deux mouvements, possède une amplitude élevée. Au fur et à mesure que le temps passe, cependant, les deux *mouvements* de base s'effectuent indépendamment, ainsi la phase de l'un relativement à l'autre change lentement. Cela signifie que, après un temps suffisamment long, lorsque le temps est suffisant pour qu'un mouvement puisse avoir réalisé « 900½ » oscillations, tandis que l'autre n'en a fait que « 900 », la phase relative sera exactement renversée par rapport à ce qu'elle était précédemment. C'est-à-dire que le mouvement de large amplitude sera réduit à zéro et pendant ce temps, bien sûr, la balle initialement sans mouvement aura atteint son amplitude maximum !

Ainsi nous voyons que nous pouvons analyser ce mouvement compliqué, soit par l'idée qu'il y a une résonance et que l'un des pendules passe de l'énergie à l'autre ou autrement par la superposition de deux mouvements d'amplitude constante à deux fréquences différentes.

Modes

49-1 La réflexion des ondes

49-2 Ondes limitées avec des fréquences naturelles

49-3 Modes à deux dimensions

49-4 Pendules couplés

49-5 Systèmes linéaires

49-1 La réflexion des ondes

Ce chapitre sera consacré à quelques phénomènes remarquables qui proviennent du fait que l'on enferme des ondes dans une région de dimension finie. Nous serons conduits d'abord à découvrir quelques faits particuliers sur les cordes vibrantes, par exemple, puis la généralisation de ces faits nous donnera un principe qui est probablement le principe de mathématique physique dont la portée est la plus grande.

Notre premier exemple d'ondes contenues consistera à limiter une onde à une frontière. Considérons l'exemple simple d'une onde à une dimension sur une corde. On pourrait aussi bien considérer le son à une dimension frappant une paroi, ou d'autres cas similaires, mais l'exemple d'une corde sera suffisant pour ce qui nous concerne maintenant. Supposez que la corde soit maintenue à une extrémité, par exemple en la fixant à un mur «infiniment solide». Ceci peut être exprimé mathématiquement en disant que le déplacement y de la corde à la position $x = 0$ doit être nul, car l'extrémité ne se déplace pas. Nous savons que s'il n'y avait pas de mur, la solution générale du mouvement serait la somme de deux fonctions, $F(x - ct)$ et $G(x + ct)$, la première représentant une onde se déplaçant dans un sens sur la corde, et la deuxième une onde se déplaçant dans l'autre sens sur la même corde :

$$y = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (49.1)$$

est la solution générale pour n'importe quelle corde. Mais nous devons ensuite satisfaire la condition que la corde ne se déplace pas à une extrémité. Si nous introduisons $x = 0$ dans l'équation (49.1) et que nous examinons y pour toute valeur de t , nous obtenons $y = F(-ct) + G(+ct)$. Si maintenant ceci doit être nul tout le temps, cela signifie que la fonction $G(ct)$ doit être égale à $-F(-ct)$. En d'autres termes, G de quelque chose doit être égal à $-F$ de moins la même chose. Si ce résultat est réintroduit

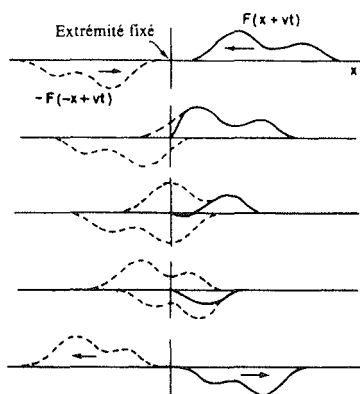


Fig. 49-1. Réflexion d'une onde obtenue comme une superposition de deux ondes mobiles.

dans l'équation (49.1), nous trouvons que la solution du problème est

$$y = F(x - ct) - F(-x - ct). \quad (49.2)$$

Il est facile de vérifier que nous obtiendrons $y = 0$ si nous faisons $x = 0$.

La Figure 49-1 montre une onde se déplaçant dans la direction x négative près de $x = 0$, et une onde hypothétique se déplaçant dans l'autre direction de signe opposé et de l'autre côté de l'origine. Nous disons hypothétique parce que, bien sûr, il n'y a pas de corde qui vibre de ce côté de l'origine. Le mouvement complet de la corde doit être considéré comme la somme de ces deux ondes dans la région de x positif. Lorsqu'elles atteignent l'origine, elles vont s'opposer à chaque instant en $x = 0$, et finalement la deuxième onde (réfléchie) sera la seule à exister pour des valeurs positives de x et bien entendu, se déplacera dans la direction opposée. Ces résultats sont équivalents à l'énoncé suivant: si une onde atteint l'extrémité rigide d'une corde, elle sera réfléchie avec changement de signe. Une telle réflexion peut toujours être analysée en imaginant que ce qui se rapproche de l'extrémité de la corde retourne à l'envers comme s'il venait de derrière le mur. En bref, si nous supposons que la corde est infinie et que chaque fois que nous avons une onde se déplaçant dans l'autre sens avec la symétrie indiquée, le déplacement en $x = 0$ sera toujours nul et il n'est pas important que nous fixions la corde en ce point.

Le point suivant qu'il nous faut discuter est la réflexion d'une onde périodique. Supposez que l'onde représentée par $F(x - ct)$ soit une onde sinusoïdale et qu'elle ait été réfléchie; alors l'onde réfléchie $-F(-x - ct)$ est également une onde sinusoïdale de même fréquence, mais se déplaçant dans la direction opposée. La façon la plus simple de décrire ceci est d'utiliser la notation de fonction complexe: $F(x - ct) = e^{i\omega(t - x/c)}$ et $F(-x - ct) = e^{i\omega(t + x/c)}$. On peut voir que si ces équations sont substituées dans (49.2) et que si l'on fait x égale 0, alors $y = 0$ pour toutes les valeurs de t , ce qui satisfait la condition nécessaire. A cause des propriétés des exponentielles, ceci peut être écrit d'une manière plus simple:

$$y = e^{i\omega t}(e^{-i\omega x/c} - e^{i\omega x/c}) = -2ie^{i\omega t} \sin(\omega x/c). \quad (49.3)$$

Il y a ici quelque chose d'intéressant et de nouveau, en ce sens que cette solution nous dit que si nous regardons n'importe quel x donné, la corde oscille à la fréquence ω . Quelle que soit la position du point, la fréquence est la même! Mais il y a certains endroits, en particulier chaque fois que $\sin(\omega x/c) = 0$, où il n'y pas de déplacement du tout. De plus, si à n'importe quel instant t nous prenons un instantané de la corde vibrante, la figure obtenue sera une onde sinusoïdale. Cependant, le déplacement de cette onde sinusoïdale va dépendre du temps t . En considérant l'équation (49.3) nous pouvons voir que la longueur d'un cycle de l'onde sinusoïdale est égale à la longueur d'onde de n'importe laquelle des ondes superposées:

$$\lambda = 2\pi c/\omega. \quad (49.4)$$

Les points où il n'y a pas de mouvement satisfont la condition $\sin(\omega x/c) = 0$, ce qui signifie que $(\omega x/c) = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$. Ces points sont appelés des *nœuds*. Entre deux nœuds successifs, tout point se déplace verticalement sinusoïdalement, mais l'allure générale du mouvement reste fixe dans l'espace. Ceci est la caractéristique fondamentale de ce que nous appelons un *mode*. Si l'on peut trouver un comportement du mouvement qui a la propriété qu'en tout point l'objet se déplace parfaitement sinusoïdalement, et que tous les points se déplacent à la même fréquence (bien que certains se déplacent davantage que d'autres), alors nous avons ce qui est appelé un *mode*.

49-2 Ondes limitées avec des fréquences naturelles

Le problème intéressant qui suit consiste à considérer ce qui se passe si la corde est maintenue à ses deux extrémités, par exemple en $x = 0$ et en $x = L$. Nous pouvons commencer avec l'idée de la réflexion des ondes, envisageant d'abord un certain type de déformation se déplaçant dans une direction. Au fur et à mesure que le temps passe, nous nous attendons à ce que la déformation se rapproche d'une des extrémités, et plus tard encore elle deviendra une sorte de petite oscillation, parce qu'elle se combine avec son image renversée qui provient de l'autre côté. Finalement, la déformation initiale va disparaître et la déformation image se déplacera dans l'autre direction pour répéter le processus à l'autre extrémité. Ce problème possède une solution facile, mais une question intéressante est de savoir si nous pouvons avoir un mouvement sinusoïdal (la solution que l'on vient de décrire est *périodique*, mais bien entendu elle n'est pas *sinusoïdalement* périodique). Essayons de produire une onde sinusoïdale périodique sur une corde. Lorsque la corde est fixée à une extrémité, nous savons que cela doit ressembler à notre solution précédente (49.3). Si elle est fixée à l'autre extrémité, elle doit apparaître d'une manière semblable à l'autre extrémité. Ainsi la seule possibilité pour créer un mouvement sinusoïdal périodique est que l'onde sinusoïdale s'adapte précisément à la longueur de la corde. Si cela ne se produit pas, alors ce n'est pas une fréquence naturelle à laquelle la corde peut continuer d'osciller. En bref, si la corde est lancée avec une forme d'onde sinusoïdale qui s'adapte juste, alors elle continuera de garder cette forme parfaite d'une onde sinusoïdale et elle aura des oscillations harmoniques à une certaine fréquence.

Mathématiquement nous pouvons, pour décrire la forme, écrire $\sin kx$ où k est égal au facteur (ω/c) dans les équations (49.3) et (49.4) et cette fonction sera nulle en $x = 0$. Elle doit être également nulle à l'autre extrémité. La signification de cette condition est que k ne peut plus être arbitraire comme c'était le cas de la corde attachée à une seule extrémité. Lorsque la corde est attachée aux deux extrémités, la seule possibilité est que $\sin(kL) = 0$, parce que c'est la

seule condition qui permet de maintenir fixe les deux extrémités. Mais pour qu'un sinus soit nul, il faut que l'angle soit égal à $0, \pi, 2\pi$, ou tout autre multiple entier de π . L'équation

$$kL = n\pi \quad (49.5)$$

donnera donc n'importe laquelle des valeurs possibles de k , selon la valeur de l'entier que l'on y met. Pour chacune des valeurs de k il y a une certaine fréquence ω , qui selon (49.3) est simplement

$$\omega = kc = n\pi c/L. \quad (49.6)$$

Ainsi nous avons trouvé la chose suivante: qu'une corde a la propriété qu'elle peut avoir des mouvements sinusoïdaux, *mais seulement à certaines fréquences*. Ceci est la caractéristique la plus importante des ondes limitées. Quelle que soit la complication du système, il se trouve toujours qu'il y a certaine forme de mouvement qui possède une dépendance temporelle parfaitement sinusoïdale, mais avec des fréquences qui dépendent du système particulier et de la nature de ses frontières. Dans le cas de la corde, nous avons plusieurs fréquences différentes possibles, chacune, par définition, correspondant à un mode, parce qu'un mode est une forme de mouvement qui se répète sinusoïdalement. La Figure 49-2 montre les trois premiers modes d'une corde. Pour le premier mode la longueur d'onde est égale à $2L$. Ceci, on peut le voir si on continue de tracer l'onde jusqu'à $x = 2L$ pour obtenir un cycle complet de l'onde sinusoïdale. La fréquence angulaire ω est égale à $2\pi c$ divisé par la longueur d'onde, en général, et dans ce cas puisque λ vaut $2L$, la fréquence est $\pi c/L$, ce qui est en accord avec (49.6) pour $n = 1$. Appelons ω_1 la fréquence du premier mode. Le mode suivant présente alors deux boucles avec un nœud au milieu. Pour ce mode la longueur d'onde vaut simplement L . La valeur correspondante de k est deux fois plus grande et la fréquence est deux fois plus importante; elle vaut $2\omega_1$. Pour le troisième mode elle vaut $3\omega_1$, etc. Ainsi toutes les fréquences différentes de la corde sont des multiples 1, 2, 3, 4, etc., de la fréquence la plus basse ω_1 .

Si l'on revient maintenant au mouvement général d'une corde, il se trouve qu'un mouvement possible quelconque peut toujours être analysé en affirmant que plusieurs modes agissent

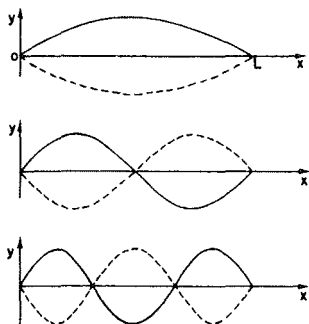


Fig. 49-2. Les trois premiers modes d'une corde vibrante.

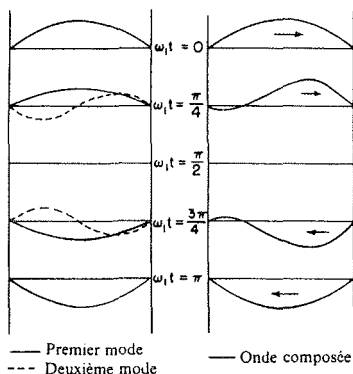


Fig. 49-3. Deux modes se combinent pour donner une onde mobile.

en même temps. En fait, pour un mouvement général un nombre infini de modes doivent être excités en même temps. Pour voir ce qui se passe, essayons d'illustrer ce qui se produit lorsqu'il y a deux modes d'oscillations en même temps: Supposez que le premier mode oscille comme indiqué sur la suite des dessins de la Figure 49-3, ce qui illustre la déformation de la corde à des intervalles de temps également espacés se répartissant sur un demi-cycle de la plus basse fréquence.

Nous supposons qu'il y a en même temps une oscillation du deuxième mode. La Figure 49-3 montre également une suite de dessins de ce mode, qui au départ est déphasé de 90° par rapport au premier mode. Ceci signifie qu'au départ il n'y a pas de déplacement, mais que les deux moitiés de la corde ont des vitesses directement opposées. Nous rappelons alors un principe général lié aux systèmes linéaires: si on considère deux solutions quelconques, leur somme est également une solution. Ainsi un troisième mouvement possible de la corde sera un déplacement obtenu en additionnant les deux solutions indiquées sur la Figure 49-3. Le résultat, également indiqué sur la figure, commence à suggérer l'idée d'une déformation allant dans un sens puis dans l'autre entre les extrémités de la corde, bien qu'avec deux modes seulement nous ne soyons pas en mesure d'en faire une très bonne représentation; il faut davantage de modes. Ce résultat est, en fait, un cas particulier d'un grand principe concernant les systèmes linéaires:

Tout mouvement peut être analysé en supposant qu'il est la somme des mouvements de tous les modes différents, combinés avec des amplitudes et des phases appropriées.

L'importance de ce principe vient du fait que chaque mode est extrêmement simple – ce n'est rien d'autre qu'un mouvement sinusoïdal dans le temps. Il est vrai que même le mouvement général d'une corde n'est pas vraiment très compliqué, mais il existe d'autres systèmes, par exemple l'oscillation de l'aile d'un avion dans lequel le mouvement est bien plus compliqué. Néanmoins, même avec une aile d'avion, nous trouvons qu'il y a une certaine sorte de torsion qui possède une fréquence et qu'il existe d'autres sortes de torsion qui ont d'autres fréquences. Si on peut trouver ces modes, alors le mouvement complet peut toujours être calculé comme une superposition d'oscillations harmoniques (sauf lorsque l'oscillation devient telle que le système ne peut plus être considéré comme linéaire).

49-3 Modes à deux dimensions

L'exemple suivant que nous allons considérer est le cas intéressant des modes à deux dimensions. Jusqu'à maintenant nous n'avons parlé que de cas à une dimension – une corde tendue ou des ondes sonores dans un tube. Nous devons, pour finir, considérer le cas de trois dimensions, mais une étape plus facile sera celle du cas à deux dimensions. Considérons pour être précis une peau de tambour rectangulaire et en caoutchouc qui est limitée de telle sorte qu'elle ne peut avoir de déplacement nulle part sur le bord rectangulaire, et supposons que les dimensions du rectangle soient a et b , comme on le montre sur la Figure 49-4. La question est alors de savoir quelles sont les caractéristiques du mouvement possible. Nous pouvons commencer de la même manière que pour la corde. Si nous n'avons aucune limitation, nous nous attendrions à des ondes se propageant avec un certain type de mouvement ondulatoire. Par exemple, $(e^{i\omega t})(e^{ik_x x} + i k_y y)$ représenterait une onde sinusoïdale se déplaçant dans une certaine direction qui dépend des valeurs relatives de k_x et k_y . Comment pouvons-nous faire en sorte que l'axe x , c'est-à-dire la droite $y = 0$, soit un nœud? En utilisant les idées

développées pour la corde à une dimension, nous pouvons imaginer une autre onde représentée par la fonction complexe $(-e^{i\omega t})(e^{-ik_x x - ik_y y})$. La superposition de ces deux ondes donnera un déplacement nul en $y=0$ indépendamment des valeurs de x et de t . (Bien que ces fonctions soient définies pour des y négatifs où il n'y a pas de peau de tambour qui puisse vibrer, ceci peut être ignoré, puisque le déplacement est vraiment zéro en $y=0$). Dans ce cas, nous pouvons considérer la seconde fonction comme étant l'onde réfléchie.

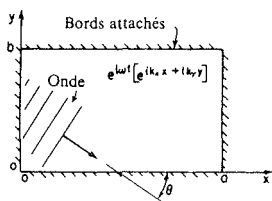


Fig. 49-4. Plaque vibrante rectangulaire.

Cependant nous voulons une ligne nodale en $y=b$ aussi bien qu'en $y=0$. Comment obtenons-nous cela? La solution est reliée à ce que nous avons fait lorsque nous avons étudié la réflexion à partir de cristaux. Ces ondes qui se détruisent mutuellement en $y=0$ feront la même chose en $y=b$ seulement si $2b \sin \theta$ est un multiple entier de λ , où θ est l'angle montré sur la Figure 49-4:

$$m\lambda = 2b \sin \theta, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (49.7)$$

De la même manière nous pouvons faire de l'axe y une ligne nodale en ajoutant deux fonctions supplémentaires $-(e^{i\omega t})(e^{+ik_x x + ik_y y})$ et $+(e^{i\omega t})(e^{+ik_x x - ik_y y})$, chacun représentant une réflexion de l'une des deux autres ondes sur la droite $x=0$. La condition pour obtenir une ligne nodale en $x=a$ est semblable à celle pour $y=b$. Il faut que $2a \cos \theta$ soit également un multiple entier de λ :

$$n\lambda = 2a \cos \theta. \quad (49.8)$$

Le résultat final est alors que les ondes se réfléchissent dans la boîte produisant une structure d'onde stationnaire, c'est-à-dire un mode défini.

Ainsi nous devons satisfaire les deux conditions ci-dessus si nous voulons avoir un mode. Commençons par déterminer la longueur d'onde. On peut l'obtenir en éliminant l'angle θ entre (49.7) et (49.8) pour obtenir la longueur d'onde en fonction de a , b , n et m . La manière la plus simple de faire est de diviser les deux côtés des équations respectives par $2b$ et $2a$, les élever au carré, et ajouter les deux équations. Le résultat est $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 = (n\lambda/2a)^2 + (m\lambda/2b)^2$, qui peut être résolu pour λ :

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{n^2}{4a^2} + \frac{m^2}{4b^2}. \quad (49.9)$$

De cette manière, nous avons déterminé la longueur d'onde en fonction de deux entiers, et à partir de la longueur d'onde nous obtenons immédiatement la fréquence ω , parce que, comme nous le savons, la fréquence est égale à $2\pi c$ divisée par la longueur d'onde.

Ce résultat est intéressant et suffisamment important pour que nous devions l'établir par un calcul mathématique plutôt que par un raisonnement sur des réflexions.

Représentons une vibration par une superposition de quatre ondes choisies de telle sorte que les quatre droites $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ et $y = b$ soient toutes des nœuds. De plus, nous poserons comme condition que toutes les ondes aient la même fréquence, de telle sorte que le mouvement résultant représente un mode. Par notre traitement antérieur de la réflexion de la lumière, nous savons que $(e^{i\omega t})(e^{-ik_x x + ik_y y})$ représente une onde se déplaçant dans la direction indiquée sur la Figure 49-4. L'équation (49.6), c'est-à-dire $k = \omega/c$, est toujours valable, pourvu que

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (49.10)$$

Il est clair que sur le dessin $k_x = k \cos \theta$ et $k_y = k \sin \theta$.

Notre équation du déplacement, que l'on peut appeler ϕ , de la peau rectangulaire prend alors la forme imposante:

$$\phi = [e^{i\omega t}][e^{(-ik_x x + ik_y y)} - e^{(+ik_x x + ik_y y)} - e^{(-ik_x x - ik_y y)} + e^{(+ik_x x - ik_y y)}]. \quad (49.11a)$$

Bien que ceci paraisse plutôt compliqué, la somme de toutes ces expressions n'est pas très difficile à effectuer. Les exponentielles peuvent être rassemblées pour donner des fonctions sinus, de telle sorte que le déplacement soit en fin de compte

$$\phi = [-4 \sin k_x x \sin k_y y][e^{i\omega t}]. \quad (49.11b)$$

En d'autres termes, c'est une oscillation sinusoïdale avec une structure qui est également sinusoïdale à la fois dans la direction x et dans la direction y . Nos conditions aux limites sont bien entendu satisfaites en $x = 0$ et en $y = 0$. Nous voulons également que ϕ soit nul lorsque $x = a$ et $y = b$. Ce qui fait que nous devons introduire deux autres conditions: $k_x a$ doit être un multiple entier de π , et $k_y b$ doit être un autre multiple entier de π . Puisque nous avons vu que $k_x = k \cos \theta$ et $k_y = k \sin \theta$, nous obtenons immédiatement les équations (49.7) et (49.8) et, de là, le résultat final de (49.9).

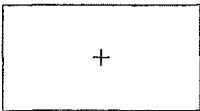
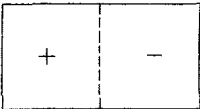
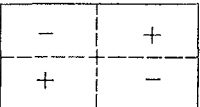
Considérons maintenant comme exemple un rectangle dont la longueur est deux fois la largeur. Si nous prenons $a = 2b$ et utilisons les équations (49.4) et (49.9), nous pouvons calculer les fréquences de tous les modes:

$$\omega^2 = \left(\frac{\pi c}{b}\right)^2 \frac{m^2 + n^2}{4}. \quad (49.12)$$

Le Tableau 49-1 donne une liste de quelques modes simples et montre également leurs formes d'une manière qualitative.

Le point le plus important sur lequel il faut insister dans ce cas particulier est que les fréquences ne sont pas les multiples l'une de l'autre, ni de n'importe quel autre nombre. L'idée que les fréquences naturelles sont reliées harmoniquement n'est généralement pas vraie. Ce n'est pas vrai pour un système de plus d'une dimension, de même que ce n'est pas vrai pour des systèmes à une dimension qui sont plus compliqués qu'une corde de densité et de tension uniforme. Un exemple simple de ce que nous venons de dire est une chaîne suspendue dans laquelle la tension est plus élevée au sommet qu'en bas. Si on met une telle chaîne en oscillation harmonique, on trouve divers modes et diverses fréquences, mais les fréquences ne sont pas des multiples simples d'un nombre, de même que les formes des modes ne sont pas sinusoïdales.

Tableau 49-1

Forme du mode	m	n	$(\omega/\omega_0)^2$	ω/ω_0
	1	1	1.25	1.12
	1	2	2.00	1.41
	1	3	3.25	1.80
	2	1	4.25	2.06
	2	2	5.00	2.24

Les modes de systèmes plus compliqués sont encore plus compliqués. Par exemple, à l'intérieur de la bouche nous avons une cavité au-dessus des cordes vocales, et en déplaçant la langue et les lèvres, etc., nous constituons un tuyau ouvert aux extrémités ou un tuyau fermé aux extrémités de diamètres et de formes différents; c'est un résonateur terriblement compliqué, mais c'est néanmoins un résonateur. Lorsqu'on parle avec les cordes vocales, celles-ci sont faites de manière à produire un certain type de ton. Le ton est assez compliqué et il y a plusieurs sons qui en sortent, mais la cavité de la bouche modifie encore ce ton à cause des différentes fréquences de résonance de la cavité. Par exemple, un chanteur peut chanter différentes voyelles a, ou o, ou ou, etc., avec la même hauteur, mais elles résonnent différemment parce que les diverses harmoniques sont en résonance dans la cavité de manières différentes. L'importance vraiment grande des fréquences de résonance d'une cavité pour la modification des sons de la voix peut être démontrée par une expérience simple. Puisque la vitesse du son varie comme l'inverse de la racine carrée de la densité, la vitesse du son peut être modifiée en utilisant des gaz différents. Si on utilise l'hélium au lieu de l'air, de telle sorte que la densité soit plus faible, la vitesse du son est bien plus élevée et toutes les fréquences de la cavité en seront augmentées. De ce fait, si on remplit la gorge de quelqu'un avec de l'hélium avant qu'il ne parle, le caractère de sa voix sera profondément altéré bien que les cordes vocales continuent de vibrer à la même fréquence.

49-4 Pendules couplés

Finalement, nous devons insister sur le fait que les modes existent non seulement pour des systèmes compliqués continus, mais également pour des systèmes mécaniques très simples. Un bon exemple en est le système de deux pendules couplés discuté au chapitre précédent. Nous avons montré dans le chapitre précédent que le mouvement pouvait être analysé comme une superposition de deux mouvements harmoniques avec des fréquences différentes. Ainsi, même ce système peut être décrit en fonction de mouvements harmoniques ou de modes. La corde possède un nombre infini de modes et la surface à deux dimensions possède également un nombre infini de modes. En un sens, c'est une infinité double, si nous savons comment compter des infinis. Mais un objet mécanique simple qui n'a que deux degrés de liberté, et qui ne nécessite que deux variables pour le décrire, ne possède que deux modes.

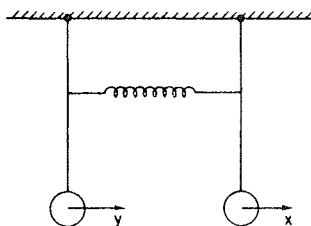


Fig. 49-5. Deux pendules couplés.

Essayons de faire une analyse mathématique de ces deux modes pour le cas où les pendules ont la même longueur. Appelons x le déplacement de l'un et y le déplacement de l'autre, comme indiqué sur la Figure 49-5. Sans ressort, la force sur la première masse est proportionnelle au déplacement de cette masse, à cause de la gravité. S'il n'y avait pas de ressort, on obtiendrait une certaine fréquence naturelle ω_0 pour ce pendule seul. L'équation du mouvement sans le ressort serait

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x. \quad (49.13)$$

L'autre pendule se balancerait de la même manière s'il n'y avait pas de ressort. En plus de la force de rappel due à la gravitation, il existe une force supplémentaire tirant la première masse. Cette force dépend de l'écart de x par rapport à y et est proportionnelle à cette différence, de telle sorte qu'elle s'exprime comme le produit d'une constante qui dépend de la géométrie, par $(x - y)$. La même force agit en sens opposé sur la deuxième masse. Les équations du mouvement qui doivent être résolues sont donc

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - k(x - y), \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m\omega_0^2 y - k(y - x). \quad (49.14)$$

Afin de trouver un mouvement dans lequel les deux masses se déplacent à la même fréquence, nous devons déterminer de combien chaque masse se déplace. En d'autres termes, le pendule x et le pendule y vont osciller à la même fréquence, mais leurs amplitudes

doivent avoir certaines valeurs A et B , dont la relation est fixée. Essayons cette solution :

$$x = Ae^{i\omega t}, \quad y = Be^{i\omega t}. \quad (49.15)$$

Si nous substituons ceci dans l'équation (49.14) et que les termes semblables soient rassemblés, les résultats sont

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m} \right) A &= -\frac{k}{m} B, \\ \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m} \right) B &= -\frac{k}{m} A. \end{aligned} \quad (49.16)$$

Les équations telles qu'elles viennent d'être écrites ont perdu un facteur commun $e^{i\omega t}$ et ont été divisées par m .

Nous voyons maintenant que nous avons deux équations pour ce qui semble être deux inconnues. Mais il n'y a pas en réalité ici *deux* inconnues, parce que la dimension totale du mouvement est quelque chose que nous ne pouvons pas déterminer à partir de ces équations. Les équations ci-dessus ne peuvent déterminer que le *rapport de A sur B* , mais elles doivent toutes les deux donner le même rapport. La nécessité pour ces deux équations d'être en accord exige que la fréquence soit quelque chose de très particulier.

Dans ce cas particulier, ceci peut être trouvé assez facilement. Si les deux équations sont multipliées l'une par l'autre, le résultat est

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m} \right)^2 AB = \left(\frac{k}{m} \right)^2 AB. \quad (49.17)$$

Le terme AB peut être simplifié des deux côtés tant que A et B ne sont pas nuls, ce qui signifie qu'il n'y a pas de mouvement du tout. S'il y a mouvement, alors les autres termes doivent être égaux, donnant une équation quadratique à résoudre. Le résultat est qu'il y a deux fréquences possibles :

$$\omega_1^2 = \omega_0^2, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{2k}{m}. \quad (49.18)$$

De plus, si ces valeurs de fréquence sont ramenées dans l'équation (49.16), nous trouvons que pour la première fréquence $A = B$, et que pour la deuxième fréquence $A = -B$. Ce sont là les « formes des modes », comme on peut le vérifier immédiatement par l'expérience.

Il est clair que dans le premier mode, où $A = B$, le ressort n'est jamais tendu et que les deux masses oscillent à la fréquence ω_0 , comme si le ressort était absent. Dans l'autre solution, où $A = -B$, le ressort contribue à la force de rappel et élève la fréquence. Un cas plus intéressant se produit si les pendules n'ont pas la même longueur. L'analyse est très semblable à celle donnée ci-dessus, et elle est laissée sous forme d'exercice à l'attention du lecteur.

49-5 Systèmes linéaires

Résumons les idées dont nous venons de parler qui sont toutes des aspects de ce qui est probablement le principe de physique mathématique le plus général et le plus magnifique. Si nous considérons un système linéaire dont le caractère est indépendant du temps, le mouvement

n'a aucune raison d'avoir une simplicité particulière, et en fait peut être extrêmement complexe, mais il existe des mouvements très particuliers, habituellement une série de mouvements particuliers pour lesquels la structure d'ensemble du mouvement varie exponentiellement avec le temps. Pour les systèmes vibrants dont nous parlons maintenant, l'exponentielle est imaginaire, et au lieu de dire « exponentiellement » nous pourrions préférer dire « sinusoïdalement » avec le temps. Cependant, on peut être plus général et dire que les mouvements vont varier exponentiellement avec le temps selon des modes très particuliers, avec des formes très particulières. Le mouvement le plus général du système peut toujours être représenté comme une superposition du mouvement comprenant chacune des exponentielles différentes.

Il vaut la peine de le répéter pour le cas du mouvement sinusoïdal : un système linéaire ne doit pas nécessairement se déplacer selon un mouvement purement sinusoïdal, c'est-à-dire à une seule fréquence définie, mais quelle que soit la manière dont il se déplace, ce mouvement peut être représenté comme une superposition de mouvements sinusoïdaux purs. La fréquence de chacun de ces mouvements est une caractéristique du système, et le type ou la forme d'onde de chaque mouvement est également une caractéristique du système. Le mouvement général dans n'importe quel système semblable peut être caractérisé en donnant l'intensité et la phase de chacun de ces modes, et en les additionnant tous. Autrement dit, n'importe quel système vibrant linéaire est équivalent à un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants avec des fréquences naturelles correspondant aux modes.

Nous concluons ce chapitre en faisant une remarque sur la liaison entre les modes et la mécanique quantique. En mécanique quantique, l'objet qui vibre ou la chose qui varie dans l'espace est l'amplitude d'une fonction de probabilité qui donne la probabilité de trouver un électron, ou un système d'électrons, dans une configuration donnée. Cette fonction d'amplitude peut varier dans l'espace et dans le temps et satisfait, en fait, une équation linéaire. Mais en mécanique quantique il existe une transformation, en ce sens que ce que nous appelons la fréquence de l'amplitude de probabilité est égale, au sens classique, à l'énergie. Ainsi nous pouvons transposer le principe énoncé ci-dessus à ce cas en prenant le mot *fréquence* et en le remplaçant par *énergie*. Cela devient quelque chose comme ceci : un système de mécanique quantique, par exemple un atome, ne doit pas nécessairement avoir une énergie définie, de même qu'un système mécanique simple ne doit pas nécessairement avoir une fréquence définie ; mais quelle que soit la manière dont le système se comporte, son comportement peut toujours être représenté comme une superposition d'états d'énergie définie. L'énergie de chaque état est une caractéristique de l'atome, et il en est de même de la structure des amplitudes qui détermine la probabilité de trouver les particules en différents endroits. Le mouvement général peut être décrit en donnant l'amplitude de chacun de ces différents états d'énergie. C'est là l'origine des niveaux d'énergie en mécanique quantique. Puisque la mécanique quantique est représentée par des ondes, dans les conditions où l'électron ne possède pas suffisamment d'énergie pour pouvoir définitivement quitter le proton, ce sont des *ondes* limitées. De même que les ondes limitées sur une corde, il existe des fréquences définies pour la solution de l'équation d'onde en mécanique quantique. L'interprétation de la mécanique quantique est que ceci représente des *énergies* définies. Ainsi, un système en mécanique quantique, parce qu'il est représenté par des ondes, peut avoir des états définis d'énergie fixe ; des exemples en sont les niveaux d'énergie des divers atomes.

Harmoniques

50-1 Tons musicaux

50-2 La série de Fourier

50-3 Timbre et accord

50-4 Les coefficients de Fourier

50-5 Le théorème de l'énergie

50-6 Les réponses non linéaires

50-1 Tons musicaux

On rapporte que Pythagore a découvert le fait que deux cordes semblables soumises à une même tension et ne différant que par la longueur, produisent un effet qui est agréable à entendre lorsqu'elles sont excitées ensemble, si les longueurs des deux cordes forment un rapport égal à celui de deux nombres entiers petits. Si les longueurs sont dans le rapport de un à deux, elles correspondent alors en musique à ce qu'on appelle l'octave. Si les longueurs sont dans le rapport de deux à trois, elles correspondent à l'intervalle entre *do* et *sol*, ce qu'on appelle une quinte. De tels intervalles sont habituellement reconnus comme des accords « agréables » à l'oreille.

Pythagore fut si impressionné par cette découverte qu'il en fit la base d'une école – l'école des Pythagoriciens comme on l'a appelée – qui avait des croyances mystiques dans la grande puissance des nombres. Ils croyaient qu'on pouvait trouver quelque chose d'analogue pour les planètes – ou les « sphères ». Nous entendons parfois l'expression : « la musique des sphères ». L'idée était qu'il devait y avoir certaines relations numériques entre les orbites des planètes ou entre d'autres choses encore dans la nature. Les gens pensent habituellement que ce n'était qu'une sorte de superstition à laquelle croyaient les Grecs. Mais est-ce si différent de notre propre intérêt scientifique pour les relations quantitatives ? La découverte de Pythagore fut le premier exemple, en dehors de la géométrie, d'une relation numérique dans la nature. Découvrir soudainement qu'il y avait une *fait* dans la nature qui comportait une relation mathématique numérique simple, a dû paraître extrêmement surprenant. De simples mesures de longueurs permettaient une prédiction sur quelque chose qui n'avait apparemment aucune relation avec la géométrie – la production de sons agréables. Cette découverte conduisit à penser d'une manière générale qu'un outil adéquat pour comprendre la nature serait peut-être l'arithmétique et l'étude mathématique. Les résultats de la science moderne justifient ce point de vue.

Pythagore n'a pu réaliser cette découverte qu'en faisant une observation expérimentale. Néanmoins, cet aspect important ne semble pas l'avoir impressionné. Si cela avait été le cas, la physique aurait pu partir beaucoup plus tôt. (Il est toujours commode de revenir sur ce que quelqu'un d'autre a fait et de dire ce qu'il aurait *dû* faire!)

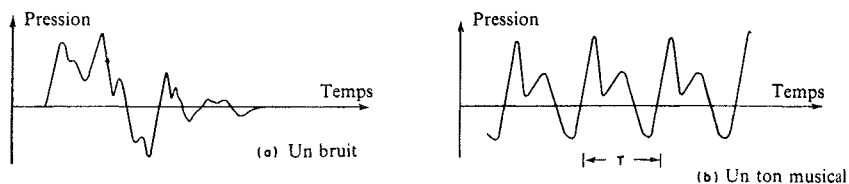


Fig. 50-1. Pression en fonction du temps pour (a) un bruit, et (b) un ton musical.

Nous pouvons remarquer un troisième aspect de cette découverte très intéressante: à savoir que cette découverte concernait deux notes dont la *sonorité* était *agréable* à l'oreille. Nous pouvons nous demander si nous sommes dans de meilleures conditions que Pythagore pour comprendre *pourquoi* seuls certains sons sont agréables à notre oreille. La théorie générale de l'esthétique n'est probablement pas davantage développée maintenant qu'elle ne l'était au temps de Pythagore. Dans cette seule découverte des Grecs, il y a ces trois aspects: l'expérience, les relations mathématiques et l'esthétique. La physique n'a fait de grands progrès que dans les deux premières parties. Ce chapitre va traiter de notre compréhension actuelle de la découverte de Pythagore.

Parmi les sons que nous entendons, il y en a une sorte que nous appelons le *bruit*. Le bruit correspond à une sorte de vibration irrégulière du tympan qui est produite par la vibration irrégulière d'un objet quelconque dans le voisinage. Si nous traçons un diagramme pour représenter la pression de l'air sur le tympan (et donc le déplacement du tympan) en fonction du temps, la courbe qui correspond au bruit peut ressembler à celle qui est montrée sur la Fig. 50-1 (a). (Un tel bruit peut correspondre approximativement au son d'un pied qui frappe.) Le son de la *musique* possède un caractère différent. La musique est plus ou moins caractérisée par la présence de *tons soutenus* – ou de « notes » musicales. (Les instruments de musique peuvent tout aussi bien produire du bruit!) Le ton peut durer un temps relativement court, comme lorsqu'on appuie sur la touche d'un piano, ou il peut être maintenu presque indéfiniment, comme lorsqu'un joueur de flûte joue une note pendant longtemps.

Quel est le caractère particulier d'une note musicale du point de vue de la pression de l'air? Une note musicale diffère d'un bruit en ceci qu'il existe une périodicité dans sa courbe. On distingue une forme non régulière de la pression de l'air qui se répète successivement plusieurs fois. Un exemple d'une fonction pression-temps, qui correspondrait à une note musicale, est indiqué sur la Fig. 50-1(b).

Les musiciens caractérisent habituellement un ton musical par le biais de trois caractéristiques: « la force », « la hauteur » et le « timbre ». La « force » correspond à l'importance des variations de pression. La « hauteur » correspond à la période de temps nécessaire à la répétition d'une fonction de base de la pression (Les notes « basses » ont des périodes plus longues que les notes « hautes ».) Le « timbre » d'un ton est relié aux différences que nous sommes encore capables de déceler entre deux notes de même force et de même hauteur. Un hautbois, un violon ou un soprano peuvent être encore distingués même lorsqu'ils émettent des notes de la même hauteur. Le timbre est lié à la structure du motif qui se répète.

Considérons, pour un moment, le son produit par une corde vibrante. Si nous pinçons la corde, en la tirant d'un côté et en la relâchant, le mouvement qui suivra sera déterminé par les mouvements des ondes que nous avons produits. Nous savons que

ces ondes vont se déplacer dans les deux directions, et seront réfléchies aux extrémités. Elles vont osciller ainsi pendant un long moment quelle que soit la complication de l'onde, cependant elle se répétera. La période de répétition sera simplement le temps T nécessaire à l'onde pour traverser deux longueurs entières de la corde. Car ceci est simplement le temps nécessaire à n'importe quelle onde, une fois qu'elle est partie, pour se réfléchir à chaque extrémité, pour revenir à son point de départ, et pour être en mesure de continuer dans la direction initiale. Le temps est le même pour des ondes qui partent dans n'importe quelle direction. Chaque point de la corde va donc revenir à sa position de départ après une période, et à nouveau après une période, etc. L'onde sonore produite doit également avoir la même répétition. Nous voyons pourquoi une corde pincée produit un ton musical.

50-2 La série de Fourier

Nous avons vu au chapitre précédent une autre manière de considérer le mouvement d'un système vibratoire. Nous avons vu qu'une corde possède de nombreux modes naturels d'oscillation, et que n'importe quel type particulier de vibration qui peut être réalisé à partir de certaines conditions initiales peut être considéré comme une combinaison – dans des proportions adéquates – de plusieurs des modes naturels, oscillant ensemble. Pour une corde, nous avons trouvé que les modes normaux d'oscillation avaient les fréquences $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$. Le mouvement le plus général d'une corde pincée est donc composé de la somme d'une oscillation sinusoïdale à la fréquence fondamentale ω_0 , d'une autre à la fréquence du deuxième harmonique $2\omega_0$, une autre à celle du troisième harmonique $3\omega_0$, etc. Le mode fondamental se répète à chaque période $T_1 = 2\pi/\omega_0$. Le mode du deuxième harmonique se répète tous les $T_2 = 2\pi/2\omega_0$. Il se répète également tous les $T_1 = 2T_2$, après deux de ces périodes. De même, le mode du troisième harmonique se répète après un temps T_1 qui vaut trois de ces périodes. Nous voyons à nouveau pourquoi une corde pincée répète son comportement d'ensemble avec une périodicité de T_1 . Elle produit un ton musical.

Nous venons de parler du mouvement d'une corde. Mais le *son*, qui est le mouvement de l'air, est produit par le mouvement de la corde, et donc ses vibrations également doivent être composées des mêmes harmoniques – bien que nous ne considérons plus les modes normaux de l'air. Il se peut que les intensités relatives des harmoniques soient différentes dans l'air et sur la corde, particulièrement si la corde est « couplée » à l'air par une table d'harmonie. L'efficacité du couplage à l'air est différente pour les différentes harmoniques.

Si $f(t)$ représente la pression de l'air en fonction du temps pour un ton musical [tel que celui de la Fig. 50-1(b)], nous prévoyons que $f(t)$ pourra s'écrire comme la somme d'un nombre de fonctions harmoniques simples du temps – comme $\cos \omega t$ – pour chacune des diverses fréquences harmoniques. Si la période de vibration est T , la fréquence angulaire fondamentale sera $\omega = 2\pi/T$, et les harmoniques seront $2\omega, 3\omega$, etc.

Il y a une petite complication. Nous pouvons prévoir que pour chaque fréquence les phases initiales ne seront pas nécessairement les mêmes. Nous devons donc utiliser des fonctions comme $\cos(\omega t + \phi)$. Il est cependant plus simple d'utiliser, à leur place, les fonctions sinus et cosinus pour chaque fréquence. Nous rappelons que

$$\cos(\omega t + \phi) = (\cos \phi \cos \omega t - \sin \phi \sin \omega t) \quad (50.1)$$

et puisque $\sin \phi$ est une constante, *n'importe quelle* oscillation sinusoïdale à la fréquence ω peut être écrite comme la somme d'un terme qui contient $\cos \omega t$, et d'un autre terme qui contient $\sin \omega t$.

Nous concluons alors que *toute* fonction $f(t)$ qui est périodique de période T peut être écrite mathématiquement sous la forme

$$\begin{aligned} f(t) = & a_0 \\ & + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t \\ & + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t \\ & + a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t \\ & + \dots \quad + \dots \end{aligned} \quad (50.2)$$

où $\omega = 2\pi/T$ et les a et b sont des constantes numériques qui nous disent quelle est l'importance de chaque oscillation composante dans l'oscillation $f(t)$. Nous avons ajouté le terme a_0 de « fréquence nulle », afin que notre formule soit complètement générale, bien qu'il soit habituellement nul pour un ton musical. Il représente un déplacement de la valeur moyenne (c'est-à-dire le niveau « zéro ») de la pression sonore. Avec lui notre formule peut rendre compte de n'importe quel cas. L'égalité de l'équation (50.2) est représentée schématiquement sur la Fig. 50-2. (Les amplitudes a_n et b_n des fonctions harmoniques doivent être convenablement choisies. Elles sont indiquées schématiquement et sans échelle particulière sur la figure.) La série (50.2) est appelée la *série de Fourier* de $f(t)$.

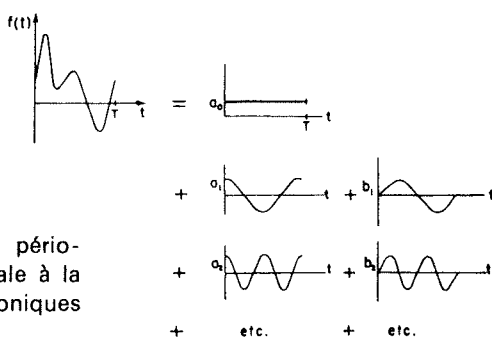


Fig. 50-2. Une fonction périodique quelconque $f(t)$ est égale à la somme de fonctions harmoniques simples.

Nous avons dit que *n'importe quelle* fonction périodique peut être reconstituée de cette manière. Nous devrions corriger ceci, et dire que n'importe quelle onde sonore ou que n'importe quelle fonction que nous rencontrons d'habitude en physique peut être obtenue à partir d'une telle somme. Les mathématiciens sont en mesure d'inventer des fonctions qui ne peuvent pas être constituées de fonctions harmoniques simples – par exemple une fonction qui « revient en arrière » de telle sorte qu'elle a deux valeurs pour certaines valeurs de t ! Nous n'avons pas besoin de nous préoccuper de telles fonctions ici.

50-3 Timbre et accord

Nous sommes maintenant en mesure de décrire ce qui détermine le « timbre » d'un ton musical. Ce sont les quantités relatives des diverses harmoniques – les valeurs des a et des b . Un ton qui ne contient que le premier harmonique est un ton « pur ». Un ton

avec plusieurs harmoniques importants est un ton « riche ». Un violon produit une proportion différente d'harmoniques par rapport à un hautbois.

Nous pouvons « fabriquer » divers tons musicaux si nous relient divers « oscillateurs » à un haut-parleur. (Un oscillateur produit d'habitude une fonction harmonique pratiquement pure.) Nous devons donner aux fréquences de l'oscillateur les valeurs de ω , 2ω , 3ω , etc. Puis en ajustant l'intensité de chaque oscillateur, nous pouvons ajouter chaque harmonique dans n'importe quelle proportion – produisant ainsi des tons de différents timbres. Un orgue électrique fonctionne, en gros, de cette manière. Les « touches » sélectionnent la fréquence de l'oscillateur fondamental et les « stops » sont des interrupteurs qui contrôlent les proportions relatives des harmoniques. En manœuvrant ces interrupteurs, l'orgue peut produire des sons qui ressemblent à ceux de la flûte, à ceux d'un hautbois ou à ceux d'un violon.

Il est intéressant que pour produire de tels tons « artificiels », nous n'ayons besoin que d'un oscillateur pour chaque fréquence – nous n'avons pas besoin d'oscillateurs séparés pour les composantes en sinus et en cosinus. L'oreille n'est pas très sensible aux phases relatives des harmoniques. Elle fait essentiellement attention au *total* des parties en sinus et en cosinus de chaque fréquence. Notre analyse est plus précise qu'il n'est nécessaire pour expliquer l'aspect *subjectif* de la musique. La réponse d'un microphone ou d'autres instruments physiques dépend cependant des phases, et notre analyse complète peut être nécessaire pour traiter de tels cas.

Le « timbre » d'un ton parlé détermine également le son des voyelles que nous reconnaissons dans le langage. La forme de la bouche détermine les fréquences des modes naturels de la vibration de l'air dans la bouche. Certains de ces modes sont mis en vibration par les ondes sonores venant des cordes vocales. De cette manière, les amplitudes de certains des harmoniques du son sont augmentées par rapport à d'autres. Lorsque nous changeons la forme de notre bouche, nous donnons préférence à des harmoniques de différentes fréquences. Ces effets rendent compte des différences entre un son « e-e-e » et un son « a-a-a ».

Nous savons tous qu'un son de voyelle particulier – par exemple « e-e-e » – fait toujours « entendre » la même voyelle que nous le disions (ou le chantions) à une grande ou une faible hauteur. En considérant le mécanisme que nous décrivons, nous pourrions nous attendre à ce que des fréquences *particulières* soient renforcées lorsque nous formons notre bouche pour un « e-e-e », et qu'elles *ne* changent *pas* lorsque nous changeons la hauteur de notre voix. Ainsi la proportion des harmoniques importantes à la fondamentale – c'est-à-dire le « timbre » – change lorsque nous changeons la hauteur. Apparemment, le mécanisme par lequel nous reconnaissons le langage n'est pas basé sur des relations harmoniques spécifiques.

Que devrions-nous dire maintenant sur la découverte de Pythagore? Nous comprenons que deux cordes semblables, dont les longueurs sont dans le rapport de 2 à 3, vibreront à des fréquences fondamentales dans le rapport de 3 à 2. Mais pourquoi doivent-elles produire ensemble un « son agréable »? Peut-être devrions-nous chercher notre explication dans les fréquences des harmoniques. La deuxième harmonique de la corde la plus courte aura la *même* fréquence que la troisième harmonique de la corde la plus longue. (Il est facile de montrer – ou de croire – qu'une corde pincée produit fortement les plus bas harmoniques.)

Peut-être devrions-nous proposer les règles suivantes. Les notes sont en accord lorsqu'elles ont des harmoniques de même fréquence. Les notes sont en désaccord si leurs harmoniques supérieurs ont des fréquences proches l'une de l'autre, mais suffisamment éloignées pour qu'il y ait

des battements rapides entre eux. Nous ne savons pas comment définir ou écrire pourquoi des battements ne nous paraissent pas plaisants ou pourquoi l'unisson des harmoniques supérieurs nous est agréable. Nous ne pouvons pas, à partir de cette connaissance de ce qui est *agréable* à notre oreille, dire ce qui doit, par exemple, *sentir* bon. En d'autres termes, notre compréhension de ce phénomène n'est rien de plus général que l'énoncé disant que lorsqu'elles sont à l'unisson, le son est agréable. Cela ne nous permet pas de déduire quelque chose de plus que les propriétés des accords en musique.

Il est facile de vérifier les relations harmoniques que nous venons de décrire par quelques expériences simples avec un piano. Appelons les trois dos successifs près du milieu du clavier C, C' et C'', et les sols qui suivent par G, G' et G''. Les fondamentaux auront alors les fréquences relatives suivantes :

$$C - 2 \quad G - 3$$

$$C' - 4 \quad G' - 6$$

$$C'' - 8 \quad G'' - 12$$

Ces relations harmoniques peuvent être démontrées de la manière suivante : Supposez que nous pressions C' *lentement* – de telle sorte que le son ne soit pas produit, mais que nous obligeons l'amortisseur à s'écarter. Si maintenant nous émettons C, elle va produire son propre fondamental *et* un peu de deuxième harmonique. Le deuxième harmonique va mettre en vibration les cordes de C'. Si maintenant nous relâchons C (en gardant C' pressé) l'amortisseur va arrêter la vibration de la corde C, et nous pouvons entendre (doucement) la note C' s'éteindre progressivement. D'une manière semblable, le troisième harmonique de C peut créer une vibration de G'. Ou le sixième de C (devenant maintenant beaucoup plus faible) peut mettre en vibration le fondamental de G''.

Un résultat assez différent est obtenu si nous pressons G doucement et faisons résonner C ! Le troisième harmonique de C' correspondra au quatrième harmonique de G, ce qui fait que *seul* l'harmonique quatre de G sera excité. Nous pouvons entendre (si nous écoutons de très près) le son de G'', qui est à deux octaves au-dessus de G que nous avons pressé ! Il est facile d'imaginer beaucoup d'autres combinaisons pour ce jeu.

Nous pouvons remarquer en passant que l'échelle majeure peut être définie simplement par la condition que les trois accords majeurs (Fa-La-Do); (Do-Mi-Sol); et (Sol-Si-Re) représentent *chacun* des séquences de tons avec des rapports de fréquence (4 : 5 : 6). Ces rapports – plus le fait qu'un octave (Do-Do', Si-Si', etc.) correspond au rapport 1 : 2 – déterminent toute l'échelle pour le cas « idéal », ou pour ce qui est appelé « l'intonation juste ». Les instruments à clavier comme le piano ne sont *pas* accordés d'habitude de cette manière, mais on « triche » un peu de telle sorte que les fréquences soient *approximativement* correctes pour tous les tons initiaux possibles. Pour ce genre d'accord, qui est appelé « tempéré », l'octave (toujours 1 : 2) est divisé en 12 intervalles égaux pour lesquels le rapport de fréquences est $(2)^{1/12}$. Une quinte n'a plus le rapport de fréquence 3/2, mais $2^{7/12} = 1.499$, qui est apparemment suffisamment proche pour la plupart des oreilles.

Nous avons énoncé une règle pour l'accord en fonction de la coïncidence des harmoniques. Est-ce que cette coïncidence est la *raison* pour laquelle deux notes sont en accord ? Un chercheur a affirmé que deux tons *purs* – des tons fabriqués avec assez de soin pour être débarrassés d'harmoniques – ne produisent pas les *sensations* d'accord ou de désaccord lorsque les

fréquences relatives sont choisies avec les rapports attendus ou près de ces rapports. (De telles expériences sont difficiles, parce qu'il est difficile de fabriquer des tons purs, pour des raisons que nous allons voir plus tard.) Nous ne pouvons pas encore dire avec certitude, lorsque nous décidons que nous aimons un son, si l'oreille met en accord les harmoniques ou fait de l'arithmétique.

50-4 Les coefficients de Fourier

Revenons maintenant à l'idée que n'importe quelle note – c'est-à-dire un son *périodique* – peut être représentée par une combinaison adéquate d'harmoniques. Nous aimerions montrer comment nous pouvons calculer la quantité nécessaire de chaque harmonique. Il est bien entendu facile de calculer $f(t)$, en utilisant l'équation (50.2), si on nous *donne* tous les coefficients a et b . La question est maintenant de savoir si, à partir d'un $f(t)$ donné, on peut connaître les coefficients des différents termes harmoniques? (Il est facile de faire un gâteau à partir d'une recette; mais pourrions-nous écrire la recette si on nous donne le gâteau?)

Fourier a découvert que ce n'était pas vraiment difficile. Le terme a_0 est certainement simple. Nous avons déjà dit que c'est simplement la valeur moyenne de $f(t)$ sur une période (de $t = 0$ à $t = T$). Nous pouvons facilement voir que c'est bien le cas. La valeur moyenne d'un sinus ou d'un cosinus sur une période est nulle. Sur deux, ou trois, ou tout nombre entier de périodes, elle est également nulle. Ainsi la valeur moyenne de tous les termes du côté droit de l'équation (50.2) est nulle, à l'exception de a_0 . (Rappelons que nous avons choisi $\omega = 2\pi/T$.)

La moyenne d'une somme est la somme des moyennes. Ainsi la moyenne de $f(t)$ est simplement la moyenne de a_0 . Mais a_0 est une *constante*, ainsi sa moyenne est simplement la même chose que sa valeur. Rappelons la définition d'une moyenne, nous avons

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (50.3)$$

Les autres coefficients sont seulement un tout petit peu plus difficiles. Pour les trouver nous pouvons utiliser un truc découvert par Fourier. Supposez que nous multiplions les deux côtés de l'équation (50.2) par une certaine fonction harmonique – par exemple $\cos 7\omega t$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} f(t) \cdot \cos 7\omega t &= a_0 \cdot \cos 7\omega t \\ &+ a_1 \cos \omega t \cdot \cos 7\omega t + b_1 \sin \omega t \cdot \cos 7\omega t \\ &+ a_2 \cos 2\omega t \cdot \cos 7\omega t + b_2 \sin 2\omega t \cdot \cos 7\omega t \\ &+ \dots \qquad \qquad \qquad + \dots \\ &+ a_7 \cos 7\omega t \cdot \cos 7\omega t + b_7 \sin 7\omega t \cdot \cos 7\omega t \\ &+ \dots \qquad \qquad \qquad + \dots \end{aligned} \quad (50.4)$$

Prenons *alors* la moyenne des deux côtés. La moyenne de $a_0 \cos 7\omega t$ sur le temps T est proportionnelle à la moyenne d'un cosinus sur 7 périodes entières. Or c'est nul. La moyenne de presque *tous les autres* termes est *également* nulle. Considérons le

terme a_1 . Nous savons en général que

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \cos (A + B) + \frac{1}{2} \cos (A - B). \quad (50.5)$$

Le terme a_1 devient

$$\frac{1}{2} a_1 (\cos 8\omega t + \cos 6\omega t). \quad (50.6)$$

Nous avons donc deux termes en cosinus, un avec 8 périodes pleines sur T et l'autre avec 6. *Leurs deux moyennes sont nulles.* La moyenne du terme a_1 est donc nulle.

Pour le terme a_2 , nous trouvons $a_2 \cos 9\omega t$ et $a_2 \cos 5\omega t$, chacun d'entre eux ayant une moyenne nulle. Pour le terme a_9 , nous trouvons $\cos 16\omega t$ et $\cos (-2\omega t)$. Mais $\cos (-2\omega t)$ est identique à $\cos 2\omega t$, aussi ces deux ont une moyenne nulle. Il est clair que *tous* les termes a auront une moyenne nulle à l'exception d'un seul. Et celui-ci est le terme a_7 . Pour lui nous avons

$$\frac{1}{2} a_7 (\cos 14\omega t + \cos 0). \quad (50.7)$$

Le cosinus de zéro vaut un, et sa moyenne bien entendu vaut un. Nous avons donc le résultat que la moyenne de tous les autres termes a de l'équation (50.4) vaut $\frac{1}{2} a_7$.

Les termes en b sont même plus faciles. Lorsque nous multiplions par n'importe quel cosinus de forme $\cos n\omega t$, nous pouvons montrer par la même méthode que *tous* les termes en b ont une valeur moyenne nulle.

Nous voyons que le « truc » de Fourier agit comme un filtre. Lorsque nous multiplions par $\cos 7\omega t$ et que nous prenons la moyenne, tous les termes disparaissent à l'exception de a_7 , et nous trouvons que

$$\text{Moyenne } [f(t) \cdot \cos 7\omega t] = a_7/2, \quad (50.8)$$

ou

$$a_7 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos 7\omega t \, dt. \quad (50.9)$$

Nous laisserons le soin au lecteur de montrer que le coefficient b_7 peut être obtenu en multipliant l'équation (50.2) par $\sin 7\omega t$ et en prenant la moyenne des deux côtés. Le résultat est

$$b_7 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin 7\omega t \, dt. \quad (50.10)$$

Nous prévoyons maintenant que ce qui est juste pour 7 le sera pour n'importe quel entier. Nous pouvons donc résumer notre démonstration et notre résultat sous la forme mathématique plus élégante qui suit. Si m et n sont des entiers différents de zéro, et si $\omega = 2\pi/T$, on a

$$\text{I. } \int_0^T \sin n\omega t \cos m\omega t \, dt = 0. \quad (50.11)$$

$$\begin{aligned} \text{II. } & \int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t \, dt = \\ \text{III. } & \int_0^T \sin n\omega t \sin m\omega t \, dt = \end{aligned} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{if } n \neq m. \\ T/2 & \text{if } n = m. \end{array} \right. \quad (50.12)$$

$$\text{IV. } f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t. \quad (50.13)$$

$$\text{V. } a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt. \quad (50.14)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos n\omega t \, dt. \quad (50.15)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin n\omega t \, dt. \quad (50.16)$$

Dans les chapitres précédents il était commode d'utiliser la notation exponentielle pour représenter le mouvement harmonique simple. Au lieu de $\cos \omega t$ nous utilisons $\text{Re } e^{i\omega t}$, la partie réelle de la fonction exponentielle. Nous avons utilisé les fonctions cosinus et sinus dans ce chapitre parce que cela rend les démonstrations peut-être un peu plus claires. Le résultat final de l'équation (50.13) peut, cependant, être écrit sous une forme compacte

$$f(t) = \text{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n e^{in\omega t}, \quad (50.17)$$

où $\hat{a}_n$ est le nombre complexe $a_n - ib_n$ (avec $b_0 = 0$). Si nous voulons utiliser partout la même notation, nous pouvons écrire également

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} \, dt \quad (n \geq 1). \quad (50.18)$$

Nous savons maintenant comment « analyser » une onde périodique dans ses composantes harmoniques. La procédure est appelée *l'analyse de Fourier*, et les termes séparés sont appelés des composantes de Fourier. Nous n'avons *pas* montré, cependant, qu'après avoir trouvé toutes les composantes de Fourier et les avoir ajoutées nous retrouvions en fait $f(t)$. Les mathématiciens ont montré, pour un grand ensemble de fonctions, en fait pour toutes celles qui intéressent les physiciens, que si nous pouvons calculer les intégrales nous retrouvons $f(t)$. Il y a une petite exception. Si la fonction $f(t)$ est discontinue, c'est-à-dire si elle saute soudainement d'une valeur à une autre, la somme de Fourier va donner une valeur au point de rupture à mi-distance entre les valeurs supérieures et inférieures à la discontinuité. Si donc nous avons la fonction étrange $f(t) = 0$, $0 \leq t < t_0$, et $f(t) = 1$ pour $t_0 \leq t \leq T$, la somme de Fourier va nous donner la bonne valeur partout à l'exception de t_0 , où elle aura la valeur $\frac{1}{2}$ au lieu de 1. De toutes manières, c'est une situation assez peu physique de dire qu'une fonction doit être nulle *jusqu'à* t_0 , mais un *juste* en t_0 . Nous pouvons peut-être ainsi émettre pour les physiciens la « règle » qu'une fonction discontinue quelconque (qui ne peut être qu'une simplification d'une fonction physique *réelle*) doit être définie avec des valeurs à mi-chemin aux discontinuités. Alors une fonction quelconque de ce genre – avec un nombre fini quelconque de tels sauts – de même que toutes les autres fonctions intéressantes du point de vue physique, sont données correctement par la somme de Fourier.

Comme exercice, nous suggérons au lecteur de déterminer les séries de Fourier de la fonction montrée sur la Figure 50-3. Puisque la fonction ne peut être écrite sous une

forme algébrique explicite, vous n'avez pas besoin de calculer les intégrales de zéro à T de la manière habituelle. Les intégrales sont cependant faciles si nous les séparons en deux parties: l'intégrale de zéro à $T/2$ [sur cet intervalle $f(t) = 1$] et l'intégrale de $T/2$ à T [sur celui-ci $f(t) = -1$]. Le résultat doit être

$$f(t) = \frac{4}{\pi} (\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots), \quad (50.19)$$

où $\omega = 2\pi/T$. Nous trouvons donc que notre onde carrée (avec la phase particulière que nous avons choisie) ne possède que des harmoniques impaires, et que leurs amplitudes sont en proportions inverses de leurs fréquences.

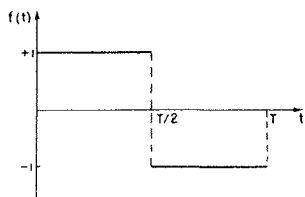


Fig. 50-3. Fonction représentant une onde carrée.

$$f(t) = +1 \text{ for } 0 < t < T/2, \\ f(t) = -1 \text{ for } T/2 < t < T.$$

Vérifions que l'équation (50.19) nous donne bien en retour $f(t)$ pour une certaine valeur de t . Choisissons $t = T/4$, ou $\omega t = \pi/2$. Nous avons

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} + \dots \right) \quad (50.20)$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right). \quad (50.21)$$

La série* a la valeur $\pi/4$, et nous trouvons que $f(t) = 1$.

50-5 Le théorème de l'énergie

L'énergie dans une onde est proportionnelle au carré de son amplitude. Pour une onde de forme complexe, l'énergie sur une période sera proportionnelle à $\int_0^T f^2(t) dt$. Nous pouvons également relier cette énergie aux coefficients de Fourier. Nous écrivons

$$\int_0^T f^2(t) dt = \int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \right]^2 dt. \quad (50.22)$$

* La série peut être évaluée de la manière suivante. Remarquons d'abord que $\int_0^x [dx/(1+x^2)] = \text{Arc tg } x$. Deuxièmement, nous développons en série le terme sous l'intégrale $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$. Nous intégrons la série terme à terme (de zéro à x) pour obtenir $\text{Arc tg } x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \dots$. Faisant $x=1$, nous avons le résultat énoncé puisque $\text{Arc tg } 1 = \pi/4$.

Lorsque nous développons le carré du terme entre crochets, nous allons obtenir tous les termes croisés possibles, tels que $a_5 \cos 5\omega t \cdot b_7 \cos 7\omega t$. Nous avons cependant montré précédemment [équations (50.11) et (50.12)] que les intégrales de tous ces termes sur une période sont nulles. Il ne nous reste que les termes carrés comme $a_5^2 \cos^2 5\omega t$. L'intégrale sur une période de n'importe quel cosinus élevé au carré ou du sinus élevé au carré est égale à $T/2$, ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^T f^2(t) dt &= Ta_0^2 + \frac{T}{2} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + b_1^2 + b_2^2 + \dots) \\ &= Ta_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \end{aligned} \quad (50.23)$$

Cette équation est appelée le « théorème de l'énergie », et dit que l'énergie totale dans une onde est simplement la somme des énergies de toutes les composantes de Fourier. Par exemple, si on applique ce théorème à la série (50.19), puisque $[f(t)]^2 = 1$, nous obtenons

$$T = \frac{T}{2} \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} \dots\right),$$

et nous apprenons que la somme des carrés des inverses des nombres entiers impairs vaut $\pi^2/8$. D'une manière semblable, en obtenant d'abord la série de Fourier de la fonction et en utilisant le théorème de l'énergie, nous pouvons prouver que $1 + 1/2^4 + 1/3^4 + \dots$ vaut $\pi^4/90$, un résultat dont nous avons besoin au Chapitre 45.

50-6 Les réponses non linéaires

Finalement, il y a dans la théorie des harmoniques un important phénomène qui doit être remarqué à cause de son importance pratique – celui des effets non linéaires. Dans tous les systèmes que nous avons considérés jusqu'à présent, nous avons supposé que tout était linéaire, que les réponses aux forces, par exemple les déplacements ou les accélérations, étaient toujours proportionnelles aux forces. Ou que les courants dans les circuits étaient proportionnels aux tensions, etc. Nous voulons maintenant considérer des cas où il n'y a pas une proportionnalité rigoureuse. Nous pensons pour le moment à certains appareils dans lesquels la réponse, que nous appelons x_{sortie} au temps t , est déterminée par $x_{\text{entrée}}$ au temps t . Par exemple, $x_{\text{entrée}}$ peut être la force et x_{sortie} peut être le déplacement. Ou $x_{\text{entrée}}$ peut être le courant et x_{sortie} la tension. Si l'appareil est linéaire, nous aurons

$$x_{\text{sortie}}(t) = Kx_{\text{entrée}}(t), \quad (50.24)$$

où K est une constante indépendante de t et de $x_{\text{entrée}}$. Supposez cependant que l'appareil soit presque, mais pas exactement, linéaire, de sorte que nous puissions écrire

$$x_{\text{sortie}}(t) = K[x_{\text{entrée}}(t) + \varepsilon x_{\text{entrée}}^2(t)], \quad (50.25)$$

où ε est petit en comparaison de l'unité. De telles réponses, linéaires et non linéaires, sont montrées sur les graphiques de la Figure 50-4.

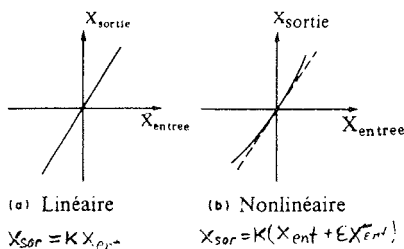


Fig. 50-4. Réponses linéaires et non linéaires.

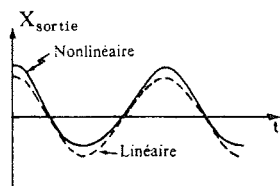


Fig. 50-5. La réponse d'un appareil non linéaire à un signal d'entrée $\cos \omega t$. On montre, pour comparaison, une réponse linéaire.

Les réponses non linéaires ont plusieurs conséquences pratiques importantes. Nous allons considérer maintenant certaines d'entre elles. Voyons d'abord ce qui se passe si nous appliquons un ton pur à l'entrée. Nous faisons $x_{\text{entrée}} = \cos \omega t$. Si nous traçons x_{sortie} en fonction du temps, nous obtenons la courbe en trait plein montrée sur la Figure 50-5. La courbe en trait pointillé, pour comparaison, nous donne la réponse d'un système linéaire. Nous voyons que la sortie n'est plus maintenant une fonction cosinus. Elle est plus pointue au sommet et plus aplatie dans les creux. Nous disons que la sortie est *déformée*. Nous savons cependant qu'une telle onde n'est plus un ton pur, qu'elle possède des harmoniques. Nous pouvons trouver ce que sont les harmoniques. En utilisant $x_{\text{entrée}} = \cos \omega t$ avec l'équation (50.25), nous avons

$$x_{\text{sortie}} = K(\cos \omega t + \varepsilon \cos^2 \omega t). \quad (50.26)$$

A partir de l'égalité $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$, nous avons

$$x_{\text{sortie}} = K(\cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cos 2\omega t). \quad (50.27)$$

La sortie ne possède pas seulement une composante à la fréquence fondamentale, qui était présente à l'entrée, mais elle possède également un peu de son deuxième harmonique. Un terme constant $K(\varepsilon/2)$, est également apparu à la sortie, il correspond au décalage de la valeur moyenne indiquée sur la Figure 50-5. Le processus qui produit un décalage de la valeur moyenne est appelé *redressement*.

Une réponse non linéaire va redresser et va produire des harmoniques des fréquences à son entrée. Bien que la non-linéarité, que nous avons supposée, ne produise que des deuxièmes harmoniques, des non-linéarités d'ordre supérieur – celles qui ont des termes en $x_{\text{entrée}}^3$ ou $x_{\text{entrée}}^4$, par exemple – vont produire des harmoniques plus élevés que le deuxième.

Un autre effet qui provient d'une réponse non linéaire est la *modulation*. Si notre fonction d'entrée contient deux tons purs (ou davantage), la sortie ne contiendra pas seulement leurs harmoniques, mais également d'autres composantes de fréquence. Soit $x_{\text{entrée}} = A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t$, où maintenant ω_1 et ω_2 ne sont pas considérés en relation harmonique. En plus du terme linéaire (qui vaut K fois l'entrée) nous devons avoir

une composante à la sortie donnée par

$$x_{\text{sortie}} = K\epsilon(A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t)^2 \quad (50.28)$$

$$= K\epsilon(A^2 \cos^2 \omega_1 t + B^2 \cos^2 \omega_2 t + 2AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t). \quad (50.29)$$

Les deux premiers termes dans les parenthèses de l'équation (50.29) sont simplement ceux qui nous donnent le terme constant et les termes de deuxième harmonique que nous avons trouvés précédemment. Le dernier terme est nouveau.

Nous pouvons considérer ce nouveau « terme croisé » $AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t$ de deux manières. Premièrement, si les deux fréquences sont largement différentes (par exemple, si ω_1 est beaucoup plus grand que ω_2) nous pouvons considérer que le terme croisé représente une oscillation sinusoïdale d'amplitude variable. C'est-à-dire que nous pouvons considérer les deux facteurs de cette manière :

$$AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = C(t) \cos \omega_1 t, \quad (50.30)$$

avec

$$C(t) = AB \cos \omega_2 t. \quad (50.31)$$

Nous disons que l'amplitude de $\cos \omega_1 t$ est *modulée* à la fréquence ω_2 .

Alternativement, nous pouvons écrire le terme croisé d'une autre manière :

$$AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \frac{AB}{2} [\cos (\omega_1 + \omega_2)t + \cos (\omega_1 - \omega_2)t]. \quad (50.32)$$

Nous dirons alors que deux nouvelles composantes ont été produites, l'une à la *somme* des fréquences ($\omega_1 + \omega_2$), l'autre à la *différence* des fréquences ($\omega_1 - \omega_2$).

Nous avons deux manières différentes, mais équivalentes, de considérer le même résultat. Dans le cas particulier où $\omega_1 \gg \omega_2$, nous pouvons relier ces deux vues différentes en remarquant que, puisque $(\omega_1 + \omega_2)$ et $(\omega_1 - \omega_2)$ sont proches l'un de l'autre, nous nous attendons à observer des battements entre elles. Mais ces battements ont simplement l'effet de *moduler* l'amplitude de la fréquence *moyenne* ω_1 à une fréquence égale à la moitié de $2\omega_2$. Nous voyons donc pourquoi les deux descriptions sont équivalentes.

En résumé, nous avons trouvé qu'une réponse non linéaire produit différents effets : le redressement, la génération d'harmoniques et la modulation ou la génération de composantes avec des fréquences somme ou différence.

Nous devrions remarquer que tous ces effets (Éq. 50.29) sont proportionnels non seulement aux coefficients de non-linéarité ϵ , mais également au produit des deux amplitudes – soit A^2 , B^2 ou AB . Nous prévoyons que ces effets seront beaucoup plus importants pour des signaux *importants* que pour des signaux faibles.

Les effets que nous venons de décrire ont de nombreuses applications pratiques. D'abord, pour ce qui est du son, on considère que l'oreille n'est pas linéaire. On considère que ceci rend compte du fait qu'avec des sons élevés nous avons la sensation que nous *entendons* des harmoniques et aussi des fréquences somme et différence même si les ondes sonores ne contiennent que des tons purs.

Les composants qui sont utilisés dans les équipements de reproductions du son – amplificateurs, haut-parleurs, etc. – sont toujours affectés d'une certaine non-linéarité. Ils produisent des distorsions dans

le son – ils créent des harmoniques, etc. – qui n'étaient pas présents dans le son initial. Ces nouvelles composantes sont entendues par l'oreille et sont apparemment critiquables. C'est pour cette raison qu'un « Hi-Fi » est construit de manière à être aussi linéaire que possible. (Pourquoi les non-linéarités de l'oreille ne sont-elles *pas* critiquables de la même manière, ou pourquoi savons-nous que la non-linéarité se trouve dans le *haut-parleur* plutôt que dans l'oreille? Cela n'est pas parfaitement clair!)

Les non-linéarités sont *nécessaires*, elles sont en fait, rendues intentionnellement très importantes dans certaines parties de l'équipement radio de transmission et de réception. Dans un émetteur avec modulation d'amplitude le signal « vocal » (à des fréquences de quelques kilocycles par seconde) est combiné avec le signal « porteur » (à la fréquence de quelques mégacycles par seconde) dans un circuit non linéaire appelé un *modulateur*, pour produire l'oscillation modulée qui est émise. Dans le récepteur, les composantes du signal reçu sont envoyées dans un circuit non linéaire qui combine les fréquences somme et différence de la porteuse modulée pour créer à nouveau le signal vocal.

Lorsque nous avons discuté la transmission de la lumière, nous avons supposé que les oscillations de charge induites étaient proportionnelles au champ électrique de la lumière – que la réponse était linéaire. C'est en effet une très bonne approximation. Ce n'est que dans les dernières années que des sources de lumière ont été mises au point (lasers) qui produisent une intensité de lumière suffisamment grande pour que les effets non linéaires puissent être observés. Il est maintenant possible de créer des harmoniques des fréquences lumineuses. Lorsqu'une lumière rouge intense traverse un morceau de verre, il en sort une petite quantité de lumière bleue – le deuxième harmonique –!

Ondes

51-1 Lames d'étrave

51-2 Ondes de choc

51-3 Ondes dans les solides

51-4 Ondes de surface

51-1 Lames d'étrave

Bien que nous ayons terminé notre étude quantitative des ondes, ce chapitre supplémentaire sur cette question a comme but de donner une certaine idée qualitative de divers phénomènes qui sont associés aux ondes, et qui sont trop compliqués pour être, ici, analysés dans le détail. Puisque nous avons parlé des ondes auparavant dans plusieurs chapitres, le sujet de celui-ci pourrait s'appeler plus justement: « quelques-uns des phénomènes plus complexes associés avec les ondes ».

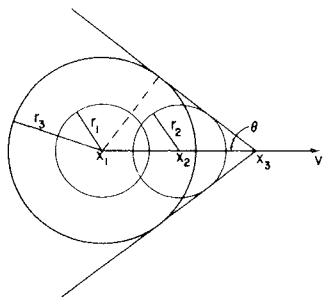


Fig. 51-1. Le front de l'onde de choc se trouve sur un cône dont le sommet est à la source et le demi-angle $\theta = \text{Arc sin } (v/c_w)$.

Le premier sujet que nous allons discuter concerne les effets qui sont produits par une source d'ondes qui se déplace plus rapidement que la vitesse de l'onde, ou la vitesse de phase. Considérons d'abord des ondes qui ont une vitesse définie, comme le son et la lumière. Si une source de son se déplace plus rapidement que la vitesse du son, quelque chose se produit alors qui ressemble à ceci: Supposez qu'à un moment donné une onde sonore soit créée par la source au point x_1 sur la Figure 51-1; à l'instant d'après, lorsque la source s'est déplacée en x_2 , l'onde issue de x_1 s'est dilatée d'un rayon r_1 plus petit que la distance dont s'est déplacée la source; et, bien entendu, une autre onde est créée en x_2 . Lorsque la source de son s'est encore déplacée en x_3 et qu'une onde est créée en cet endroit, l'onde issue de x_2 s'est maintenant dilatée jusqu'en r_2 et celle issue de x_1 a pris un rayon r_3 . Bien

entendu ceci se réalise continuellement, non par étapes, et donc nous avons une série d'ondes circulaires ayant une droite tangente commune qui passe par le centre de la source. Nous voyons qu'au lieu d'avoir une source créant des ondes sphériques, ce qui aurait été le cas si elle était restée au repos, elle crée un front d'onde qui forme un cône à trois dimensions, ou un couple de droites à deux dimensions. Il est très facile de déterminer l'angle du cône. Dans un laps de temps donné, la source se déplace d'une certaine distance, par exemple $x_3 - x_1$, proportionnelle à v , la vitesse de la source. Pendant ce temps, le front d'onde s'est déplacé d'une distance r_3 proportionnelle à c_w , la vitesse de l'onde. Il est donc clair que le demi-angle de l'ouverture possède un sinus égal au rapport de la vitesse des ondes, à la vitesse de la source et ce sinus n'a une solution que si c_w est inférieur à v , ou que la vitesse de l'objet est plus rapide que la vitesse de l'onde :

$$\sin \theta = \frac{v}{c_w} . \quad (51.1)$$

Incidemment, bien que nous ayons supposé qu'il soit nécessaire d'avoir une *source* de son, il se trouve, d'une manière intéressante, qu'une fois que l'objet se déplace plus rapidement que la vitesse du son, il *crée* un son. Cela veut dire qu'il n'est pas nécessaire qu'il ait un certain caractère vibrationnel. Tout objet se déplaçant au travers d'un milieu plus rapidement que la vitesse à laquelle le milieu transporte des ondes va créer automatiquement des ondes de part et d'autre, simplement par son propre mouvement. C'est simple dans le cas du son, mais cela se produit aussi dans le cas de la lumière. A première vue, on peut penser que rien ne pourra se déplacer plus vite que la vitesse de la lumière. Cependant, la lumière dans un verre a une vitesse de phase plus petite que la vitesse de la lumière dans le vide, et il est possible de tirer une particule chargée de très grande énergie au travers d'un bloc de verre de telle sorte que la vitesse de la particule soit proche de la vitesse de la lumière dans le vide, tandis que la vitesse de la lumière dans le verre peut n'être que les $\frac{2}{3}$ de la vitesse de la lumière dans le vide. Une particule se déplaçant plus rapidement que la vitesse de la lumière dans le milieu va produire une onde de lumière conique avec son sommet à la source, tel que le sillage d'un bateau (qui provient du même effet évidemment). En mesurant l'angle du cône, nous pouvons déterminer la vitesse de la particule. On emploie cet effet techniquement pour déterminer les vitesses des particules, ce qui est une des méthodes

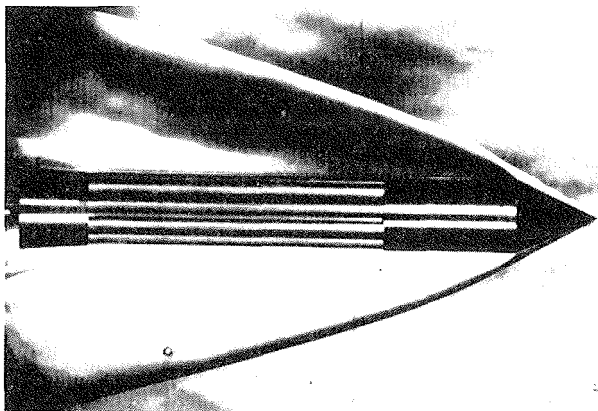


Fig. 51-2. Une onde de choc induite dans un gaz par un projectile se déplaçant plus rapidement que le son.

pour déterminer leur énergie dans le domaine des hautes énergies. Il suffit de mesurer la direction de la lumière.

Cette lumière est quelquefois appelée le rayonnement de Cerenkov, parce qu'elle fut observée pour la première fois par Cerenkov. Frank et Tamm ont calculé théoriquement l'intensité de cette lumière. Le Prix Nobel de Physique de 1958 leur fut attribué à tous les trois conjointement pour ce travail.

Les circonstances correspondantes dans le cas du son sont illustrées sur la Fig. 51-2, qui est une photographie d'un objet se déplaçant au travers d'un gaz à une vitesse plus grande que la vitesse du son. Les changements de pression produisent un changement d'indice de réfraction, et avec un système optique adéquat on peut rendre visible les bords des ondes. Nous voyons que l'objet se déplaçant plus rapidement que la vitesse du son produit, en effet, une onde conique. Mais une inspection plus attentive révèle que la surface est courbe en réalité. Elle est droite asymptotiquement, mais elle est incurvée près du sommet, et nous devons maintenant discuter comment cela peut se faire, ce qui nous conduit au deuxième sujet de ce chapitre.

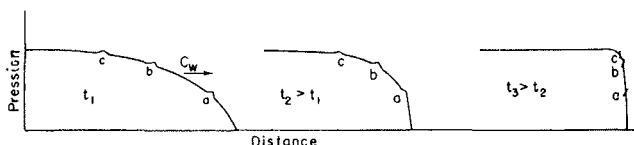


Fig. 51-3. Photographies « instantanées » du front d'onde à différents moments successifs.

51-2 Ondes de choc

La vitesse de l'onde dépend souvent de l'amplitude, et dans le cas du son la vitesse dépend de l'amplitude de la manière suivante. Un objet se déplaçant dans l'air doit écarter l'air de son chemin, et la perturbation produite dans ce cas est donc une sorte de variation brutale de la pression, avec une pression plus élevée derrière le front d'onde que dans la région non perturbée pas encore atteinte par l'onde (se déplaçant par exemple à la vitesse normale). Mais l'air qui est laissé derrière, après que le front d'onde soit passé, a été comprimé adiabatiquement et donc la température est augmentée. Or la vitesse du son augmente avec la température, ce qui fait que la vitesse du son dans la région derrière le saut de pression est plus élevée que dans l'air qui se trouve devant. Cela signifie que tout autre perturbation qui est produite derrière cette marche de pression, par exemple par une poussée continue du corps, ou n'importe quelle autre perturbation, se déplacera plus rapidement que le front, la vitesse augmentant avec des pressions plus élevées. La Fig. 51-3 illustre le phénomène, avec certaines petites excroissances de pressions ajoutées au contour de pression pour faciliter l'observation. Nous voyons que les régions de plus haute pression à l'arrière rattrapent le front au fur et à mesure que le temps passe, jusqu'à ce que finalement l'onde de compression développe un front raide. Si l'intensité est très élevée, « finalement » signifie tout de suite; si au contraire elle est plutôt faible, il faut un long moment; il peut se faire en fait que le son s'étale et s'éteigne avant qu'il n'ait le temps de produire cet effet.

Les sons que nous produisons en parlant sont extrêmement faibles par rapport à la pression atmosphérique – seulement une partie dans un million ou à peu près. Mais pour les changements de pression de l'ordre de l'atmosphère, la vitesse de l'onde augmente d'environ vingt pour cent, et le front d'onde

se redresse à une vitesse élevée correspondante. Dans la nature, rien ne se produit *infiniment* rapidement, probablement, et ce que nous appelons un front « raide » a en fait une épaisseur très faible; ce n'est pas une montée infiniment raide. Les distances sur lesquelles elle varie sont de l'ordre d'un libre parcours moyen, en dessous duquel la théorie de l'équation d'onde commence à être en défaut puisque nous n'avons pas considéré la structure du gaz.

Nous reportant à nouveau à la Fig. 51-2, nous voyons que nous pouvons comprendre la courbure si nous voyons que les pressions près du sommet sont plus élevées qu'elles ne le sont à l'arrière, et ainsi l'angle θ est plus grand. C'est-à-dire que la courbe est le résultat du fait que la vitesse dépend de l'intensité de l'onde. Ainsi l'onde provenant de l'explosion d'une bombe atomique se déplace bien plus rapidement que la vitesse du son pendant un certain temps, jusqu'à ce qu'elle aille si loin qu'elle est affaiblie par un effet de dispersion jusqu'à ce que le surcroît de pressions soit petit en comparaison de la pression atmosphérique. La vitesse des surcroîts de pression tend alors vers la vitesse du son dans le gaz dans lequel ils se déplacent. (Incidentement, il se trouve toujours que la vitesse du choc est plus élevée que la vitesse du son dans le gaz en avant, mais qu'elle est plus faible que la vitesse du son dans le gaz derrière. C'est-à-dire que les impulsions de l'arrière vont arriver à l'avant, mais le front avance dans le milieu dans lequel il va plus vite que la vitesse normale des signaux. Ainsi on ne peut pas dire, acoustiquement, que le choc arrive sauf quand c'est trop tard. La lumière de la bombe arrive d'abord, mais on ne peut pas dire que le choc arrive tant qu'il n'est pas arrivé, parce qu'il n'y a pas de signal sonore arrivant avant lui.)

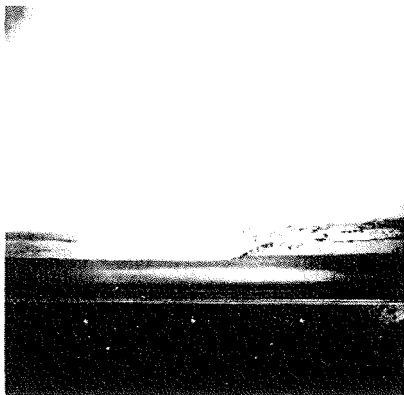


Figure 51-4

Cette accumulation des ondes est un phénomène très intéressant, et l'aspect fondamental dont cela dépend est qu'après la présence d'une onde, la vitesse de l'onde résultante doit être plus élevée. Un autre exemple du même phénomène est le suivant. Considérons de l'eau s'écoulant dans un long canal de largeur et de profondeur finies. Si un piston, ou un obstacle en forme de plaque traversant le canal est déplacé le long du canal suffisamment rapidement, l'eau s'accumule et s'empile comme la neige devant un chasse-neige. Supposez que maintenant la situation ressemble à celle de la Figure 51-4 avec une montée soudaine de la hauteur de l'eau quelque part dans le canal. Nous pouvons montrer que les grandes vagues dans un canal se déplacent plus rapidement dans l'eau profonde que dans l'eau moins profonde. De ce fait, tous nouveaux surcroîts et irrégularités dans l'énergie engendrée

par le piston sont envoyés vers l'avant et s'empilent au niveau du front. A nouveau, ce que nous avons en définitive est de l'eau avec un front raide, d'un point de vue théorique. Cependant, comme le montre la Fig. 51-4, il y a des complications. On y voit une onde arrivant dans le canal; le piston est à l'extrémité droite du canal. Au début elle peut apparaître comme une onde au comportement normal, comme on peut s'y attendre, mais au fur et à mesure qu'elle avance dans le canal, elle devient de plus en plus raide jusqu'à ce que les événements reproduits sur cette figure se produisent. Un terrible mouvement de bouillonnement apparaît à la surface, lorsqu'une partie de l'eau retombe, mais c'est essentiellement une montée extrêmement rapide sans perturbation de l'eau devant elle.

En réalité l'eau est beaucoup plus compliquée que le son. Cependant, afin simplement d'en illustrer un aspect, nous essayerons d'analyser la vitesse de cette *barre d'eau dans un canal*. Ce qui compte ici n'est pas que ce soit d'une importance fondamentale pour notre travail — ce n'est pas une grande généralisation — c'est simplement destiné à illustrer que les lois de la mécanique que nous connaissons déjà sont capables d'expliquer le phénomène.

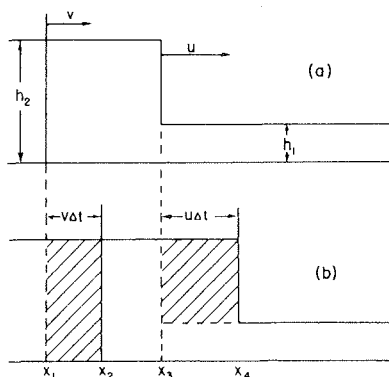


Fig. 51-5. Deux coupes d'une barre d'eau dans un canal avec (b) à un intervalle de temps Δt après (a).

Imaginez pour un instant que l'eau se comporte comme ce qui est montré sur la Fig. 51-5(a), que l'eau à la hauteur plus élevée h_2 se déplace avec une vitesse v , et que le front se déplace avec une vitesse u en avançant dans l'eau non perturbée qui se trouve à la hauteur h_1 . Nous aimerions déterminer la vitesse à laquelle le front se déplace. Pendant un temps Δt un plan vertical initialement en x_1 se déplace d'une distance $v\Delta t$ en x_2 , tandis que le front de l'onde se déplace de $u\Delta t$.

Nous appliquons maintenant les équations de conservation de la matière et de la quantité de mouvement. D'abord la première : Par unité de largeur du canal, nous voyons que la quantité $h_2 v \Delta t$ de matière qui a dépassé x_1 (zone hachurée) est compensée par l'autre région hachurée, dont la quantité de matière est $(h_2 - h_1)u \Delta t$. Ainsi, divisant par Δt , $vh_2 = u(h_2 - h_1)$. Cela ne nous donne pas cependant assez de renseignements, parce que bien que nous ayons h_2 et h_1 , nous ne connaissons ni u ni v : nous essayons d'obtenir l'une et l'autre de ces valeurs.

L'étape suivante consiste à utiliser la conservation de la quantité de mouvement. Nous n'avons pas étudié les problèmes de la pression de l'eau, ou de quoi que ce soit en hydrodynamique, mais il est clair cependant que la pression de l'eau à une certaine profondeur est juste suffisante pour soutenir la colonne d'eau qui se trouve au-dessus. Donc la pression de l'eau est égal à ρ , la densité de l'eau,

que multiplie g , que multiplie la profondeur sous la surface. Puisque la pression augmente linéairement avec la profondeur, la pression moyenne au-dessus du plan en x_1 par exemple, vaut $\frac{1}{2}\rho gh_2$, ce qui est également la force moyenne par unité de largeur et par unité de hauteur poussant le plan vers x_2 . Aussi nous multiplions par un autre h_2 pour obtenir la force totale qui agit sur l'eau, poussant de la gauche. Par ailleurs, il y a également une pression sur l'eau venant de la droite, exerçant une force opposée sur la région en question qui vaut, par le même type de calcul, $\frac{1}{2}\rho gh_1^2$. Nous devons maintenant équilibrer les forces par le taux de changement de la quantité de mouvement. Nous devons donc trouver quelle quantité supplémentaire de quantité de mouvement il y a dans la situation (b) de la Fig. 51-5 par rapport à la situation en (a). Nous voyons que la masse supplémentaire qui a acquis la vitesse v est simplement $\rho h_2 u \Delta t - \rho h_2 v \Delta t$ (par unité de largeur), et en multipliant ceci par v , on obtient la quantité de mouvement supplémentaire qu'il faut rendre égale à l'impulsion $F \Delta t$:

$$(\rho h_2 u \Delta t - \rho h_2 v \Delta t)v = (\frac{1}{2}\rho gh_2^2 - \frac{1}{2}\rho gh_1^2) \Delta t.$$

Si nous éliminons v de cette équation en substituant $vh_2 = u(h_2 - h_1)$, relation déjà trouvée, et simplifions, nous obtenons finalement $u^2 = gh^2(h_1 + h_2)/2h_1$.

Si la différence de hauteur est très petite, de telle sorte que h_1 et h_2 soient presque égaux, cette formule indique que la vitesse $= \sqrt{gh}$. Comme nous le verrons plus tard, ceci n'est vrai que si la longueur d'onde de l'onde est plus grande que la profondeur du canal.

Nous pourrions également faire la même chose pour les ondes sonores – en introduisant la conservation d'énergie interne, et non la conservation de l'entropie parce que le choc est irréversible. En fait, si on vérifie la conservation de l'énergie dans le problème de la barre d'eau, on trouve que l'énergie n'est pas conservée. Si la différence de hauteur est petite, elle est presque parfaitement conservée, mais aussitôt que la différence de hauteur devient importante, il y a perte d'énergie. Ceci se manifeste par la chute de l'eau et les bouillonnements indiqués sur la Fig. 51-4.

Dans les ondes de choc il y a une perte apparente correspondante d'énergie, du point de vue des réactions adiabatiques. L'énergie d'une onde sonore derrière le choc, sert à chauffer le gaz après que le choc soit passé, ce qui correspond au bouillonnement de l'eau dans la barre d'eau. Dans le calcul, trois équations dans le cas du son apparaissent nécessaires pour la solution, et la température derrière le choc n'est pas la même que la température devant, comme nous l'avons vu.

Si nous essayons de faire une barre d'eau qui est renversée ($h_2 < h_1$), nous trouvons alors que la perte d'énergie par seconde est négative. Comme l'énergie ne peut venir de nulle part, une telle barre ne peut se maintenir d'elle-même; elle est instable. Si nous devons démarrer une onde de ce genre, elle s'applatirait parce que la dépendance de la vitesse en fonction de la hauteur qui produirait un front raide dans le cas que nous avons discuté, aurait maintenant l'effet opposé.

51-3 Ondes dans les solides

Le type d'ondes que nous allons maintenant étudier sont les ondes plus compliquées dans les solides. Nous avons déjà traité les ondes sonores dans un gaz et dans un liquide, et il y a une analogie directe avec les ondes sonores dans un solide. Si une impulsion soudaine est appliquée à un solide, il est comprimé. Il résiste à la compression et une onde analogue au son est créée. Cependant, dans un solide un autre type d'onde est possible qui ne l'est pas

dans un fluide. Lorsqu'un solide est déformé en le poussant latéralement (ce qu'on appelle *cisaillement*), il tend à revenir de lui-même dans sa position de départ. C'est par définition ce qui distingue un solide d'un liquide: si nous déformons un liquide (à l'intérieur), si nous le maintenons ainsi un instant de telle sorte qu'il s'apaise, puis le laissons aller, il conservera cet état, mais si nous prenons un solide, que nous le poussions comme si nous voulions déformer un flan et que nous le laissons aller, il revient en arrière et engendre une onde de *cisaillement*, se déplaçant de la même manière que les compressions. Dans tous les cas, la vitesse de l'onde de cisaillement est inférieure à celle des ondes longitudinales. Les ondes de cisaillement sont en quelque sorte davantage semblables aux ondes de lumière, en ce qui concerne leur polarisation. Le son n'a pas de polarisation, c'est simplement une onde de pression. La lumière a une orientation caractéristique perpendiculaire à sa direction de propagation.

Dans un solide, les ondes sont des deux genres. Tout d'abord, il y a une onde de compression, analogue au son, qui avance à une certaine vitesse. Si le solide n'est pas cristallin, une onde de cisaillement polarisée dans n'importe quelle direction va se propager à une vitesse caractéristique. (Bien entendu tous les solides sont cristallins, mais si nous utilisons un matériau construit de micro-cristaux de toutes les orientations, les anisotropies du cristal disparaissent en moyenne.)

Une autre question intéressante concernant les ondes de son est la suivante: Que se passe-t-il si la longueur d'onde dans un solide devient de plus en plus courte, et de plus en plus courte? Jusqu'à quelle valeur peut-elle diminuer? Il est intéressant de remarquer qu'elle ne peut pas devenir plus courte que la distance entre les atomes, parce que si l'on suppose qu'il y a une onde dans laquelle un point s'élève et l'autre descend, etc., la longueur d'onde la plus courte possible est manifestement la distance entre atomes. En fonction des modes d'oscillations, nous disons qu'il y a des modes longitudinaux et des modes transverses, des modes d'ondes longues et des modes d'ondes courtes. Lorsque nous considérons des longueurs d'onde comparables à l'espacement entre les atomes, les vitesses ne sont plus constantes; un effet de dispersion apparaît où la vitesse n'est pas indépendante du nombre d'onde. Mais, en définitive, les modes les plus élevés des ondes transverses seront ceux dans lesquels chaque atome fait le contraire des atomes voisins.

Du point de vue des atomes, la situation ressemble aux deux pendules dont nous avons parlé, pour lesquels il y a deux modes, l'un dans lequel ils vont ensemble tous les deux, et l'autre dans lequel ils s'écartent. Il est possible d'étudier les ondes dans un solide d'une autre manière, en fonction d'un système d'oscillations harmoniques couplées comme un nombre énorme de pendules, avec le mode le plus élevé réalisé de telle sorte qu'ils oscillent d'une manière opposée et des modes plus bas avec différentes relations entre leur dépendance en temps.

Les longueurs d'onde les plus courtes sont si courtes qu'elles ne sont pas techniquement réalisables habituellement. Cependant elles sont d'un intérêt très grand, parce que dans la théorie de la thermodynamique du solide, les propriétés thermiques d'un solide, par exemple les chaleurs spécifiques, peuvent être calculées en fonction des propriétés des ondes sonores courtes. Quand on va à l'extrême des ondes sonores de longueurs d'onde toujours plus petites, on atteint nécessairement le mouvement des atomes individuels; les deux choses sont les mêmes en définitive.

Un exemple très intéressant d'ondes sonores dans un solide, à la fois longitudinales et transverses, sont les ondes qui existent dans le solide que forme la terre. Nous ne savons pas ce qui produit les bruits, mais à l'intérieur de la terre, de temps en temps, il y a des tremblements de terre – certaines roches glissent contre d'autres roches. Cela ressemble à un petit bruit. Et donc des ondes analogues à des ondes sonores sont engendrées par une telle source à des longueurs d'onde beaucoup plus grandes que celles que l'on considère d'habitude dans les ondes sonores, mais ce sont encore des ondes sonores, et elles se propagent

à l'intérieur de la terre. La terre n'est pas homogène, cependant, et les propriétés de pression, densité, compressibilité, etc., changent avec la profondeur et donc la vitesse varie avec la profondeur. De ce fait, les ondes ne se déplacent pas en lignes droites – on peut parler d'une sorte d'indice de réfraction et elles parcourent des lignes courbes. Les ondes longitudinales et les ondes transverses ont des vitesses différentes, et donc il y a des solutions différentes pour les différentes vitesses. Si donc nous plaçons un séismographe en un certain endroit, et observons la manière dont il oscille après qu'il y ait eu un tremblement de terre quelque part ailleurs, nous n'obtenons pas simplement une oscillation irrégulière. Nous pouvons obtenir une oscillation, et puis un ralentissement et ensuite une autre oscillation – ce qui se passe dépend de l'endroit. Si c'était suffisamment proche, nous recevions d'abord des ondes longitudinales de la perturbation et puis, quelques instants après, les ondes transverses, parce qu'elles se déplacent moins vite. En mesurant la différence de temps entre les deux, nous pouvons dire à quelle distance se trouve le tremblement de terre, si nous savons suffisamment de choses sur les vitesses et la composition de l'intérieur des régions traversées.

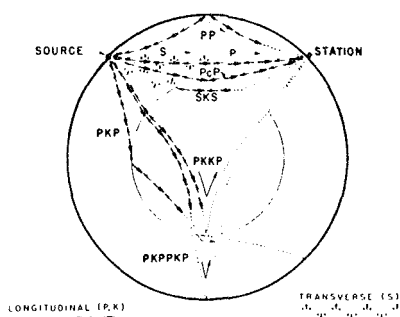


Fig. 51-6. Schéma de la terre, montrant les trajectoires des ondes sonores longitudinales et transverses.

Un exemple de structure de comportement des ondes dans la terre est montré sur la Fig. 51-6. Les deux types d'ondes sont représentés par des symboles différents. S'il s'est produit un tremblement de terre à l'endroit indiqué par «source», les ondes transverses et longitudinales arriveront à la station à des instants différents en se déplaçant par les voies les plus directes, et il y aura également des réflexions aux discontinuités qui produiront d'autres trajectoires et d'autres moments d'arrivée. Il se trouve qu'il y a un cœur dans la terre qui ne laisse pas passer les ondes transverses. Si la station est opposée à la source, les ondes transverses arrivent encore, mais le moment d'arrivée n'est pas correct. Ce qui se passe est que les ondes transverses arrivent sur le cœur, et chaque fois que les ondes transverses atteignent une interface qui est oblique, entre deux matériaux, deux nouvelles ondes sont créées, l'une transverse et l'autre longitudinale. Mais à l'intérieur du cœur de la terre, une onde transverse ne peut se propager (ou pour le moins rien ne permet de le penser, ce n'est possible que pour les ondes longitudinales); celle-ci ressort à nouveau sous les deux formes et arrive à la station.

C'est à partir du comportement de ces ondes de tremblement de terre que l'on a déterminé que les ondes transverses ne peuvent se propager au travers du cercle intérieur. Cela signifie que le centre de la terre est liquide au sens où il ne peut laisser se propager les ondes transverses. La seule manière de connaître ce qui se trouve à l'intérieur de la terre est l'étude des tremblements de terre. Ainsi, en utilisant un grand nombre d'observations sur de nombreux tremblements de terre en différentes

stations les détails ont été examinés – la vitesse, les courbes, etc., sont toutes connues. Nous savons quelles sont les vitesses des différents types d'ondes à chaque profondeur. Sachant cela, il est donc possible de déterminer quels sont les modes normaux de la terre, parce que nous connaissons la vitesse de propagation des ondes sonores – en d'autres termes les propriétés élastiques des deux types d'ondes à toute profondeur. Supposez que la terre soit déformée sous forme d'un ellipsoïde et qu'on la laisse se relaxer. Cela revient à superposer des ondes se déplaçant partout dans l'ellipsoïde pour déterminer la période et les formes d'un mode libre. Nous avons trouvé que s'il y a une perturbation, il y a un grand nombre de modes, du plus faible qui est ellipsoïdal, jusqu'aux modes plus élevés avec une structure plus complexe.

Le tremblement de terre du Chili de mai 1960 a produit un «bruit» suffisamment élevé pour que les signaux parcourent la terre plusieurs fois, et des sismographes de grande sensibilité venaient juste d'être fabriqués à temps pour déterminer les fréquences des modes fondamentaux de la terre et pour les comparer avec les valeurs qui avaient été calculées à partir de la théorie du son avec les vitesses connues, mesurées dans des tremblements de terre indépendants. Le résultat de cette expérience est illustré sur la Fig. 51-7, qui est un tracé de l'intensité

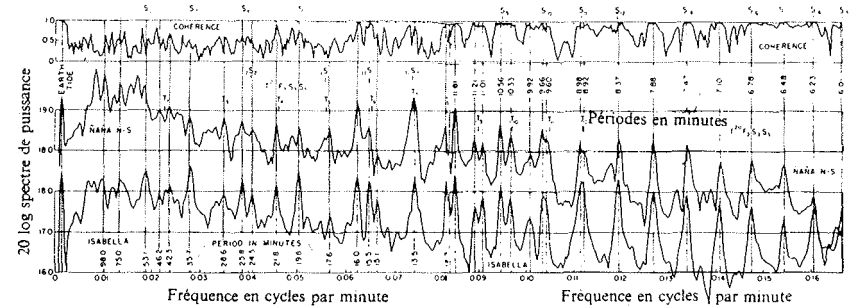


Fig. 51-7. Puissance en fonction de la fréquence comme l'ont mesuré les sismographes à Nâna, Pérou, et Isabella, Californie. La cohérence est une mesure du couplage entre les stations. [De Benioff, Press and Smith, J. Geoph. Research 66, 605, (1961)].

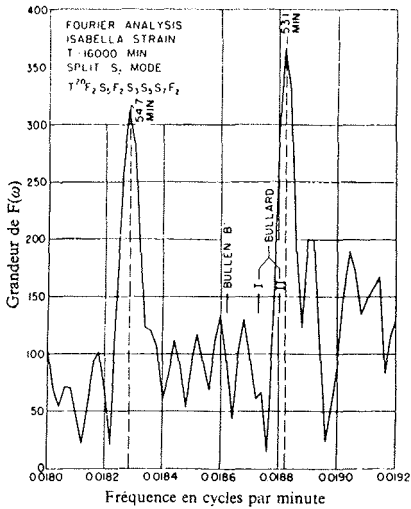


Fig. 51-8. Analyse à haute résolution d'un des enregistrements du sismographe, qui montre un doublet spectral.

du signal en fonction de la fréquence de son oscillation (une *analyse de Fourier*). Remarquez qu'à certaines fréquences particulières la réception est beaucoup plus grande qu'à d'autres fréquences; il y a des maxima très nets. Ce sont les fréquences naturelles de la terre, parce que ce sont les fréquences principales auxquelles la terre peut osciller. En d'autres termes, si le mouvement entier de la terre est formé de nombreux modes différents, nous nous attendons à obtenir en chaque station des déformations irrégulières qui indiquent une superposition de nombreuses fréquences. Si nous analysons ceci en termes de fréquences, nous devons être en mesure de trouver les fréquences caractéristiques de la terre. Les lignes noires verticales dans la figure sont les fréquences calculées, et nous trouvons un accord remarquable, un accord dû au fait que la théorie du son est correcte pour l'intérieur de la terre.

Un point très curieux est mis en évidence sur la Figure 51-8, qui montre une mesure très précise, avec une meilleure résolution du mode le plus faible, le mode ellipsoïdal de la terre. Remarquez que ce n'est pas un maximum simple, mais un maximum double; 54,7 minutes et 53,1 minutes – une légère différence. La raison de ces deux fréquences différentes n'était pas connue au moment où cela fut mesuré, bien qu'elle ait pu être trouvée dans l'intervalle. Il y a au moins deux explications possibles: La première serait qu'il pourrait y avoir une asymétrie dans la distribution de la terre, qui produirait deux modes semblables. Une autre possibilité qui est encore plus intéressante est celle-ci: Imaginez les ondes allant autour de la terre dans deux directions à partir de la source. Les vitesses ne seront pas égales à cause des effets de la rotation de la terre dans les équations du mouvement, qui n'ont pas été pris en considération en faisant les calculs. Le mouvement dans un système en rotation est modifié par les forces de Coriolis, et ceci peut créer le décalage observé.

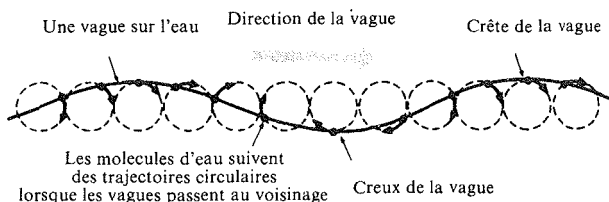
Considérant la méthode par laquelle ces tremblements de terre ont été étudiés, ce qui était obtenu par le sismographe n'est pas une courbe d'amplitude en fonction de la fréquence, mais de déplacement en fonction du temps, un tracé toujours très irrégulier. Pour trouver la quantité de toutes les différentes ondes sinusoïdales à toutes les fréquences différentes, nous savons que l'astuce consiste à multiplier les données par une onde sinusoïdale de la fréquence donnée et à intégrer, c'est-à-dire à prendre la moyenne, et dans la moyenne toutes les hautes fréquences disparaissent. Les figures étaient donc les tracés des intégrales calculées lorsque les données étaient multipliées par les ondes sinusoïdales de différents cycles par minute et intégrées.

51-4 Ondes de surface

Les ondes qui vont maintenant nous intéresser, qui sont facilement observées par n'importe qui et qui sont habituellement utilisées comme un exemple d'ondes dans les cours élémentaires, sont les ondes à la surface de l'eau. Comme nous allons le voir bientôt, elles constituent le plus mauvais exemple possible parce qu'elles ne ressemblent en aucune manière au son ou à la lumière; elles sont affectées de toutes les complications que les ondes peuvent avoir. Commençons avec les longues vagues en eau profonde. Si on considère que l'océan est infiniment profond et qu'une perturbation est créée à sa surface, des ondes sont engendrées. Toutes sortes de mouvements irréguliers se produisent, mais le mouvement de type sinusoïdal, avec une très petite perturbation, peut ressembler aux vagues bien formées de l'océan arrivant vers la plage. Avec une telle onde, l'eau, bien entendu, ne se déplace pas en moyenne mais les ondes se déplacent. Quel est le mouvement, est-il transverse ou longitudinal?

Il ne peut être ni l'un ni l'autre; il n'est ni transverse, ni longitudinal. Bien que l'eau en un endroit donné soit alternativement creux ou crête, elle ne peut pas simplement se déplacer vers le haut et vers le bas, à cause de la conservation de l'eau. C'est-à-dire, si l'eau descend, où va-t-elle aller? L'eau est essentiellement incompressible. La vitesse de compression des ondes – c'est-à-dire le son dans l'eau – est beaucoup, beaucoup plus élevée et nous ne considérons pas cela maintenant. Puisque l'eau est incompressible à cette échelle, lorsqu'une crête s'enfonce l'eau doit s'écarter de cette région. Il se produit en réalité que les particules d'eau près de la surface se déplacent approximativement en cercles. Lorsque des renflements arrivent, une personne flottant sur une bouée peut regarder un objet voisin et le voir se déplacer sur un cercle. C'est donc un mélange de déplacement longitudinal et transverse, pour ajouter à notre confusion. A de plus grandes profondeurs dans l'eau les mouvements sont des cercles plus petits jusqu'à ce que, à une profondeur raisonnable, il n'y ait plus de mouvement (Fig. 51-9).

Fig. 51-9. Des vagues en eau profonde sont formées de particules se déplaçant le long de cercles. Remarquez les décalages de phase systématiques d'un cercle à l'autre. Comment se déplacerait un objet flottant?



C'est un problème intéressant que de trouver la vitesse de telles ondes: elle doit être une certaine combinaison de la densité de l'eau, de l'accélération de la pesanteur, qui est la force de rappel qui produit les ondes et probablement de la longueur d'onde et de la profondeur. Si nous prenons le cas où la profondeur tend vers l'infini, elle ne dépendra pas de cette profondeur. Quelle que soit la formule que nous allons obtenir pour la vitesse de phase des ondes, les différents facteurs doivent se combiner pour donner les dimensions correctes, et si nous essayons ceci de différentes manières, nous ne trouvons qu'une seule manière de combiner la densité, g , et λ afin d'obtenir une vitesse, à savoir $\sqrt{g\lambda}$, qui ne contient pas du tout la densité. En réalité cette formule de la vitesse de phase n'est pas exacte, mais une étude complète de la dynamique, dans laquelle nous n'entrerons pas, montre que les facteurs sont ce que nous avons dit, à l'exception de $\sqrt{2\pi}$:

$$v_{\text{phase}} = \sqrt{g\lambda/2\pi} \text{ (pour les ondes de gravité).}$$

Il est intéressant de remarquer que les ondes longues vont plus vite que les ondes courtes. Ainsi lorsqu'un bateau crée des ondes loin autour de lui, comme dans le cas d'un conducteur d'automobile de course dans un bateau à moteur se déplaçant non loin de là, après un certain temps les ondes atteignent la plage avec d'abord de faibles oscillations et puis des oscillations de plus en plus rapides, parce que les premières ondes qui arrivent sont des ondes longues. Les ondes deviennent de plus en plus courtes au fur et à mesure que le temps passe, parce que les vitesses varient comme la racine carrée de la longueur d'onde.

On peut objecter, « Ce n'est pas exact, nous devons considérer la vitesse de *groupe* pour ce calcul! » C'est juste bien entendu. La formule de la vitesse de phase ne nous dit pas ce qui va arriver d'abord; c'est la vitesse de groupe qui nous le dit. Nous devons donc calculer la vitesse de groupe, et on laisse comme problème le soin de montrer qu'elle vaut la moitié de la vitesse de phase, en supposant que la vitesse varie comme la racine carrée

de la longueur d'onde, ce qui est tout ce dont nous avons besoin. La vitesse de groupe varie également comme la racine carrée de la longueur d'onde. Comment la vitesse de groupe peut-elle être la moitié de la vitesse de phase? Si l'on considère l'ensemble des ondes qui sont créées par un bateau qui se déplace, en suivant une crête particulière, on trouve qu'elle avance dans le groupe et au fur et à mesure devient de plus en plus faible et disparaît vers l'avant, puis mystiquement et mystérieusement une onde faible à l'arrière se fraie son chemin vers l'avant et devient plus intense. En bref, les ondes se déplacent dans le groupe, tandis que le groupe ne se déplace qu'à la moitié de la vitesse à laquelle les ondes se déplacent.

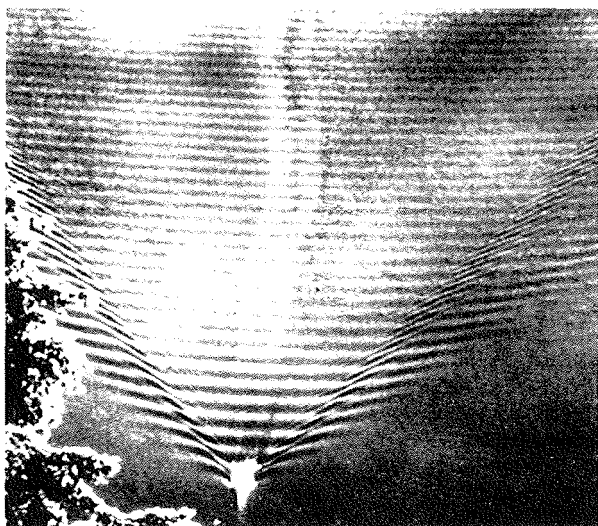


Fig. 51-10. Le sillage d'un bateau.

Comme les vitesses de groupe et les vitesses de phase ne sont pas égales, les ondes qui sont produites par un objet se déplaçant dans le milieu ne forment plus un simple cône, mais c'est beaucoup plus intéressant. Nous pouvons voir cela sur la Fig. 51-10, qui montre les ondes produites par un objet se déplaçant sur l'eau. Remarquez que c'est tout à fait différent de ce que nous avons pour le son, pour lequel la vitesse est indépendante de la longueur d'onde, où nous aurions des fronts d'ondes simplement le long du cône, se déplaçant vers l'extérieur. Au lieu de cela, nous avons des ondes à l'arrière avec des fronts se déplaçant parallèlement au mouvement du bateau, et puis nous avons des petites ondes sur les côtés et d'autres se déplaçant en oblique. Cette structure complète des ondes peut être étudiée avec astuce en ne connaissant que ceci: que la vitesse de phase est proportionnelle à la racine carrée de la longueur d'onde. L'astuce est que le système d'ondes est stationnaire relativement au bateau (à vitesse constante); n'importe quelle autre structure s'éloignerait du bateau.

Les vagues à la surface de l'eau que nous avons considérées jusqu'à présent étaient de grandes vagues pour lesquelles la force de rappel est due à la gravitation. Mais lorsque les ondes dans l'eau deviennent très courtes, la principale force de rappel est l'attraction capillaire, c'est-à-dire l'énergie de

surface, la tension superficielle. Pour les ondes de tension superficielle, il se trouve que la vitesse de phase est

$$v_{\text{phase}} \approx \sqrt{2\pi T/\lambda\rho} \text{ (pour les rides à la surface de l'eau),}$$

où T est la tension superficielle et ρ la densité. C'est le cas exactement opposé: la vitesse de phase est *plus élevée*, plus courte est la longueur d'onde, lorsque la longueur d'onde devient très petite. Lorsque nous avons à la fois une action de la gravitation et de la capillarité, comme c'est toujours le cas, nous obtenons une combinaison des deux:

$$v_{\text{phase}} \approx \sqrt{Tk/\rho + g/k},$$

ou $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde. Ainsi la vitesse des ondes à la surface de l'eau est en réalité très compliquée. La vitesse de phase en fonction de la longueur d'onde est indiquée sur la Fig. 51-11; pour des ondes très courtes elle est rapide, pour des ondes très longues elle est rapide, et il y a une vitesse minimum de déplacement des ondes. La vitesse de groupe peut être calculée à partir de cette formule: elle varie comme $\frac{1}{2}$ de la vitesse de phase pour les rides à $\frac{1}{2}$ de la vitesse de phase pour les vagues de gravité. A gauche du minimum la vitesse de groupe est plus élevée que la vitesse de phase; à droite, la vitesse de groupe est inférieure à la vitesse de phase. Il y a un certain nombre de phénomènes intéressants associés à cela. En premier lieu, comme la vitesse de groupe augmente si rapidement lorsque la longueur d'onde diminue, lorsque nous créons une perturbation, celle-ci aura une extrémité la plus lente allant à la vitesse minimum avec la longueur d'onde correspondante, et puis en avant, à vitesse plus élevée, il y aura une onde courte et une onde très longue. Il est très difficile de voir les ondes longues, mais il est facile de voir les courtes dans un récipient qui contient de l'eau.

Nous voyons donc que les rides à la surface de l'eau souvent utilisées pour illustrer les ondes simples sont tout à fait intéressantes et compliquées; elles n'ont pas un front d'onde raide, comme c'est le cas pour les ondes simples comme le son et la lumière. Les vagues principales sont accompagnées de petites rides qui s'enfuient en avant. Une perturbation raide dans l'eau ne produit pas une onde raide à cause de la dispersion. D'abord, il y a les ondes très fines. Incidemment, lorsqu'un objet se déplace dans l'eau à une certaine vitesse, il en résulte une structure assez compliquée, parce que toutes les ondes différentes vont à des vitesses différentes. On peut démontrer ceci avec de l'eau dans un récipient en forme de plateau peu profond et voir que les plus rapides sont les ondes capillaires fines. Il y a des ondes plus lentes d'un certain genre, qui suivent derrière. En inclinant le fond, on voit que là où la profondeur est plus faible, la vitesse est plus faible. Si une onde arrive en faisant un certain angle avec la droite de plus grande pente, elle dévie et tend à suivre cette droite. De cette manière, on peut montrer différentes choses, et nous concluons que les ondes sont plus compliquées dans l'eau que dans l'air.

La vitesse dans l'eau des longues vagues accompagnée de mouvements de circulation est plus lente lorsque la profondeur est faible, plus rapide dans l'eau profonde. Ainsi lorsque l'eau se rapproche d'une plage où la profondeur diminue, les ondes vont plus lentement. Mais là où l'eau est plus profonde, les ondes sont plus rapides, et nous obtenons donc les effets des ondes de choc. Cette fois, puisque l'onde n'est pas aussi simple, les chocs sont beaucoup plus compliqués et l'onde se retourne elle-même de la manière habituelle montrée sur la Fig. 51-12. C'est ce qui se passe lorsque les ondes se rapprochent de la plage, et les complexités réelles de la nature sont bien apparentes dans de telles circonstances. Personne n'a été encore capable de trouver la forme que la vague doit avoir

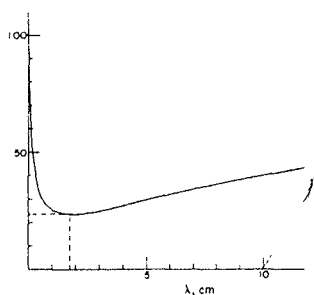


Fig. 51-11.

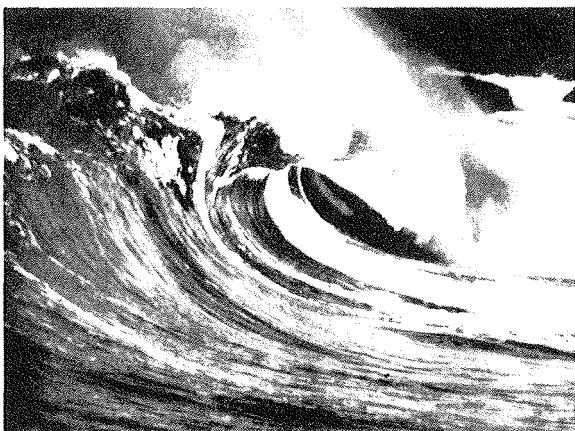


Fig. 51-12. Une vague.

lorsqu'elle se brise. C'est assez facile lorsque les ondes sont petites, mais lorsqu'on a des grandes vagues qui déferlent, c'est alors beaucoup plus compliqué.

Une caractéristique intéressante des ondes de capillarité peut être observée dans les perturbations produites par un objet se déplaçant dans l'eau. Du point de vue de l'objet lui-même, l'eau se déplace tout autour, et les ondes qui en définitive se trouvent tout autour de lui, sont toujours les ondes qui ont exactement la bonne vitesse pour rester fixes par rapport à l'objet dans l'eau. De la même manière, autour d'un objet dans un courant, avec le courant qui défile autour de l'objet, la structure des ondes est stationnaire, avec exactement la bonne longueur d'onde pour aller à la même vitesse que le courant qui passe. Mais si la vitesse de groupe est inférieure à la vitesse de phase, alors les perturbations se propagent en remontant le courant, parce que la vitesse de groupe n'est pas suffisante pour garder le contact avec le courant. Si la vitesse de groupe est plus rapide que la vitesse de phase, la structure des ondes apparaîtra en avant de l'objet. Si on considère avec attention les objets placés dans un courant, on peut voir qu'il y a de petites rides devant et de longues « oscillations » à l'arrière.

Une autre caractéristique intéressante de cette sorte peut être observée quand on verse des liquides. Si par exemple, on verse du lait suffisamment rapidement hors d'une bouteille, on peut voir un grand nombre de lignes se croisant dans les deux sens dans le jet de liquide sortant. Ce sont les ondes venant de la perturbation due aux bords et qui s'en écartent tout à fait comme les ondes autour d'un objet dans un courant. Il y a des effets venant des deux côtés qui produisent la structure croisée.

Nous avons recherché quelques-unes des propriétés intéressantes des ondes et les différentes complications venant de dépendances de la vitesse de phase en fonction de la longueur d'onde, de la vitesse des ondes en fonction de la profondeur, etc., produisant les phénomènes réellement complexes, et donc intéressants, qui apparaissent dans la nature.

Symétrie dans les lois physiques

52-1 Opérations de symétrie	52-5 Vecteurs polaires et axiaux
52-2 Symétrie dans l'espace et le temps	52-6 Laquelle des deux mains est la droite?
52-3 Symétrie et lois de conservation	52-7 La parité n'est pas conservée!
52-4 Réflexions dans un miroir	52-8 L'antimatière
	52-9 Violation des symétries

52-1 Opérations de symétrie

Le sujet de ce chapitre est ce que nous pouvons appeler la *symétrie dans les lois physiques*. Nous avons déjà traité certaines caractéristiques de la symétrie dans les lois physiques, au volume I, en relation avec le calcul vectoriel (Chapitre 11), la théorie de la relativité (Chapitre 16), et la rotation (Chapitre 20).

Pourquoi serions-nous intéressés par la symétrie? Tout d'abord, la symétrie fascine l'esprit humain et tout le monde apprécie les objets ou les structures qui sont d'une certaine façon symétriques. C'est un fait intéressant que la nature manifeste souvent certains types de symétrie dans les objets que nous rencontrons dans le monde autour de nous. L'objet peut-être le plus symétrique que l'on puisse imaginer est une sphère et la nature est pleine de sphères – les étoiles, les planètes, les gouttelettes d'eau dans les nuages. Les cristaux qu'on trouve dans les roches présentent un grand nombre de différentes variétés de symétrie, dont l'étude nous dit certaines choses importantes sur la structure des solides. Même les mondes animaux et végétaux témoignent d'un certain degré de symétrie, bien que la symétrie d'une fleur ou d'une abeille ne soit pas aussi parfaite et fondamentale que celle d'un cristal.

Mais notre intérêt principal ici n'est pas dans le fait que les *objets* de la nature soient souvent symétriques. Nous voulons plutôt examiner certaines des symétries encore plus remarquables de l'univers – les symétries qui existent dans les *lois fondamentales elles-mêmes* qui gouvernent le fonctionnement du monde physique.

D'abord, *qu'est-ce* que la symétrie? Comment une *loi* physique peut-elle être «symétrique»? Le problème de définir la symétrie est un problème intéressant et nous avons déjà remarqué que Weyl en avait donné une bonne définition, dont l'essentiel est qu'une chose est symétrique s'il existe quelque chose que nous puissions lui faire, de telle sorte qu'après l'avoir fait, elle apparaisse de la même manière qu'avant. Par exemple, un vase symétrique est d'un genre tel que si nous le regardons dans une glace ou que nous le tournions, il apparaîtra le même qu'auparavant. La question que nous voulons considérer

Tableau 52-1
Opérations de symétrie

Translation dans l'espace
Translation dans le temps
Rotation d'un angle fixe
Vitesse uniforme en ligne (transformation de Lorentz)
Renversement du temps
Réflexion dans l'espace
Échange d'atomes identiques ou de particules identiques
Phase en mécanique quantique
Matière-anti-matière (conjugaison de la charge)

ici est de savoir ce que nous pouvons faire aux phénomènes physiques ou aux conditions physiques dans une expérience, tout en conservant le résultat identique. Une liste des opérations connues selon lesquelles divers phénomènes physiques restent invariants est donnée au Tableau 52-1.

52-2 Symétrie dans l'espace et le temps

La première chose que nous pouvons tenter de faire est par exemple d'*effectuer une translation* du phénomène dans l'espace. Si nous réalisons une expérience en un certain endroit, et si nous construisons un autre appareil en un autre endroit dans l'espace (ou si nous y amenons le premier appareil), tout ce qui se passe dans le premier appareil, avec un certain ordre dans le temps, se reproduira de la même manière dans le deuxième, si nous avons réalisé les mêmes conditions, en ayant fait attention à toutes les restrictions que nous avons mentionnées précédemment : à savoir que toutes les caractéristiques de l'environnement qui le feraient ne pas se comporter de la même manière ont été aussi transportées – nous avons discuté de la manière dont nous devons définir ce que nous devons inclure dans de telles circonstances, et nous ne reviendrons pas maintenant sur ces détails.

De la même manière, nous croyons également aujourd'hui que le *déplacement dans le temps* n'a aucun effet sur les lois physiques. (C'est-à-dire, *pour autant que nous le sachions aujourd'hui* ; tout ce que nous disons est juste pour autant que nous le sachions aujourd'hui !) Cela signifie que si nous construisons un certain appareil et le lançons à un certain moment, par exemple mardi à 10 heures du matin, et puis que nous construisons le même appareil et le lançons par exemple trois jours après dans la même condition, les deux appareils vont suivre les mêmes mouvements, exactement de la même manière en fonction du temps, indépendamment du moment de départ, pourvu à nouveau que, bien sûr, les caractéristiques importantes de l'environnement soient également modifiées dans le *temps* d'une manière appropriée. Cette symétrie signifie, bien entendu, que si quelqu'un a acheté une action de General Motors il y a trois mois, l'action subira le même sort que s'il l'avait achetée aujourd'hui !

Il y a lieu également de faire attention aux différences géographiques, car bien sûr, il y a des variations dans les caractéristiques de la surface de la terre. Ainsi, par exemple, si nous mesurons le champ magnétique dans une certaine région et déplaçons l'appareil vers une autre région, il peut ne pas fonctionner de la même manière parce que le champ magnétique n'est pas le même, mais nous disons que c'est parce que le champ magnétique est associé avec la

terre. Nous pouvons imaginer que si nous déplaçons toute la terre ainsi que l'équipement, cela n'aurait aucune influence sur le fonctionnement de l'appareil.

Un autre aspect que nous avons traité avec beaucoup de détails était la rotation dans l'espace: si nous tournons un appareil d'un certain angle, il fonctionne exactement de la même manière, pourvu que nous tournions toutes les autres choses qui se rapportent à lui. En fait, nous avons discuté dans le détail au Chapitre 11 le problème de la symétrie par rapport à la rotation dans l'espace, et nous avons inventé un système mathématique appelé le *calcul vectoriel* pour le traiter aussi proprement que possible.

A un niveau plus avancé, nous rencontrons une autre symétrie – la symétrie par rapport à une vitesse uniforme en ligne droite. C'est-à-dire – un effet assez remarquable – que si nous avons un appareil fonctionnant d'une certaine manière et que nous prenons le même appareil et le plaçons dans une voiture, et que nous déplaçons la voiture ainsi que l'environnement nécessaire, le tout à une vitesse uniforme et en ligne droite, alors en ce qui concerne les phénomènes à l'intérieur de la voiture, il n'y a aucune différence: toutes les lois de la physique apparaissent identiques. Nous savons même comment exprimer ceci plus techniquement: les équations mathématiques des lois physiques doivent rester inchangées dans une *transformation de Lorentz*. En fait, c'est une étude des problèmes de la relativité qui attira plus précisément l'attention des physiciens sur la symétrie dans les lois physiques.

Toutes les symétries que l'on vient de mentionner étaient toutes de nature géométrique, le temps et l'espace étant plus ou moins la même chose, mais il y a d'autres symétries d'un type différent. Par exemple, il y a une symétrie qui décrit le fait que nous pouvons remplacer un atome par un autre du même genre; en d'autres termes, *il y a* des atomes du même genre. Il est possible de trouver des groupes d'atomes tels que si nous échangeons une paire, cela n'a pas d'importance – les atomes sont identiques. Quoique puisse faire un atome d'oxygène d'un certain genre, un autre atome d'oxygène de ce genre le fera. On peut dire, «C'est ridicule, c'est la *définition* des genres identiques!» Ceci peut n'être que la définition, mais nous ne savons pas pour autant *s'il y a* «des atomes du même genre»; *le fait* est qu'il y a énormément d'atomes du même genre. Ainsi cela a un sens de dire que remplacer un atome par un autre du même genre n'a pas d'importance. Ce qu'on appelle les particules élémentaires à partir desquelles les atomes sont constitués, sont également des particules identiques au sens précédent – tous les électrons sont les mêmes; tous les protons sont les mêmes; tous les pions positifs sont les mêmes; etc...

Après une aussi longue liste des choses qui peuvent être faites sans modifier le phénomène, on peut penser que nous pouvons faire pratiquement n'importe quoi; aussi donnons quelques exemples du contraire, simplement pour voir la différence. Supposez que nous demandions: «Est-ce que les lois physiques sont symétriques par rapport à un changement d'échelle?» Supposez que nous construisions un certain appareil, et que nous en construisions un autre cinq fois plus grand à tous égards, va-t-il fonctionner exactement de la même manière? La réponse est dans ce cas, *non!* La longueur d'onde de la lumière émise, par exemple, par les atomes à l'intérieur d'une boîte d'atomes de sodium et la longueur d'onde de la lumière émise par un gaz d'atomes de sodium cinq fois plus grands en volume, n'est pas cinq fois plus grande, mais est en fait exactement la même. Ainsi le rapport de la longueur d'onde à la taille de l'émetteur va changer.

Un autre exemple: nous voyons de temps en temps dans les journaux la photographie d'une grande cathédrale construite à partir de petites allumettes – un travail d'art énorme, réalisé par un retraité qui passe son temps à coller des allumettes. C'est beaucoup plus élaboré

et magnifique que n'importe quelle cathédrale réelle. Si nous imaginons que cette cathédrale en bois était effectivement construite à l'échelle d'une cathédrale réelle, nous voyons où apparaît la difficulté; elle ne durerait pas – tout s'effondrerait parce que, à cette échelle, les morceaux d'allumettes ne seraient pas suffisamment solides. «Oui», peut-on dire, «mais nous savons également que lorsqu'il y a une influence de l'extérieur, celle-ci doit également changer en proportion!» Nous parlons de la possibilité de l'objet de résister à la gravitation. Aussi nous commençons par prendre le modèle de cathédrale, constitué d'allumettes réelles et la terre réelle, nous savons alors que c'est stable. Puis nous prenons la grande cathédrale et considérons une terre plus grande. Mais alors c'est encore pire, car la gravitation a encore augmenté!

Aujourd'hui, bien sûr, nous comprenons le fait que les phénomènes dépendent de l'échelle en nous basant sur le fait que la matière est de nature atomique, et certainement si nous construisons un appareil qui soit si petit qu'il ne contienne que cinq atomes, ce serait quelque chose dont on ne pourrait changer l'échelle arbitrairement. L'échelle d'un atome individuel n'est pas du tout arbitraire – elle est tout à fait définie.

Le fait que les lois de physique ne soient pas invariantes dans un changement d'échelle fut découvert par Galilée. Il réalisa que la solidité des matériaux ne variait pas exactement dans les proportions de leurs dimensions, et il illustra cette propriété dont nous venons de parler, sur les cathédrales en allumettes, en traçant deux os, l'os d'un chien, avec la bonne proportion pour soutenir son poids, et un os imaginaire d'un «super chien» qui serait, par exemple, de dix à cent fois plus grand – cet os était une grande et solide chose avec des proportions tout à fait différentes. Nous ne savons pas s'il poussa le raisonnement jusqu'à son terme, c'est-à-dire que les lois de la nature doivent avoir une échelle définie, mais il fut si impressionné par cette découverte qu'il la considéra aussi importante que la découverte des lois du mouvement, parce qu'il les publia toutes les deux dans le même volume intitulé «De deux nouvelles sciences».

Un autre exemple dans lequel les lois ne sont pas symétriques et que nous connaissons bien est celui-ci: un système en rotation à une vitesse angulaire uniforme ne suit pas les mêmes lois apparentes qu'un système qui ne tourne pas. Si nous réalisons une expérience et puis que nous plaçons tout dans un vaisseau spatial et que ce vaisseau tourne dans l'espace vide, tout seul à une vitesse angulaire constante, l'appareil ne fonctionnera pas de la même manière, parce que nous savons que les objets à l'intérieur seront projetés vers l'extérieur, etc., par les forces centrifuges ou de Coriolis. En fait, nous pouvons dire que la terre tourne en utilisant ce qu'on appelle un pendule de Foucault sans avoir besoin de regarder à l'extérieur.

Mentionnons maintenant une symétrie extrêmement intéressante qui est manifestement fautive, à savoir *la réversibilité dans le temps*. Les lois de physique ne peuvent être apparemment réversibles dans le temps, parce que, comme nous le savons, tous les phénomènes évidents sont irréversibles à grande échelle: «Le doigt en mouvement écrit, et ayant écrit, il avance.» Pour autant que nous puissions dire, cette irréversibilité est due au très grand nombre de particules en jeu, et si nous pouvions voir les molécules individuelles, nous ne serions pas capables de discerner si le mécanisme fonctionne dans un sens ou dans l'autre. Pour être plus précis: nous construisons un petit appareil dans lequel nous savons ce que font tous les atomes, dans lequel nous pouvons les regarder s'agiter. Nous construisons maintenant un autre appareil comme celui-là, mais nous lançons son mouvement dans la condition finale de l'autre avec toutes les vitesses exactement renversées.

Il va alors emprunter les mêmes mouvements, mais exactement en sens inverse. En d'autres termes: si nous prenons un film, avec des détails suffisants, de tous les mouvements au sein d'un morceau de matière, que nous le projettons sur un écran et le faisons aller en sens inverse, aucun physicien ne sera en mesure de dire, «Ceci va à l'encontre des lois de la physique, il se produit quelque chose d'incorrect!» Si nous ne voyons pas tous les détails, bien entendu, la situation sera parfaitement claire. Si nous voyons l'œuf s'écraser sur le trottoir et la coquille s'ouvrir, etc., nous dirons alors sûrement, «Ceci est irréversible, parce que si nous faisons tourner le film en sens inverse, l'œuf va se reformer, la coquille va reprendre sa place, ce qui est évidemment ridicule!» Mais si nous regardons les atomes individuels, les lois apparaissent complètement réversibles. Ceci est bien sûr une découverte beaucoup plus difficile à faire, mais il est apparemment vrai que les lois physiques fondamentales à une échelle microscopique et fondamentale sont complètement réversibles dans le temps!

52-3 Symétrie et lois de conservation

Les symétries des lois de physique sont très intéressantes à ce niveau, mais il se trouve en définitive qu'elles sont encore plus intéressantes et excitantes lorsque nous abordons la mécanique quantique. Pour une raison que nous ne pouvons pas rendre claire au niveau de la présente discussion – un fait que la plupart des physiciens trouvent encore assez stupéfiant, une chose tout à fait profonde et magnifique, est que, en mécanique quantique, *à chacune des lois de symétrie correspond une loi de conservation*; il y a une relation certaine entre les lois de conservation et les symétries des lois physiques. Nous ne pouvons qu'énoncer ceci pour le moment, sans aucune tentative d'explication.

Le fait, par exemple, que les lois soient symétriques pour la translation dans l'espace, signifie que lorsque nous ajoutons les principes de la mécanique quantique *la quantité de mouvement est conservée*.

Que les lois soient symétriques par rapport aux translations dans le temps, signifie en mécanique quantique que *l'énergie est conservée*.

L'invariance dans la rotation autour d'un angle fixe dans l'espace correspond à *la conservation du moment cinétique*. Ces relations sont extrêmement intéressantes et belles, parmi les choses les plus belles et les plus profondes en physique.

Incidemment, on trouve un certain nombre de symétries qui apparaissent en mécanique quantique qui n'ont pas d'analogue classique, qui n'ont aucun moyen d'être décrites en physique classique. L'une d'entre elles est ceci: Si ψ est l'amplitude d'un certain processus, nous savons que le carré du module de ψ est la probabilité que le processus se produise. Si quelqu'un d'autre fait ses calculs, non pas avec ce ψ , mais avec un ψ' qui ne diffère que par un changement de phase (appelons Δ une certaine constante, et multiplions $e^{i\Delta}$ par l'ancien ψ), le carré du module de ψ' , qui est la probabilité de l'événement, est alors égal au carré du module de ψ :

$$\psi' = \psi e^{i\Delta}; \quad |\psi'|^2 = |\psi|^2. \quad (52.1)$$

Ainsi les lois physiques ne sont pas modifiées si la phase de la fonction d'onde est décalée d'une certaine constante arbitraire. C'est une autre symétrie. Les lois physiques doivent être d'une nature telle qu'un décalage de la phase en mécanique quantique n'ait pas d'importance. Comme nous venons juste de le mentionner, en mécanique quantique il y a une loi de

conservation pour chaque symétrie. La loi de conservation qui est reliée à la phase en mécanique quantique semble être la loi de *conservation de la charge électrique*. Tout ceci est donc une chose extrêmement intéressante!

52-4 Réflexions dans un miroir

La question suivante qui va nous intéresser pour la plus grande partie du reste de ce chapitre, est la question de la symétrie dans une *réflexion dans l'espace*. Le problème est celui-ci : Est-ce que les lois physiques sont symétriques dans une réflexion? Nous pouvons exprimer ceci de cette manière: Supposez que nous construisions un appareil, par exemple une horloge, avec de nombreuses roues, aiguilles et beaucoup de chiffres; elle fait tic-tac, elle fonctionne et elle contient à l'intérieur des parties remontées. Nous regardons l'horloge dans un miroir. La question n'est pas de savoir comment elle *apparaît* dans un miroir. Mais *construisons* en fait une autre horloge qui soit exactement la même que la première horloge observée dans le miroir – pour chaque vis avec un filet tourné dans le sens droit, nous utilisons une vis avec un filet tourné dans le sens gauche à la place correspondante; là où il y a marqué un «2» sur l'avant, nous marquons un «5» sur l'avant de l'autre; chaque ressort enroulé tourne d'une certaine manière dans l'horloge et de l'autre manière dans l'horloge qui en est son image dans le miroir; lorsque tout est terminé, nous avons deux horloges, toutes les deux physiques, qui ont entre elles la relation entre un objet et son image dans un miroir, bien qu'elles soient toutes les deux des objets matériels et réels, comme nous l'avons dit. La question est maintenant celle-ci: Si les deux horloges sont lancées dans la même condition, les ressorts tendus aux mêmes tensions vont-elles battre et fonctionner ensuite tout le temps exactement comme des images dans un miroir? (Ceci est une question physique, et non pas une question philosophique.) Notre intuition sur les lois de la physique suggère qu'elles le *feront*.

Nous suspectons, au moins dans le cas de ces horloges, que la réflexion dans l'espace est l'une des symétries des lois physiques, que si nous changeons chaque chose de «droite» en «gauche» et que pour le reste nous laissons tout identique, nous ne pouvons pas observer de différence. Supposons alors pour un moment que ceci soit vrai. Si c'est vrai, alors il est impossible de distinguer la «droite» de la «gauche» par un phénomène physique quelconque, de même qu'il est impossible, par exemple, de définir une vitesse absolue particulière par un phénomène physique. Il doit donc être impossible, par n'importe quel phénomène physique, de définir de façon absolue ce que nous appelons «droite» par rapport à «gauche», parce que les lois physiques doivent être symétriques.

Bien entendu, rien *n'oblige* le monde d'être symétrique. Par exemple, en utilisant ce que nous pouvons appeler la «géographie», il est certain que la «droite» peut être définie. Par exemple, nous nous trouvons à la Nouvelle-Orléans, regardons vers Chicago et la Floride est à notre droite (lorsque nos pieds sont sur le sol!). Ainsi nous pouvons définir la «droite» et la «gauche» par la géographie. Bien sûr, la situation réelle dans un système quelconque ne doit pas nécessairement avoir la symétrie dont nous parlons; le problème est de savoir si les *lois* sont symétriques – en d'autres termes, cela va-t-il à l'encontre des *lois physiques* d'avoir une sphère comme la terre avec «un sol orienté à l'envers» et une personne comme nous regardant debout une ville telle que Chicago d'un endroit comme la Nouvelle-Orléans, mais avec tout le reste à l'envers, ce qui fait que la Floride serait de l'autre côté. Manifestement, cela semble ne pas être impossible, ni aller contre les lois physiques, que tout soit changé de la gauche à la droite.

Un autre aspect est que notre définition de la « droite » ne doit pas dépendre de l'histoire. Une manière de distinguer facilement la droite de la gauche et d'aller dans un atelier est de prendre une vis au hasard. Il y a de grandes chances pour que le filet soit orienté à droite – pas nécessairement, mais il est beaucoup plus probable d'avoir un filet orienté à droite plutôt qu'à gauche. Cela dépend de l'histoire ou de conventions, ou de l'état des choses, mais ce n'est pas une question concernant les lois fondamentales. Comme nous pouvons bien le comprendre, n'importe qui aurait pu commencer de fabriquer des vis orientées à gauche!

Aussi nous devons essayer de trouver quelque phénomène dans lequel la « main droite » est introduite fondamentalement. La possibilité suivante que nous analysons est le fait que la lumière polarisée tourne son plan de polarisation lorsqu'elle traverse, par exemple, une eau sucrée. Comme nous l'avons vu au Chapitre 33, elle tourne, par exemple, vers la droite, dans une certaine solution de sucre. C'est une manière de définir la « main droite », parce que nous pouvons dissoudre du sucre dans de l'eau et la polarisation va vers la droite. Mais le sucre provient d'objets vivants, et si nous essayons de faire du sucre artificiel, nous découvrons alors qu'il *ne fait pas* tourner le plan de polarisation! Mais si nous prenons le même sucre, fabriqué artificiellement qui ne fait pas tourner le plan de polarisation, et nous y plaçons des bactéries (elles mangent une partie du sucre), et puis nous filtrons les bactéries, nous trouvons qu'il reste encore du sucre (presque la moitié de ce que nous avions précédemment), et cette fois-ci il fait tourner le plan de polarisation, mais *dans l'autre sens*! Cela semble assez incompréhensible, mais c'est facilement explicable.

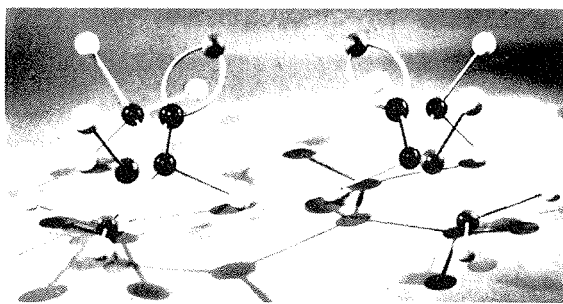


Fig. 52-1. (a) L-alanine (gauche), et (b) D-alanine (droite).

Prenons un autre exemple: Une des substances qui est commune à toutes les créatures vivantes et qui est fondamentale pour la vie est une protéine. Les protéines sont constituées de chaînes d'acides aminés. La Figure 52-1 montre un modèle d'acide aminé qui provient d'une protéine. Cet acide aminé est appelé *alanine* et l'arrangement moléculaire ressemble à celui de la Figure 52-1(a) s'il provient d'une protéine venant d'un objet vivant. Par ailleurs, si nous essayons de fabriquer l'alanine à partir du gaz carbonique de l'éthane et de l'ammoniac (et nous *pouvons* la fabriquer, ce n'est pas une molécule compliquée), nous découvrons que nous fabriquons des quantités égales de cette molécule et de celle montrée sur la Figure 51-1(b)! La première molécule, celle qui provient de l'objet vivant est appelée *L-alanine*. L'autre, qui est la même chimiquement, en ce sens qu'elle possède le même type d'atomes et les mêmes liaisons entre les atomes, est une molécule « droite », comparée avec la L-alanine qui est « gauche », et elle est

appelée *D-alanine*. La chose intéressante est que lorsque nous fabriquons de l'alanine dans un laboratoire à partir de gaz simples, nous obtenons un égal mélange des deux genres. Cependant, la seule chose que la vie utilise est la *L-alanine*. (Ceci n'est pas exactement vrai. Ça et là dans les créatures vivantes, on rencontre un usage particulier de la *D-alanine*, mais c'est extrêmement rare. Toutes les protéines utilisent exclusivement la *L-alanine*.) Si maintenant nous fabriquons les deux types de molécules, et que nous donnons le mélange à un animal, qui aime « manger » ou utiliser l'alanine, il ne peut pas utiliser la *D-alanine*, ce qui fait qu'il n'utilise que la *L-alanine*; c'est ce qui s'est produit pour notre sucre – après que les bactéries aient mangé le sucre qui leur convient, seule l'espèce « contraire » subsiste! (Le sucre gauche a un goût sucré mais pas le même que le sucre droit.)

Il semble donc que le phénomène de la vie permette une distinction entre la « droite » et la « gauche », ou la chimie permet une distinction parce que les molécules sont différentes chimiquement. Mais non, elle ne le permet pas! Pour autant que les mesures physiques puissent être faites, telles que l'énergie, les vitesses des réactions chimiques, etc., les deux genres de molécules fonctionnent exactement de la même manière si nous faisons tout le reste également en respectant une symétrie dans un miroir. Une molécule va faire tourner la lumière vers la droite, et l'autre va la faire tourner vers la gauche, précisément du même angle, au travers de la même quantité de fluide. Ainsi, en ce qui concerne la physique, ces deux acides aminés sont également satisfaisants. Pour autant que nous comprenions les choses aujourd'hui, les aspects fondamentaux de l'équation de Schrödinger disent que les deux molécules doivent se comporter de manières exactement correspondantes, de telle sorte que l'une soit droite et l'autre soit gauche. Néanmoins dans la vie, elles ont toutes un seul sens!

On suppose que la raison en est la suivante. Supposons, par exemple, que la vie ait été à un instant dans une certaine condition dans laquelle toutes les protéines dans certaines créatures aient des acides aminés « gauches », et toutes les enzymes soient asymétriques – chaque substance dans une créature vivante est asymétrique – elle n'est pas symétrique. Ainsi, lorsque les enzymes digestives essayent de transformer les produits chimiques de la nourriture d'une sorte en une autre, un certain type de produit « s'adapte » à l'enzyme, mais l'autre type n'y parvient pas (comme Cendrillon et la pantoufle, à ceci près que c'est un « pied gauche » que nous essayons). Pour autant que nous sachions, en principe, nous pouvons fabriquer une grenouille, par exemple, dans laquelle chaque molécule est renversée, tout se comporte comme l'image « gauche » dans un miroir d'une grenouille réelle; nous avons une grenouille « gauche ». Cette grenouille « gauche » va fonctionner correctement pendant un certain temps, mais elle ne va rien trouver à manger, parce que si elle avale une mouche, ses enzymes ne sont pas fabriquées pour pouvoir la digérer. Les mouches ont la mauvaise espèce d'acides aminés (tant que nous ne lui donnons pas une mouche « gauche »). Pour autant que nous sachions, les processus chimiques et vivants continueraient exactement de la même manière si tout était renversé.

Si la vie est entièrement un phénomène physique et chimique, nous pouvons alors comprendre que les protéines soient toutes faites selon le même tire-bouchon, à partir seulement de l'idée qu'au début certaines molécules vivantes, par accident, ont commencé à exister et que quelques-unes ont gagné. Quelque part, une fois, une molécule organique fut orientée d'une certaine manière, et à partir de cet objet particulier la droite s'introduisit dans notre géographie particulière; un accident historique particulier fut asymétrique et depuis lors le sens choisi s'est propagé de lui-même. Après avoir atteint l'état présent, bien sûr, il continuera toujours ainsi – toutes les enzymes digèrent les objets « droits », fabriquent les objets « droits »: lorsque le gaz carbonique et la vapeur d'eau, etc., pénètrent dans les feuilles des plantes, les enzymes qui fabriquent les sucres les font asymétriques, parce que les

enzymes sont asymétriques. Si un type de virus quelconque ou d'objet vivant devait apparaître à un moment ultérieur, il ne pourrait survivre que s'il pouvait « manger » le type de matériau vivant déjà présent. Aussi il devrait lui-même être du même genre.

Il n'y a pas de conservation du nombre de molécules « droites ». Une fois lancés nous pouvons continuer d'augmenter le nombre de molécules « droites ». Ainsi l'hypothèse est que les phénomènes dans le cas de la vie ne montrent pas une absence de symétrie des lois physiques, mais manifestent, au contraire, la nature universelle et l'aspect commun de l'origine ultime de toutes les créatures sur terre, dans le sens décrit précédemment.

52-5 Vecteurs polaires et axiaux

Allons maintenant plus loin. Nous remarquons qu'en physique il y a beaucoup d'autres endroits où nous rencontrons des règles de « main droite » et de « main gauche ». En fait, lorsque nous avons appris le calcul vectoriel, nous avons appris les règles de « main droite » que nous devons utiliser afin d'obtenir correctement le moment cinétique, le couple, le champ magnétique, etc. La force sur une charge en mouvement dans un champ magnétique, par exemple, est $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Dans une situation donnée, dans laquelle nous connaissons $\mathbf{F}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{B}$, est-ce que cette équation n'est pas suffisante pour définir l'opération de main droite? En fait, si nous revenons en arrière et que nous essayons de voir d'où proviennent les vecteurs, nous voyons que la règle de la « main droite » n'était qu'une convention; c'était un truc. Les quantités initiales, comme le moment cinétique et les vitesses angulaires, et d'autres choses du même genre, n'étaient pas du tout de réels vecteurs! Elles sont toutes associées à un plan, et ce n'est que parce qu'il y a trois dimensions dans l'espace que nous pouvons associer la quantité avec une direction perpendiculaire à ce plan. Des deux directions possibles, nous avons choisi la direction de la « main droite ».

Si donc les lois de la physique sont asymétriques, nous devrions trouver que si un démon parvenait à se faufiler dans tous les laboratoires de physique et à remplacer le mot « droite » par « gauche » dans tous les livres où l'on donne des règles de main droite, et si à la suite de cela nous utilisions les règles de « main gauche », uniformément, cela ne devrait avoir aucune importance pour les lois physiques.

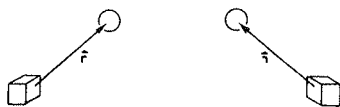


Fig. 52-2. Un déplacement dans l'espace et son image dans un miroir.

Donnons un exemple. Il y a deux genres de vecteurs. Il y a les vecteurs « honnêtes », par exemple, un déplacement $\Delta\mathbf{r}$ dans l'espace. Si dans notre appareil, il y a une partie à un endroit et quelque chose d'autre à un autre endroit, alors dans l'appareil réfléchi dans un miroir, il y aura l'image de cette première partie et l'image du quelque chose d'autre, et si nous traçons un vecteur allant de la « partie » à ce « quelque chose d'autre », un vecteur est l'image dans un miroir de l'autre (Fig. 52-2). La pointe du vecteur change de direction, de même que tout l'espace est tourné à l'envers; un tel vecteur est appelé un *vecteur polaire*.

Mais l'autre genre de vecteur, qui est en relation avec les rotations, est d'une nature différente. Par exemple, supposez que dans l'espace à trois dimensions quelque chose tourne comme

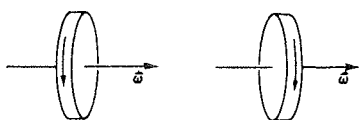


Fig. 52-3. Une roue en rotation et son image dans un miroir. Remarquez que la direction du « vecteur » vitesse angulaire n'est pas renversée.

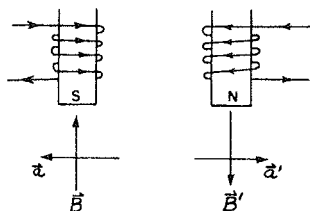


Fig. 52-4. Un aimant et son image dans un miroir.

sur la Figure 52-3. Si nous la regardons dans un miroir, elle tournera comme indiqué, à savoir comme l'image dans un miroir de la rotation initiale. Nous nous sommes mis d'accord pour représenter la rotation dans un miroir par la même règle, c'est un « vecteur » qui, à la réflexion, *ne change pas* comme le fait le vecteur polaire, mais se trouve renversé relativement au vecteur polaire et à la géométrie de l'espace; un tel vecteur est appelé un *vecteur axial*.

Si maintenant la loi de symétrie de réflexion est correcte en physique, il doit alors être vrai que les équations doivent être ainsi conçues que si nous changeons le signe de chaque vecteur axial et de chaque produit vectoriel de vecteurs, ce qui correspond à la réflexion, rien ne doit se produire. Par exemple, lorsque nous écrivons une formule qui dit que le moment cinétique est $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, cette équation est correcte, parce que si nous passons à un système de coordonnées « gauche », nous changeons le signe de $\mathbf{L}$, mais $\mathbf{p}$ et $\mathbf{r}$ ne changent pas; le signe du produit vectoriel est modifié, puisque nous devons passer d'une règle de la « main droite » à une règle de la « main gauche ». Comme autres exemples, nous savons que la force sur une charge en mouvement dans un champ magnétique est $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, mais si nous passons d'un système « droit » à un système « gauche », puisque $\mathbf{F}$ et $\mathbf{v}$ sont connus comme étant des vecteurs polaires, le changement de signe nécessaire pour le produit vectoriel doit être compensé par un changement de signe de $\mathbf{B}$, ce qui signifie que $\mathbf{B}$ doit être un vecteur axial. En d'autres termes, si nous faisons une telle réflexion, $\mathbf{B}$ doit se transformer en $-\mathbf{B}$. Ainsi, si nous changeons nos coordonnées de la droite vers la gauche, nous devons également changer les pôles des aimants de Nord en Sud.

Voyons comment ceci s'applique dans un exemple. Supposons que nous ayons deux aimants comme sur la Figure 52-4. L'un est un aimant avec un bobinage enroulé d'une certaine manière, et avec un courant le parcourant dans un sens donné. L'autre aimant a le même aspect que l'image dans un miroir du premier aimant – le bobinage sera enroulé dans l'autre direction, tout ce qui se passe à l'intérieur du bobinage est exactement renversé, et le courant avance comme indiqué. À partir des lois de la production des champs magnétiques, que nous ne connaissons pas officiellement pour le moment, mais que très probablement nous avons apprises au lycée, il se trouve que le champ magnétique est celui montré sur la figure. Dans un cas, le pôle est un pôle magnétique Sud, tandis que dans l'autre aimant le courant va dans l'autre sens et le champ magnétique est renversé – c'est un pôle magnétique Nord. Ainsi nous voyons que lorsque nous allons de la droite vers la gauche, nous devons en fait changer le Nord en Sud!

Cela n'a pas d'importance que l'on change le Nord en Sud; ce sont aussi de simples conventions. Parlons des *phénomènes*. Supposons, maintenant, que nous ayons un électron se déplaçant dans un champ, et pénétrant dans la page. Si alors nous utilisons la formule de la force $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

(rappelez-vous que la charge est moins), nous voyons que l'électron dévie dans la direction indiquée par la loi physique. Ainsi le phénomène est que nous avons un bobinage avec un courant se déplaçant dans un sens particulier et une trajectoire d'électrons dans un certain sens – ceci est la physique – quelle que soit la manière dont nous l'appelons.

Réalisons la même expérience avec un miroir: nous envoyons un électron dans la direction correspondante et maintenant la force est renversée, si nous la calculons à partir de la même règle, et ceci est tout à fait correct, parce que les *mouvements* correspondants sont alors images l'un de l'autre dans un miroir!

52-6 Laquelle des deux mains est la droite?

Ainsi le fait est qu'en étudiant n'importe quel phénomène, il y a toujours deux règles de la « main droite », ou un nombre pair d'entre elles, et le résultat total est que les phénomènes apparaissent toujours symétriques. En bref, nous ne pouvons donc pas distinguer la droite de la gauche si nous ne sommes pas également capables de discerner le Nord du Sud. Cependant, il peut sembler que nous *puissions* dire quel est le pôle nord d'un aimant. Le pôle nord d'une aiguille aimantée, par exemple, est celui qui pointe vers le Nord. Mais, bien entendu, c'est à nouveau une propriété locale qui est en relation avec la géographie de la terre; c'est exactement comme parler de la direction dans laquelle se trouve Chicago, aussi cela ne compte pas. Si vous avez déjà vu l'aiguille d'une boussole, vous avez pu remarquer que le pôle qui cherche le Nord est d'une certaine couleur bleuâtre. Mais ceci est simplement dû à l'homme qui a peint l'aimant. Ce sont chaque fois des critères conventionnels et locaux.

Cependant, si un aimant devait avoir la propriété que si nous le regardons avec attention nous voyons de petits cheveux poussant sur son pôle nord, et non sur son pôle sud, si cela était la règle générale, ou s'il existait une *quelconque* manière unique de distinguer le pôle nord du pôle sud d'un aimant, nous pourrions alors dire dans lequel des deux cas nous sommes en réalité, et *ceci serait la fin de la loi de symétrie de la réflexion*.

Pour illustrer le problème encore plus clairement, imaginez que nous soyons en train de parler à un Martien ou à quelqu'un de très éloigné, par téléphone. Nous ne pouvons lui envoyer aucun objet réel pour qu'il l'inspecte; par exemple, si nous pouvions envoyer de la lumière, nous pourrions lui envoyer une lumière polarisée circulaire droite et dire, « Ceci est la lumière polarisée circulaire droite – regardez la manière dont elle agit ». Mais nous ne pouvons rien lui *donner*, nous ne pouvons que lui parler. Il est très éloigné, ou dans un endroit bizarre, et il ne peut rien voir de ce que nous voyons. Par exemple, nous ne pouvons pas dire, « Regardez la Grande Ourse; regardez comment ces étoiles sont disposées. Ce que nous voulons dire par 'droite' est... ». Nous ne pouvons que lui téléphoner.

Nous voulons maintenant lui dire tout ce que nous sommes. Bien sûr, nous commençons d'abord par définir des nombres et disons, « Tic, tic, *deux*, tic, tic, tic, *trois*... », de telle sorte que progressivement il puisse comprendre quelques mots, etc. Après un certain temps, nous pouvons devenir très intimes et il dit, « A quoi ressemblez-vous donc? » Nous nous mettons à nous décrire et disons, « Bien, nous avons un mètre quatre-vingts de haut ». Il dit, « Attendez un instant, qu'est-ce que c'est un mètre quatre-vingts? Est-il possible de lui dire ce que c'est qu'un mètre quatre-vingts? Certainement! Nous disons, « Vous connaissez le diamètre d'un atome d'hydrogène – nous sommes grands comme 17.000.000.000 d'atomes d'hydrogène! » Ceci est possible parce que les lois de la physique ne sont pas invariantes par changement d'échelle et donc nous *pouvons* définir une longueur absolue. Et ainsi nous

définissons la taille de notre corps, et nous lui disons quelle en est la forme générale – il y a des excroissances avec cinq renflements dépassant à chaque extrémité, etc.; il nous suit et nous terminons de décrire notre apparence extérieure probablement sans rencontrer de difficultés particulières. Il dessina même un modèle de notre personne au fur et à mesure. Il dit, « Ah! vous êtes certainement de très jolis individus et maintenant qu'y a-t-il à l'intérieur? » Nous nous mettons alors à décrire les divers organes à l'intérieur, et nous arrivons au cœur, nous en décrivons avec soin la forme et disons, « Mettez le cœur sur le côté gauche ». Il dit, « Euh... le côté gauche? » Notre problème est alors de lui décrire de quel côté le cœur doit se trouver sans que lui n'ait jamais vu ce que nous voyons, et sans que nous puissions jamais lui envoyer aucun objet illustrant ce que nous entendons par « droite » – aucun objet de référence qui soit « droit ». Pouvons-nous y parvenir?

52-7 La parité n'est pas conservée!

Il se trouve que les lois de gravitation, les lois de l'électricité et du magnétisme, les forces nucléaires satisfont toutes les principes de symétrie de réflexion, de telle sorte que ces lois ou tout ce que l'on peut en déduire ne peuvent être employées. Mais associé avec les nombreuses particules qui ont été trouvées dans la nature, il existe un phénomène appelé la *désintégration bêta*, ou *désintégration faible*. Un des exemples de désintégration faible, en relation avec une particule découverte aux environs de 1954, a posé une question difficile. Une certaine particule chargée se désintérait en trois mésons- π , comme il est indiqué schématiquement sur la Figure 52-5. Cette particule fut appelée pendant un certain temps un méson- τ . Or sur la Figure 52-5 nous voyons également une autre particule qui se désintègre en deux mésons; l'un doit être neutre à cause de la conservation de la charge. Cette particule fut appelée un méson- θ . Ainsi d'un côté nous avons une particule appelée un τ , qui se désintègre en trois mésons- π , et de l'autre un θ qui se désintègre en deux mésons- π . On découvrit rapidement que le τ et le θ ont des masses presque égales; en fait, à la limite des erreurs expérimentales près, elles sont égales. Ensuite, le temps qu'il leur faut pour se désintégrer en deux π et en trois π est exactement le même; elles vivent le même temps. Ensuite chaque fois qu'elles sont fabriquées, elles le sont dans les mêmes proportions, par exemple, 14 pour cent de τ , 86 pour cent de θ .

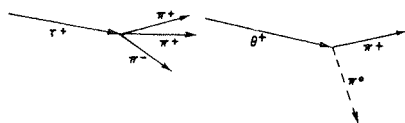


Fig. 52-5. Un diagramme schématisant de la désintégration des particules τ^+ et θ^+ .

N'importe qui, doué de bon sens, réalise immédiatement qu'elles doivent être la même particule, que nous produisons simplement un objet qui a deux manières différentes de se désintégrer – et non deux particules différentes. Cet objet qui peut se désintégrer de deux manières différentes a donc le même temps de vie et se décompose dans des proportions constantes (parce que c'est simplement le rapport des probabilités avec lesquelles il se désintègre en ces deux modes).

Cependant on réussit à prouver (nous ne pouvons absolument pas expliquer ici *comment*), à partir du principe de symétrie de réflexion en mécanique quantique, qu'il était impossible

de produire ces deux choses venant de la même particule – la même particule *ne pouvait pas* se désintégrer de ces deux manières à la fois. La loi de conservation correspondant au principe de symétrie de réflexion est quelque chose qui n'a pas d'analogue classique, et c'est pourquoi ce genre de conservation en mécanique quantique fut appelée la *conservation de la parité*. C'était donc un résultat de la conservation de la parité, ou plus précisément de la symétrie dans une réflexion des équations de mécanique quantique des désintégrations faibles, que la même particule ne pouvait pas donner les deux choses, aussi ce devait être une sorte de coïncidence des masses, des temps de vie, etc. Mais plus on l'étudiait, plus la coïncidence était remarquable, et on soupçonna de plus en plus que la loi fondamentale de la symétrie de réflexion dans la nature pouvait être fausse.

Comme résultat de cet échec apparent, les physiciens Lee et Yang suggérèrent que d'autres expériences soient tentées dans des interactions voisines pour essayer de vérifier si la loi était correcte dans d'autres cas. La première expérience de ce genre fut réalisée par Melle Wu de Columbia et fut réalisée ainsi. En utilisant un aimant extrêmement fort à une très basse température, il se trouve qu'un certain isotope de cobalt qui se désintègre en émettant un électron, est magnétique, et si la température est suffisamment basse pour que les oscillations thermiques ne fassent pas trop s'agiter les aimants atomiques, ils s'alignent dans le champ magnétique. Ainsi les atomes de cobalt sont tous alignés dans un champ magnétique élevé. Puis ils se désintègrent, émettant un électron et on découvrit que lorsque les atomes étaient alignés dans un champ magnétique dont le vecteur **B** pointait vers le haut, la plupart des électrons étaient émis dans une direction vers le bas.

Si on n'est pas réellement « attaché » au monde, une telle remarque ne semble pas avoir une quelconque signification, mais si on sait apprécier les problèmes et les choses intéressantes dans le monde, on voit que c'est une découverte tout à fait dramatique: Lorsque nous plaçons des atomes de cobalt dans un champ magnétique extrêmement fort, il y a davantage d'électrons de désintégration qui vont vers le bas que vers le haut. De ce fait, si nous devons considérer une expérience correspondante dans un « miroir », dans laquelle les atomes de cobalt seraient alignés dans la direction opposée, ils cracheraient leurs électrons vers le *haut* et non pas vers le *bas*; l'action *n'est pas symétrique*. *Des cheveux ont poussé sur l'aimant!* Le pôle sud d'un aimant est d'un type tel que les électrons dans une désintégration bêta tend à s'en éloigner; cela distingue, d'une manière physique, le pôle nord du pôle sud.

Après celle-ci, un grand nombre d'autres expériences furent réalisées: la désintégration du π en μ et ν ; μ en un électron et deux neutrinos; de nos jours, le Λ en proton et π ; la désintégration des Σ ; et de nombreuses autres désintégrations. En fait, dans presque tous les cas où on pouvait l'attendre, on a chaque fois trouvé qu'ils n'obéissaient *pas* à la symétrie de réflexion! Fondamentalement, la loi de symétrie de réflexion à ce niveau en physique, n'est pas correcte.

En bref, nous pouvons dire à un Martien où placer le cœur: nous disons, « Écoutez, fabriquez-vous un aimant et mettez-y des enroulements, branchez le courant, prenez un peu de cobalt et baissez la température. Disposez l'expérience de telle sorte que les électrons aillent des pieds vers la tête, alors la direction dans laquelle le courant traverse les enroulements est la direction qui pénètre dans ce que nous appelons la droite et qui ressort de ce que nous appelons la gauche. » Il est ainsi possible de définir droite et gauche, maintenant, en réalisant une expérience de ce genre.

Beaucoup d'autres caractéristiques furent prédites. Par exemple, il se trouve que le spin, le moment cinétique, du noyau de cobalt avant désintégration

vaut 5 unités de $\hbar$, et après désintégration vaut 4 unités. L'électron a un moment cinétique de spin, et il y a également un neutrino en jeu. Il est facile de voir, à partir de là, que l'électron doit avoir son moment cinétique de spin aligné le long de sa direction de mouvement, de même pour le neutrino. Ainsi, il semble que l'électron tourne vers la gauche, et ceci fut également vérifié. En fait, Boehm et Wapstra ont vérifié ici à Caltech, que les électrons tournent essentiellement vers la gauche. (Il y avait d'autres expériences qui donnaient la réponse opposée, mais elles étaient erronées!)

Le problème suivant, bien sûr, fut de trouver la loi de l'échec de la conservation de la parité. Quelle est la règle qui va nous dire le degré de cet échec? La règle est celle-ci: elle n'apparaît que dans ces réactions extrêmement lentes, appelées désintégrations faibles, et lorsqu'elle apparaît, la règle est que la particule qui a un spin comme l'électron, le neutrino, etc., est produite avec un spin tendant à aller vers la gauche. C'est une règle asymétrique; elle relie une vitesse, vecteur polaire, et un moment cinétique, vecteur axial, et dit que le moment cinétique a plus de chance de se trouver dans une direction opposée à la vitesse que le long de cette vitesse.

Voilà quelle est la règle, mais aujourd'hui nous ne comprenons pas réellement le pourquoi et les raisons de cela. *Pourquoi* est-ce la règle correcte, quelle en est la raison fondamentale, et comment est-ce relié à tout le reste? Sur le moment nous avons été si choqués par le fait que ce n'était pas symétrique que nous n'avons pas encore assez récupéré pour comprendre ce que cela veut dire par rapport à toutes les autres règles. Cependant, le sujet est intéressant, moderne et encore non résolu, aussi il semble approprié que nous discutons quelques questions qui lui sont associées.

52-8 L'antimatière

La première chose à faire lorsque l'une des symétries est perdue est de revenir immédiatement à la liste des symétries connues ou supposées et de voir si l'une des autres a également été détruite. Nous n'avons pas mentionné une opération sur notre liste, qui doit manifestement être mise en question, c'est la relation entre matière et antimatière. Dirac a prédit qu'en plus des électrons il doit y avoir une autre particule, appelée le positron (découverte à Caltech par Anderson) qui est nécessairement reliée à l'électron. Toutes les propriétés de ces deux particules obéissent à certaines règles de correspondance: les énergies sont égales; les masses sont égales; les charges sont opposées; mais, plus important que tout le reste, les deux lorsqu'elles s'approchent l'une de l'autre peuvent s'annihiler l'une l'autre, et libérer leur masse entière sous forme d'énergie, par exemple de rayons gamma. Le positron est appelé une *antiparticule* de l'électron, et telles sont les caractéristiques d'une particule et de son antiparticule. Il est clair à partir de la démonstration de Dirac que toutes les autres particules dans le monde devaient également avoir leurs antiparticules correspondantes. Par exemple, pour le proton il doit y avoir un antiproton, qui est maintenant symbolisé par $\bar{p}$. Le $\bar{p}$ aurait une charge électrique négative et la même masse qu'un proton, etc. La caractéristique la plus importante, cependant, est qu'un proton et un antiproton se rapprochant peuvent s'annihiler l'un l'autre. La raison pour laquelle nous insistons là-dessus est que les gens ne comprennent pas, lorsque nous disons qu'il y a un neutron et également un antineutron, parce qu'ils disent, « Un neutron est neutre, ainsi comment *peut-il*

avoir la charge opposée?» La règle de l'«anti» n'est pas simplement que l'antiparticule a la charge opposée, elle a un certain ensemble de propriétés, et tout cet ensemble est opposé à celui de la particule. L'antineutron se distingue du neutron de cette manière: si nous rapprochons deux neutrons, ils se comportent comme deux neutrons, mais si nous rapprochons un neutron et antineutron, ils s'annihilent l'un l'autre avec une grande explosion d'énergie libérée, avec divers mésons- π , rayons gamma et que sais-je encore.

Si maintenant nous avons des antineutrons, des antiprotons, des antiélectrons, nous pouvons en principe faire des antiatomes. Ils n'ont pas encore été construits jusqu'à présent, mais c'est possible en principe. Par exemple, un atome d'hydrogène est constitué d'un proton au centre avec un électron qui gravite autour. Imaginez que quelque part nous puissions fabriquer un antiproton avec un positron tournant autour, tournerait-il autour? Eh bien, d'abord l'antiproton est électriquement négatif et l'antiélectron est électriquement positif, ils s'attirent donc l'un l'autre d'une manière correspondante – les masses sont toutes les mêmes; tout est identique. C'est un des principes de la symétrie de la physique, les équations semblent montrer que si une horloge, par exemple, était faite de matière, et que si nous fabriquons la même horloge à partir d'antimatière, elle fonctionnerait de la même manière. (Bien entendu, si nous rapprochons les deux horloges, elles vont s'annihiler l'une l'autre, mais ceci est différent.)

Une question immédiate se pose alors. Nous pouvons avec de la matière construire deux horloges, l'une qui est de «main gauche» et l'autre qui est de «main droite». Par exemple, nous pouvons réaliser une horloge qui n'est pas construite d'une manière simple, mais qui contient du cobalt, des aimants, des détecteurs d'électrons qui détectent la présence des électrons issus de désintégrations faibles et les comptent. Chaque fois que l'un d'entre eux est compté, l'aiguille des secondes se déplace. Alors l'horloge-miroir recevant moins d'électrons ne fonctionnera pas à la même vitesse. Ainsi, évidemment, nous pouvons fabriquer deux horloges de telle sorte que l'horloge de «main gauche» ne soit pas en accord avec l'horloge de «main droite». Fabriquons, à partir de la matière, une horloge que nous appelons l'horloge de référence ou de «main droite». Essayons ensuite aussi à partir de matière, de fabriquer une horloge que nous appelons l'horloge de «main gauche». Nous venons tout juste de découvrir que, en général, ces deux horloges ne vont *pas* fonctionner de la même manière; avant cette fameuse découverte physique, on ne le pensait pas. On supposait également que la matière et l'antimatière étaient équivalentes. C'est-à-dire que si nous faisons une horloge à partir d'antimatière, de main droite, avec la même forme, elle fonctionnera de la même manière que l'horloge de matière, de «main droite», et si nous fabriquons la même horloge «gauche» elle fonctionnera de la même manière. En d'autres termes, au début on pensait que *toutes les quatre* horloges étaient les mêmes; bien entendu, maintenant, nous savons que les matières «droite» et «gauche» ne sont pas les mêmes. Probablement, donc, l'antimatière «droite» et l'antimatière «gauche» ne sont pas les mêmes.

Ainsi, la question évidente est de savoir laquelle des deux va avec l'autre? En d'autres termes, est-ce que la matière «droite» se comporte de la même manière que l'antimatière «droite»? Ou est-ce que la matière «droite» se comporte de la même manière que l'antimatière «gauche»? Les expériences d'interactions faibles utilisant des interactions de positrons plutôt que des interactions d'électrons, indiquent que la relation est ceci: la matière «droite» fonctionne de la même manière que l'antimatière «gauche».

De ce fait, au total, il est effectivement vrai que la symétrie droite et gauche est encore conservée! Si nous fabriquons une horloge gauche, mais que nous la fabriquons à partir de l'autre type de matière, de l'anti-matière au lieu de matière, elle fonctionnera de la même manière. Ainsi ce qui

s'est passé est qu'au lieu d'avoir deux règles indépendantes dans notre liste de symétries, deux de ces règles se fondent pour en former une nouvelle, qui dit que la matière « droite » est symétrique de l'antimatière « gauche ».

Ainsi, si notre Martien est constitué d'antimatière et que nous lui donnons des instructions pour faire son modèle « droit » comme le nôtre, cela donnera, bien entendu, le résultat inverse. Alors que va-t-il se passer, si après de multiples conservations, nous avons chacun appris à l'autre à fabriquer des vaisseaux spatiaux et que nous nous rencontrons dans l'espace vide à mi-chemin ? Nous nous serons mutuellement enseignés nos traditions, etc., et nous allons l'un et l'autre courir à notre rencontre pour nous serrer la main. Bien, s'il tend sa main gauche, faites attention !

52-9 Violation des symétries

La question suivante est : que pouvons-nous faire de lois qui sont *presque* symétriques ? La chose magnifique est que pour un aussi large domaine de phénomènes importants et forts – les forces nucléaires, les phénomènes électriques et même les phénomènes faibles comme la gravitation – sur un domaine énorme de la physique, toutes les lois de ces phénomènes semblent être symétriques. Par ailleurs, ce petit résultat supplémentaire dit, « Non, les lois ne sont pas symétriques ! » Comment peut-il se faire que la nature soit presque symétrique et non pas parfaitement symétrique ? Que devons-nous faire de cela ? D'abord, avons-nous d'autres exemples ? La réponse est, oui, nous avons en fait quelques autres exemples. Par exemple, la partie nucléaire de la force entre proton et proton, entre neutron et neutron, et entre neutron et proton, est chaque fois exactement la même – il y a une symétrie des forces nucléaires, une nouvelle, qui est que nous pouvons interchanger les neutrons et protons – mais ce n'est évidemment pas une symétrie générale, car la répulsion électrique entre deux protons à une certaine distance n'existe pas pour les neutrons. Aussi, il n'est pas généralement vrai que nous puissions *toujours* remplacer un proton par un neutron, mais ce n'est vrai qu'à une bonne approximation. Pourquoi *bonne* ? Parce que les forces nucléaires sont beaucoup plus grandes que les forces électriques. C'est donc aussi une « quasi-symétrie ». Nous avons donc des exemples dans d'autres domaines.

Notre esprit a tendance à accepter la symétrie comme une sorte de perfection. En fait, c'est un peu comme la vieille idée des Grecs que les cercles étaient parfaits, et ils avaient une grande répugnance à croire que les orbites planétaires n'étaient pas des cercles, mais seulement presque des cercles. La différence entre être un cercle et être presque un cercle n'est pas une petite différence, c'est un changement fondamental en tout cas pour l'esprit. Il y a un aspect de perfection et de symétrie dans un cercle, qui n'apparaît plus au moment où le cercle est légèrement déformé – c'est fini – il n'est plus symétrique. Alors, la question est pourquoi est-ce seulement *presque* un cercle – c'est une question bien plus difficile. Le mouvement réel des planètes, en général, doit s'effectuer le long d'ellipses, mais graduellement, à cause des forces de marée, etc., ils sont devenus presque symétriques. La question est de savoir si nous avons ici un problème semblable. Le problème du point de vue des cercles est que si c'étaient des cercles parfaits, il n'y aurait rien à expliquer, c'est clairement simple. Mais puisque ce ne sont que des cercles presque parfaits, il y a énormément de choses à expliquer, et le résultat se trouve être un problème dynamique énorme et maintenant notre problème est d'expliquer pourquoi ils sont presque symétriques en considérant les forces des marées, etc.

Ainsi notre problème est d'expliquer d'où vient la symétrie. Pourquoi la nature est-elle si proche d'une symétrie totale? Personne n'a idée du pourquoi. La seule chose que nous pouvons suggérer est quelque chose qui ressemble à ceci: Il existe une porte au Japon, une porte à Neiko, qui est quelquefois appelée par les Japonais la plus belle porte de tout le Japon; elle fut construite à un moment où l'art chinois avait une grande influence. Cette porte est très compliquée, avec beaucoup de gâbles, de belles sculptures, beaucoup de colonnes, de têtes de dragons et de princes sculptées dans les piliers, etc. Mais lorsqu'on regarde de plus près, on voit que dans le dessin complexe élaboré sur un des piliers, un des petits éléments du dessin est sculpté à l'envers; à part ceci, la chose est complètement symétrique. Si on en demande le pourquoi, l'histoire est que ce fut sculpté à l'envers, de telle sorte que les dieux ne soient pas jaloux de la perfection de l'homme. Ainsi les architectes avaient-ils à dessein introduit une erreur à cet endroit, de telle sorte que les dieux ne soient pas jaloux et ne prennent pas ombrage des êtres humains.

Nous aimerions renverser l'idée et penser peut-être que la véritable explication de la quasi-symétrie de la nature est celle-ci: Dieu a rendu les lois seulement presque symétriques, de telle sorte que nous ne soyons pas jaloux de Sa perfection!

Index alphabétique

- Aberration, 24, 118 s
Absorption, 76 s
Amortissement du rayonnement, 85 s
Analyse de Fourier, 346 s
Analyse vectorielle, 374
Anderson, C.D., 385
Angle de Brewster, 101
Angle, d'incidence, 3
 de réflexion, 3
Antenne parabolique, 57
Antimatière, 385 s
Atmosphère, exponentielle, 206 s
 isotherme, 208
Atome métastable, 249 à
Atténuation, 77
Avogadro, 177
Axe optique, 97
- Bandes latérales, 322 s
Bâtonnets, 127, 148
Becquerel, A.H., 30
Biréfringence, 97 s
Boehm, 385
Bohr, N., 232
Boltzmann, 222
Born, M., 161, 188
Bremsstrahlung, 117 s
Brown, R., 221
Bruit, 345
Bruit Johnson, 224, 231
- Carnot, S., 266 s
Carré moyen de la distance, 232
Catalyseur, 246
Cellule de Kerr, 100
Cerenkov, P.A., 360
Chaleur spécifique, 216 s, 285
Chromaticité, 134
Cinétique chimique, 244 s
Clausius, R., 267
- Congression, adiabatique, 196
 isotherme, 271
Conductivité ionique, 257 s
Conductivité thermique d'un gaz, 262 s
Cônes, 127
Constante de Planck, 174
Cornée, 126
Cortex visuel, 146
Critère de Rayleigh, 56
Cycle de Carnot, 270 s, 285
- Effet capillaire, 370
Effet Doppler, 118 s, 184
Effet Purkinje, 128
Einstein, A., 232, 246, 247
Electrodynamique quantique, 30
Electron, 161, 165 s
 rayon classique, 86
Electron volt (unité), 114
Emission spontané, 247
Energie d'activation, 239
 cinétique, 195
 électromagnétique, 38
 d'ionisation, 242
Enthalpie, 289
Entropie, 304 s,
Equation de Clausius-Clapeyron, 290
Equation d'onde, 311 s
Equations de Maxwell, 316
Equilibre thermique, 224
Evaporation d'un liquide, 210 s, 236
- Fermat, P., 4 s
Formules des lentilles, 23
Formules de réflexion de Fresnel, 105
Fourier, J., 346
Foyer, 8
Frank, I., 360
Fréquence angulaire, 39
Front d'onde, 311

- Galilée, 375
- Gauss (unité), 114
- Gaz mono-atomique, 195
- Grandissement, 22
- Harmoniques, 344 s
- Heisenberg, W., 161, 171, 174, 175, 188
- Helmholtz, H., 135
- Huygens, C., 2
- Hypocycloïde, 112
- Indice de réfraction, 66 s
- Interférences, 34 s, 36
- Ionisation thermique, 241 s
- Jeans, J., 219, 229 s
- Laplace, P., 316
- Laser, 89, 249
- Libre parcours moyen, 253 s
- Loi de Boltzmann, 208 s
- Loi de Boyle (mariotte), 218
- Loi de Coulomb, 29
- Loi des gaz parfaits, 203
- Loi de Ohm, 258
- Loi de Rayleigh, 229
- Lois de Newton, 192, 222, 255,
- Lois de Snell (Descartes), 4, 69
- Longueur d'onde, 1 s
- Lumière, diffusion, 89 s
 - polarisée, 93
 - quantité de mouvement, 123 s
- Machine de l'encliquetage à rochet, 295 s
- Machines thermiques, 264 s
- Maille élémentaire, 182
- Maser, 249
- Maxwell, J.C., 27, 218, 231, 301
- Mécanique quantique, 160 s, 176 s
- Mécanique statistique, 206
- Miller, W.C., 128
- Modes, 335 s
- Modulation d'amplitude, 322
- Mole (unité), 203
- Mouvement Brownien, 221 s
- Mouvement moléculaire, 221
- Mouvement perpétuel, 296
- Musique, 345
- Nerf optique, 127
- Newton, I., 127
- Niveaux d'énergie, 185 s
- Nombre d'Avogadro, 235 s
- Nombre d'ondes, 39
- Oeil, à facettes, 150 s
 - humain, 126 s, 144 s
- Ondes, 358 s
 - de cisaillement, 364
 - en interférence, 164
 - de lumière, 318
 - sinusoïdales, 39 s
- Ondes électromagnétiques, infra-rouge, 1
 - rayons X, 1
 - ultra-violet, 1
- Optique, 1 s
 - géométrique, 1 s, 15 s
- Pendule, 341 s
- Photon, 2, 170
- Physiochimie de la vision en couleur, 138 s
- Planck, M., 229, 246, 247
- Polarisation, 96 s
- Pourpre visuel, 138
- Pouvoir de résolution, 25, 55 s
- Principe d'incertitude, 171, 174, 187 s
- Principe du moindre temps, 4 s, 11
- Principe de combinaison de Ritz, 186
- Principe de réciprocité, 57
- Promenade aléatoire, 232
- Ptolémée, 3
- Pythagore, 344
- Quantité, de mouvement, 177 s
 - de la lumière, 123 s

- Rayon de Bohr, 184
- Rayon de l'électron, 86
- Rayons paraxiaux, 17
- Rayons X, 1
- Rayonnement de Cerenkov, 360
 - du corps noir, 228
 - électromagnétique, 28 s
 - infra-rouge, 1
 - ultra-violet, 1
- Schrödinger, E., 133, 161, 188
- Section efficace de diffusion de
 - Thompson, 91
- Séismographe, 365
- Shannon, C., 266
- Signal porteur, 322
- Smoluchowski, 232
- Snell, W., 4
- Son, 344
 - vitesse du, 316 s
- Symétrie des lois physiques, 372 s
- Synchrotron, 113 s, 116
- Tache jaune, 127
- Tamm, I., 360
- Température, 198 s,
- Temps retardé, 29
- Théorème, de l'énergie, 353
 - de Nernst, 280
- Théorie cinétique, 236
 - de gaz, 190 s
- Thermodynamique, 192, 283 s
 - lois de, 264 s
- Transformation de Lorentz, 120, 374
- Vecteur axial, 380 s
- Vinci, Leonardo da, 144
- Vision, 141 s
 - binoculaire, 144
 - en couleur, 126 s
- Vitesse de phase, 326
- Wapstra, 385
- Young, 135
- Yustova, 137

LE COURS DE PHYSIQUE DE FEYNMAN

Mécanique, 1^{re} partie

368 pages : Atomes en mouvement. Physique de base. La physique par rapport aux autres sciences. Conservation de l'énergie. Temps et distance. Probabilité. La théorie de la gravitation. Mouvement. Lois de Newton de la dynamique. Conservation de la quantité de mouvement. Vecteurs. Caractéristiques d'une force. Travail et énergie potentielle. La théorie de la relativité restreinte. Énergie et quantité de mouvement relativistes. Espace-Temps. Rotation à deux dimensions. Centre de masse; mouvement d'inertie. Rotation dans l'espace. L'oscillateur harmonique. Algèbre. Résonance. Régimes transitoires. Systèmes linéaires et révision. Index.

Mécanique, 2^e partie

416 pages : Optique : le principe du moindre temps. Optique géométrique. Rayonnement électromagnétique. Interférence. Diffraction. L'origine de l'indice de réfraction. Amortissement du rayonnement; diffusion de la lumière. Polarisation. Effets relativistes dans le rayonnement. La vision de la couleur. Mécanismes de la vision. Comportement quantique. La relation entre les points de vue ondulatoire et corpusculaire. La théorie cinétique des gaz. Les principes de mécanique statistique. Le mouvement Brownien. Applications de la théorie cinétique. Diffusion. Les lois de la thermodynamique. Illustration de la thermodynamique. L'encliquetage à rochet. Le son; l'équation d'onde. Battements. Modes. Harmoniques. Ondes. Symétrie dans les lois physiques. Index.

Électromagnétisme, 1^{re} partie

416 pages : Électromagnétisme. Calcul différentiel des champs de vecteurs. Calcul vectoriel intégral. Électrostatique. Application du théorème de Gauss. Le champ électrique : exemples divers. Énergie électrostatique. L'électricité dans l'atmosphère. Les diélectriques. À l'intérieur des diélectriques. Analogies électrostatiques. Magnétostatique. Le champ magnétique : exemples divers. Le potentiel-vecteur. Courants induits. Les lois de l'induction. Les équations de Maxwell. Le principe de moindre action. Solutions des équations de Maxwell dans le vide. Solutions en présence de charges de courants. Index.

Électromagnétisme, 2^e partie

432 pages : Circuits en courant alternatif. Cavités résonnantes. Guides d'ondes. L'électrodynamique en notation relativiste. Transformation Lorentz des champs. L'énergie du champ et l'impulsion du champ. La masse électromagnétique. Mouvement des charges dans les champs électriques et magnétiques. La géométrie interne des cristaux. Tenseurs. L'indice de réfraction des matériaux denses. Réflexion par les surfaces. Le magnétisme de la matière. Paramagnétisme et résonance magnétique. Ferromagnétisme. Milieux magnétiques. Élasticité. Milieux élastiques. L'écoulement de l'eau sèche. L'écoulement de l'eau mouillante. Index.

Mécanique quantique

528 pages : Le comportement quantique. La relation entre les points de vue ondulatoire et corpusculaire. Amplitude de probabilité. Particules identiques. Spin un. Spin un demi. La dépendance des amplitudes en fonction du temps. La matrice hamiltonienne. Le maser à ammoniac. Autres systèmes à deux états. La structure hyperfine de l'hydrogène. Propagation dans un réseau cristallin. Les semi-conducteurs. L'approximation des particules indépendantes. Variation des amplitudes dans la position. Symétrie et lois de conservation. Le moment cinétique. L'atome d'hydrogène et la table périodique. Les opérateurs. L'équation de Schrödinger dans un contexte classique : un séminaire sur la supra-conductivité. Épilogue. Appendice. Index.

LES COURS DE RÉFÉRENCE

Richard Feynman
Robert Leighton
Matthew Sands



LE COURS DE PHYSIQUE DE FEYNMAN mécanique 2

L'ampleur du succès qu'a rencontré le « Cours de physique de Feynman » dès sa parution s'explique par son caractère fondamentalement novateur.

Richard Feynman, qui fut professeur d'université dès l'âge de vingt-quatre ans, a exprimé dans ce cours, publié peu avant qu'il reçoive le prix Nobel de physique, une vision expérimentale et extrêmement personnelle de l'enseignement de cette discipline. Cette vision a, depuis, remporté l'adhésion des physiciens du monde entier, faisant de ce cours un grand classique.

Ces ouvrages s'adressent aux étudiants de tous niveaux, qui y trouveront selon leurs besoins aussi bien les notions de base débarrassées de tout appareil mathématique inutile, que les avancées les plus modernes de cette science passionnante qu'est la physique.

Les deux premiers volumes traitent de la mécanique, les troisième et quatrième couvrent l'électromagnétisme et le cinquième volume traite de la mécanique quantique.

RICHARD FEYNMAN

a été professeur à l'université Cornell, puis au CalTech (California Institute of Technology).

Lors de la rédaction du cours, Robert Leighton enseignait au CalTech et Matthew Sands à l'université Stanford.



9 782100 041350

ISBN 2 10 004135 5

www.dunod.com

